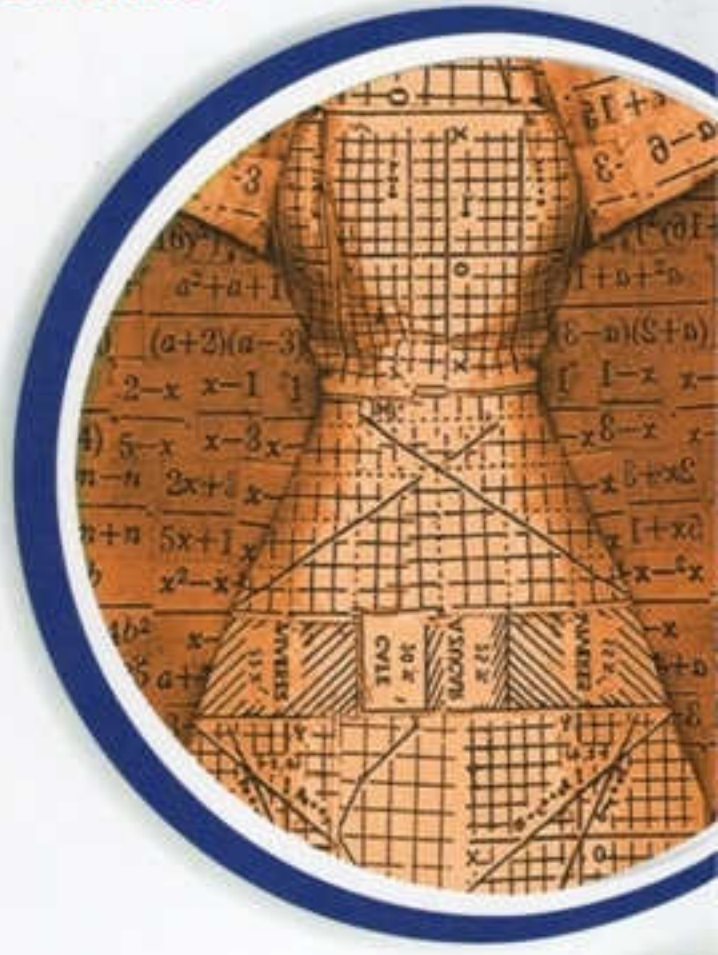
ÁLGEBRA

CALAPENSHKO

TEÓRICO - PRÁCTICO

twitter.com/calapenshko



CONTENIDO:

- Expresiones Algebraicas
- Ecuaciones
- Números Reales
- Funciones

FONDO EDITORIAL RODO
Siempre Competitivo

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Libro: Álgebra

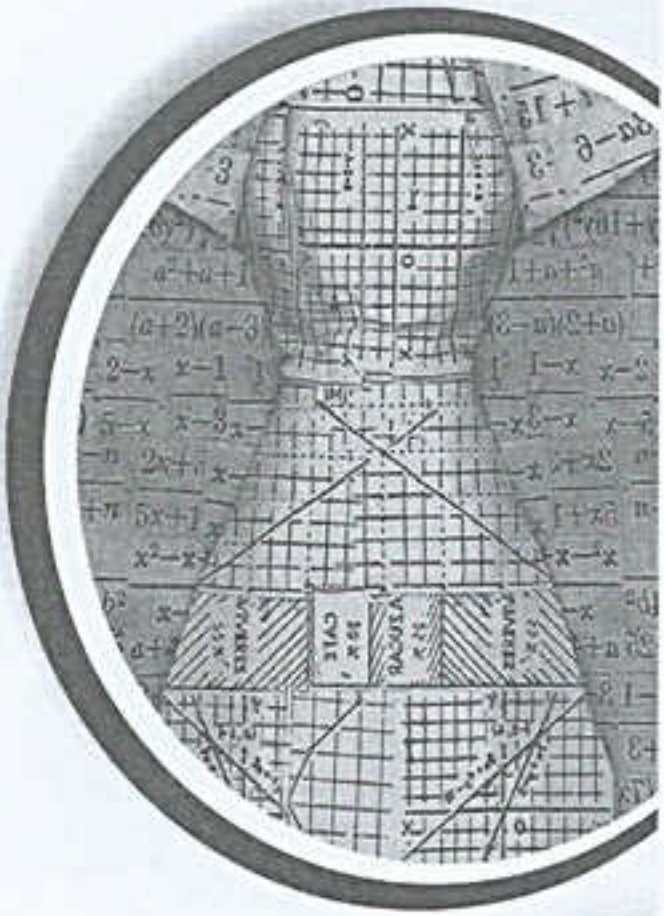
Páginas anexadas: 882
Páginas en bruto: 850
Peso bruto aproximado: 364 megas
Replica: No
Calificación: 9/10
Autor: Editorial Rodo
ISBN: 2017-05740
Tiempo SCAN: **5 horas 29 minutos**
Edición SCAN: **2 horas 27 minutos**
Tiempo Total SCAN: **7 horas 56 minutos**

team CALAPENSHKO

twitter.com/calapenshko

ÁLGEBRA

TEÓRICO - PRÁCTICO



CONTENIDO:

- Expresiones Algebraicas
- Ecuaciones
- Números Reales
- Funciones

FONDO EDITORIAL
RODO
Siempre Competitivo

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

PRESENTACIÓN

Creemos que la educación atraviesa por múltiples dificultades, vemos como en el transcurrir de los procesos de Admisión, grupos de especialistas discuten y dictaminan cambios en los modelos de prueba que son tomados en los llamados Concursos de Admisión. Es por ello que tenemos que ser consecuentes del rol protagónico que tenemos todos aquellos quienes nos encontramos inmersos en la labor educativa.

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo conformado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y resolución de Exámenes de Admisión tomados en las diferentes universidades de nuestro país, tales como la UNI, UNMSM, UNAC, UNA, UNFV y PUCP.

Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo en manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral, dándole prioridad a los cursos de matemática y ciencias.

Uno de los primeros aportes es la elaboración del presente texto teórico - práctico denominado **LIBRO DE ÁLGEBRA**, concentrando todo el esfuerzo y la experiencia del grupo humano que la conforman. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas solicitados por el prospecto de admisión.

Esta obra forma parte de la serie de publicaciones que permiten al estudiante acceder a un material novedoso el cual sabemos generará diversos comentarios y sugerencias, los cuales sabremos aceptar.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benitez Nuñez

team CALAPENSHKO

LIBRO DE ÁLGEBRA

ESTA ES UNA OBRA COLECTIVA - EQUIPO PEDAGÓGICO
Juan Carlos Ramos Leyva

twitter.com/calapenshko

EDITADO por
FONDO EDITORIAL RODO
de Walter Z. Benitez Nuñez
Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña
LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 ✆ 992 - 796104

6a. Edición - Mayo 2017

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N°: 2017 – 05740

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS
José Miguel Gallo Ballena

Se término de imprimir en Mayo del 2017 en:
GRAFIC PLUS S. A. C.
Jr. Chincha N° 434 A. H. VI ZONA LIMA - Lima 11

Prohibida la reproducción total o parcial de este boletín, por cualquier medio, sin permiso escrito de la Editorial

team CALAPENSHKO

ÍNDICE

ÁLGEBRA

CAPÍTULO 1.	Potencias y Radicales en $\mathbb{R}$	7
CAPÍTULO 2.	Expresiones Algebraicas – El Polinomio	37
CAPÍTULO 3.	Productos Notables	67
CAPÍTULO 4.	División de Polinomios	95
CAPÍTULO 5.	Divisibilidad Algebraica	125
CAPÍTULO 6.	Factorización en $\mathbb{Z}$	153
CAPÍTULO 7.	MCD y MCM de Polinomios – Fracción Algebraica	181
CAPÍTULO 8.	Potencia de un Binomio	213
CAPÍTULO 9.	Análisis Combinatorio – Cálculo de Probabilidades	245
CAPÍTULO 10.	Radicación – Racionalización	273
CAPÍTULO 11.	Ecuaciones	307
CAPÍTULO 12.	Números Reales – Desigualdades	339
CAPÍTULO 13.	Inecuaciones	371
CAPÍTULO 14.	Relaciones y Funciones I	403
CAPÍTULO 15.	Funciones II	443
CAPÍTULO 16.	Funciones III (Polinomiales)	481
CAPÍTULO 17.	Logaritmos en $\mathbb{R}$	513
CAPÍTULO 18.	Límites	547
CAPÍTULO 19.	Derivadas	573
CAPÍTULO 20.	Nociones de Lógica	605
CAPÍTULO 21.	Sucesiones y Series	629
CAPÍTULO 22.	Progresiones	661
CAPÍTULO 23.	Matrices y Determinantes	689
CAPÍTULO 24.	Sistema de Ecuaciones	731
CAPÍTULO 25.	Introducción a la Programación Lineal	763
CAPÍTULO 26.	Números Complejos	803

team CALAPENSHKO

SIMBOLOGÍA

$\mathbb{C}$: Conjunto de números complejos

$\mathbb{I}m$: Conjuntos de números imaginarios

$\mathbb{R}$: Conjunto de número reales

$\mathbb{Q}$: Conjunto de número racionales

$\mathbb{Q}'$: Conjunto de número irracionales

$\mathbb{Z}$: Conjunto de números enteros

$\mathbb{Z}$ →
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...$
- Neutro = 0
- $\mathbb{Z}^- = ... -4, -3, -2, -1\}$

$\mathbb{N}$: Conjunto de números naturales

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ... = \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow$: Entonces

$\Leftrightarrow$: Si y sólo si

$|$: Tal que

$\forall$: Para todo

$\exists$: Existe

$\nexists$: No existe

$\in$: Pertenece

$\notin$: No pertenece

$\therefore$: Por lo tanto

$\exists!$: Éxiste un único

$\wedge$: y

$\vee$: o

$\rightarrow$: Condicional, implica

$\leftrightarrow$: Bicondicional, doble implicancia

$<>$: Equivalente

$=$: Igual

$\equiv$: Identidad

$\sim$: Semejanza

$\cong$: Congruente

$\neq$: Diferente

$\cup$: Unión

$\cap$: Intersección

$\subset$: Inclusión

$>$: Mayor

$>>$: Mucho mayor

$<$: Menor

$<<$: Mucho menor

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Capítulo 1

Potencias y Radicales en $\mathbb{R}$

CAPACIDADES:

- Identificar definiciones, teoremas y propiedades relacionadas con las potencias y radicales.
- Efectuar operaciones con potencias y/o radicales dentro del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- Reconocer y resolver algunas ecuaciones trascendentes cuya incógnita forma parte de algún exponente.

EL ORIGEN DE LA PALABRA ÁLGEBRA, el matemático árabe Abuadala Mohamed Ibn Musa, comúnmente llamado ALJUARIZMI después de estudiar en la India y asimilar la ciencia Hindú escribe su famoso libro "AL' DJABR W'AL MUKABALA" que quiere decir "transposición y reducción de términos semejantes".

AL JUARIZMI

Al principio está nueva disciplina se designó con el nombre completo de la obra de Aljuarizmi, pero en el siglo XVI se suprimía la segunda parte para llamarle simplemente: "Al' Djabr" o sea ÁLGEBRA.

A DIOFANTO DE ALEJANDRÍA (325 – 409) Geómetra griego; se le considera como el creador del Álgebra; fué el primero que publicó un tratado de esta ciencia matemática. Su tratado forma un cuerpo de doctrina importante: Está dividido en trece libros de los cuales solo los seis primeros han llegado hasta nosotros, en ellos se halla la resolución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de primer grado con dos incógnitas y un gran número de problemas resueltos mediante ecuaciones de primer y segundo grado cuyas dificultades aparecen gradualmente. Es probable que los otros siete libros que se han perdido nos hubieran dado un alto concepto matemático del autor de haber llegado hasta nosotros.

POTENCIACIÓN

Es la operación matemática que tiene por objetivo encontrar una expresión llamada potencia (p) conociendo previamente otras dos expresiones denominadas base (b) y exponente (n).

$$b^n = p \begin{cases} b = \text{base} & ; b \in \mathbb{R} \\ n = \text{exponente} & ; n \in \mathbb{Z} \\ p = \text{potencia} & ; p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo: En $2^3 = 8$; 2 es la base; 3 es el exponente y 8 es la potencia.

DEFINICIONES

1. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1$$

- $5^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$
- $-7^0 = -1$
- $0^0 = 1$
- $\sqrt{2}^0 = 1$
- $-\sqrt{5}^0 = -1$

2. $\forall a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^n = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{\text{"n" factores}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

- $4^1 = 4$
- $7^3 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 = 343$
- $0^1 = 0$
- $(-5)^2 = (-5).(-5) = +25 = 25$

3. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

TEOREMAS

1. $\forall a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

- $x^4 \,.\, x^2 = x^{4+2} = x^6$
- $x^7 \,.\, x^{-4} = x^{7-4} = x^3$

team CALAPENSHKO

2. $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- $\dfrac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$
- $\dfrac{x^3}{x^{-2}} = x^{3-(-2)} = x^{3+2} = x^5$

3. $\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

- $(x^2)^5 = x^{2.5} = x^{10}$
- $(x^{-2})^{-3} = x^{(-2)(-3)} = x^6$

4. $\forall\, a \wedge b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

$$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$$

- $(x\,.\,y)^2 = x^2\,.\,y^2$
- $(x^2\,.\,y^3)^5 = (x^2)^5\,.\,(y^3)^5 = x^{10}\,.\,y^{15}$

5. $\forall\, a \wedge b \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = \dfrac{x^3}{y^3}$
- $\left(\dfrac{x^4}{y^3}\right)^2 = \dfrac{(x^4)^2}{(y^3)^2} = \dfrac{x^8}{y^6}$

PROPIEDAD

$$x^{m^{(n^p)}} = x^{(m^a)} = x^b = c$$

- $2^{4^{0^1}} = 2^{4^0} = 2^1 = 2$
- $4^{-2^{-1}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4}^{-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

OBSERVACIÓN

Los teoremas y la propiedad mostrada anteriormente se extienden para exponentes (m, n, p) reales.

RADICACIÓN

Es la operación matemática inversa a la potenciación cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz (b), conociendo previamente otras dos expresiones denominadas radicando (a) e índice (n).

$$\sqrt[n]{a} = b \begin{cases} \sqrt{} = \text{signo radical} \\ n = \text{índice} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+ \\ a = \text{radicando} \; ; a \in \mathbb{R} \\ b = \text{raíz} \quad ; b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo: En $\sqrt[3]{64} = 4$; 3 es el índice, 64 el radicando y 4 la raíz.

DEFINICIONES

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

- $\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 32 = 2^5$
- $\sqrt[5]{-1} = -1 \Leftrightarrow -1 = (-1)^5$
- $\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow -8 = (-2)^3$

2. $\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ a^{1/n} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

- $\sqrt[1]{4} = 4$
- $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}$

OBSERVACIÓN

Debemos tener en cuenta que dentro del conjunto de los números reales no se define a la radicación cuando el índice es par y el radicando negativo, razón por la cual cada vez que el índice sea par el radicando y la raíz deberán ser no negativos.

- $\sqrt[4]{2004}$ existe en $\mathbb{R}$
- $\sqrt{-32}$ no existe en $\mathbb{R}$

team CALAPENSHKO

3. Asumiendo $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$

- $(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{-8}^2 = (-2)^2 = 4$
- $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4}^5 = 2^5 = 32$

twitter.com/calapenshko

TEOREMAS

1. $\forall \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

- $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$
- $\sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[8]{x} = \sqrt[8]{4x}$

2. $\forall \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R} \mid b \neq 0$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$
- $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

3. $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

- $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3.2]{x} = \sqrt[6]{x}$
- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5.3]{x} = \sqrt[15]{x}$

PROPIEDADES

1. $$\sqrt[m]{x^a \sqrt[n]{x^b \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{(an+b)p+c}}$$

- $\sqrt[5]{x^3 \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}} = \sqrt[5.4.3]{x^{(3.4+2).3+1}} = \sqrt[60]{x^{43}}$

2. $\underbrace{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m"radicales}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$

- $\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}}_{\text{2005radicales}} = \sqrt[2^{2005}]{x^{\frac{2^{2005}-1}{2-1}}} = \sqrt[2^{2005}]{x^{2^{2005}-1}}$

3. $\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots}}} = \sqrt[n-1]{x}$

- $\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\ldots}}} = \sqrt[5-1]{x} = \sqrt[4]{x}$

4. $\sqrt[m]{x^a \div \sqrt[n]{x^b \div \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{(an-b)p+c}}$

- $\sqrt[4]{x^3 \div \sqrt{x \div \sqrt[3]{x}}} = \sqrt[4.2.3]{x^{(3.2-1)3+1}} = \sqrt[24]{x^{16}}$

5. $\underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \ldots \div \sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m"radicales}} = \begin{cases} \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m+1}{n+1}}} & ; \text{Si: m es impar} \\ \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n+1}}} & ; \text{Si: m es par} \end{cases}$

- $\underbrace{\sqrt[3]{x \div \sqrt[3]{x \div \sqrt[3]{x \div \ldots \div \sqrt[3]{x}}}}}_{\text{2006radicales}} = \sqrt[3^{2006}]{x^{\frac{3^{2006}-1}{3+1}}} = \sqrt[3^{2006}]{x^{\frac{3^{2006}-1}{4}}}$

6. $\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \ldots}}} = \sqrt[n+1]{x}$

- $\sqrt[3]{x \div \sqrt[3]{x \div \sqrt[3]{x \div \ldots}}} = \sqrt[3+1]{x} = \sqrt[4]{x}$

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES TRASCENDENTES

DEFINICIÓN

Se denomina ecuación trascendente a toda igualdad condicional que presenta a su incógnita:

- Formando parte de algún exponente

$$5^{x+1} = 125 \; ; \; 2^{3^x - 1} = 16$$

team CALAPENSHKO

- Como base y exponente a la vez

$$2^x - x = 5 \;;\; x^x = 3$$

- Afectada por algún operador

$$\log x^2 - x = 1 \;;\; \cos(2x) = 0{,}5$$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Es la ecuación trascendente que presenta a su incógnita formando parte de algún exponente, veamos algunos ejemplos:

- $5^{x^2-1} = 25$
- $\sqrt{7}^{x+1} = 49^{1-x}$
- $3^x = 81$
- $3^x + 4^x = 5^x$

TEOREMA

$\forall\, a > 0 \wedge a \neq 1$

$$\text{si: } a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

- $7^{x-1} = 7^{5-x} \rightarrow x - 1 = 5 - x$

  $2x = 6$

  $\therefore\ x = 3$

- $\sqrt{2}^x = 2 \rightarrow \dfrac{x}{2} = 1$

  $\therefore\ x = 2$

PROPIEDAD

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\text{Si: } a^x = b^x \Rightarrow x = 0$$

- $5^{x-9} = 7^{x-9} \rightarrow x - 9 = 0$

  $x = 9$

- $\pi^{x+1} = \sqrt{3}^{x+1} \rightarrow x + 1 = 0$

  $x = -1$

OBSERVACIÓN

Para resolver algunas ecuaciones trascendentes a veces es necesario recurrir al proceso de comparación comúnmente llamado método de analogía, el cual consiste en dar forma a una parte de la igualdad tomando como modelo la otra, veamos un ejemplo:

- $x^{x^3} = 3 \Rightarrow x^{x^3} = {}^3\sqrt{3}^{{}^3\sqrt{3}^3} \quad \therefore\ x = {}^3\sqrt{3}$

Sin embargo debemos indicar que el método de analogía sólo nos brinda una solución pudiendo haber otras, sino veamos el siguiente ejemplo:

En ${}^x\sqrt{x} = \sqrt{2}$ se observa que $x = 2$ pero $\sqrt{2} <> {}^4\sqrt{4}$, con lo cual tenemos ${}^x\sqrt{x} = {}^4\sqrt{4}$ de donde $x = 4$.

twitter.com/calapenshko

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Marcar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

A) $x^2.x^4.x^8 = x^{14}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .....( )

B) $(x^{-2})^{-3} = x^6$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .....( )

C) $\frac{x^5}{x^2} = x^3$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .....( )

D) $\sqrt{x^2} = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .....( )

E) $\sqrt[5]{x^5} = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .....( )

2. Mostrar el equivalente en cada caso:

A) $2^0 - 0^3 + 1^0$

B) $3^1 + 1^4 - 4^0$

C) $2^{3^0} - 0^{2^3} + 3^{0^2}$

D) $5^{1^4} + 1^{4^3} - 4^{5^1}$

E) $7^8 - 49^4 + 7^2$

3. Reducir en cada caso:

A) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}$

B) $1^{-1} + 2^{-2} + 3^{-3}$

C) $4^{-2^{-1}} + 27^{-3^{-1}} + 16^{-4^{-1}}$

D) $5^{-2^0} - 2^{-3^0} + 10^{-4^0}$

E) $8^{-3^{-1}} + 81^{-4^{-1}} + 36^{-2^{-1}}$

4. Si $x > 1$; colocar en el recuadro el signo de relación ($>$; $<$; $=$) que corresponda

A) $2x$ ☐ $3x$

B) x^2 ☐ x^3

C) $\sqrt[5]{x}$ ☐ $\sqrt{x}$

D) $\frac{x}{3}$ ☐ $\frac{x}{2}$

E) $2x^3$ ☐ $3x^2$

5. Simplificar en cada caso

A) $\frac{x^2.x^4.x^6.....x^{20}}{x.x^3.x^5.....x^{19}}$; $x>1$

B) $\frac{x^3.x^3.x^3..... 20\text{veces}}{x^2.x^2.x^2..... 30\text{veces}}$; $x<1$

C) $\frac{x^2+x^2+x^2+..... 16\text{ veces}}{(2\sqrt{x}).(2\sqrt{x}).(2\sqrt{x}).(2\sqrt{x})}$; $x>2$

D) $\frac{\sqrt{x.x.x.....40\text{veces}}}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x}..... 20\text{veces}}$; $x>1$

E) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}.\sqrt[3]{\sqrt{x}}.\sqrt[3]{\sqrt{x}}.....60\text{ veces}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}}.\sqrt[5]{\sqrt{x}}.\sqrt[5]{\sqrt{x}}..... 100\text{ veces}}$; $x>2$

6. Proporcionar el equivalente en cada caso:

A) $\frac{2^{x+1}-2^x}{2^x}$; $x \in \mathbb{R}^+$

B) $\frac{5^{x+3}-5^{x+2}+5^{x+1}}{5^x}$; $x \in \mathbb{R}^-$

C) $\frac{3^{x+7}-3^{x+6}+3^{x+5}}{3^{x+6}-3^{x+5}}$; $x \in \mathbb{R}$

D) $\sqrt[x]{\frac{2^x+1}{2^{-x}+1}} + \sqrt[x]{\frac{3^{-x}+1}{3^x+1}}$; $x \in \mathbb{R}^+$

E) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{27}}} - \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}$

7. Calcular x en cada caso:

A) $2^{x-7} = 2^{3x-10}$

B) $9^{x-1} = 27^{x+1}$

C) $\sqrt{2}^{x+2} = \sqrt[3]{4}^{1-x}$

D) $25^{x+1} = 125^{2-x}$

E) $7^{x-4} = 5^{x-4}$

F) $x^x = 256$

G) $x^{x^2} = 2$

H) $\sqrt[5]{x} = \sqrt{0,5}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Reducir:

$$L = 4^{-2^{-1}} + 9^{-2^{-1}} + 36^{-2^{-1}}$$

Resolución: Teniendo en cuenta las definiciones procedemos del modo siguiente:

$$L = 4^{-\frac{1}{2}} + 9^{-\frac{1}{2}} + 36^{-\frac{1}{2}}$$

$$L = \sqrt{4}^{-1} + \sqrt{9}^{-1} + \sqrt{36}^{-1}$$

$$L = 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1}$$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$L = \frac{3+2+1}{6}$$

$$L = \frac{6}{6}$$

$$\therefore \; L = 1$$

PROBLEMA 2 Mostrar el equivalente simplificado de la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x} \ldots\ldots\ldots \text{90 factores}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}.\sqrt[4]{x}.\sqrt[4]{x} \ldots\ldots \text{160 factores}}}; \; x \in \mathbb{R}^+$$

Resolución: Si "K" es el equivalente, por definición tenemos:

$$K = \frac{\sqrt[3]{x^{90}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x^{160}}}}$$

$$K = \frac{\sqrt[3]{x^{90}}}{\sqrt{x^{40}}}$$

$$K = \frac{x^{30}}{x^{20}}$$

$$K = x^{30-20}$$

$$\therefore \; K = x^{10}$$

PROBLEMA 3 Calcular:

$$\frac{5^{x+4}-5^{x+3}+5^{x+2}}{5^{x+3}-5^{x+2}} \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Resolución: Sea "L" el equivalente.

Luego: $L = \dfrac{5^{x+4}-5^{x+3}+5^{x+2}}{5^{x+3}-5^{x+2}}$

Descomponiendo: $L = \dfrac{5^{x+2}.5^2-5^{x+2}.5^1+5^{x+2}}{5^{x+2}.5^1-5^{x+2}}$

Factorizando: $L = \dfrac{5^{x+2}(5^2-5^1+1)}{5^{x+2}(5^1-1)}$

Simplificando: $L = \dfrac{5^2-5^1+1}{5^1-1} = \dfrac{25-5+1}{5-1}$

$$\therefore \; L = \frac{21}{4}$$

PROBLEMA 4 Proporcionar el exponente final de x en F(x), donde:

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x^2}}}{x^{-3}}}$$

Resolución: Transformado a la expresión:

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^{-1}}}{x^2}}}{x^{-3}}}$$

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt{x^{-1}}}}{x^{-3}}}$$

$$F(x) = \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt{x^{-1}}}}$$

Aplicamos propiedad (1):

$$F(x) = \sqrt[4.3.2]{x^{(3.(3)-2).2-1}}$$

$$F(x) = \sqrt[24]{x^{(7).2-1}} = \sqrt[24]{x^{14-1}}$$

$$F(x) = \sqrt[24]{x^{13}} = x^{\frac{13}{24}}$$

$$\therefore \text{ Exponente de } x = \frac{13}{24}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 5 Calcular:

$$\frac{\sqrt[a-b]{4^a}+\sqrt[a-b]{4^b}}{\sqrt[a-b]{2^{a+b}}}$$

Resolución: Si "K" es el equivalente de la expresión mostrada, se tendrá:

$$K=\frac{\sqrt[a-b]{2^{2a}}+\sqrt[a-b]{2^{2b}}}{\sqrt[a-b]{2^{a+b}}}$$

Descomponiendo en fracciones homogéneas:

$$K=\frac{\sqrt[a-b]{2^{2a}}}{\sqrt[a-b]{2^{a+b}}}+\frac{\sqrt[a-b]{2^{2b}}}{\sqrt[a-b]{2^{a+b}}}$$

$$K=\sqrt[a-b]{2^{2a-a-b}}+\frac{1}{\sqrt[a-b]{2^{a+b-2b}}}$$

$$K=\sqrt[a-b]{2^{a-b}}+\frac{1}{\sqrt[a-b]{2^{a-b}}}$$

$$K=2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad K=\frac{5}{2}$$

PROBLEMA 6 Calcular:

$$P=\frac{21^6.35^3.80^3}{15^4.14^9.30^2}$$

Resolución: Descomponiendo cada base en función de números primos.

$$P=\frac{(7.3)^6.(7.5)^3.(2^4.5)^3}{(5.3)^4.(7.2)^9.(3.2.5)^2}$$

Por teoremas:

$$P=\frac{7^6.3^6.7^3.5^3.2^{12}.5^3}{5^4.3^4.7^9.2^9.3^2.2^2.5^2}$$

$$P=\frac{7^{6+3}.3^6.5^{3+3}.2^{12}}{5^{4+2}.3^{4+2}.7^9.2^{9+2}}$$

Simplificando:

$$P=\frac{7^9.3^6.5^6.2^{12}}{5^6.3^6.7^9.2^{11}}$$

$$P=\frac{2^{12}}{2^{11}}=2^{12-11}$$

$$P=2^1$$

$$\therefore \quad P=2$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

PROBLEMA 7 Calcular:

$$K=\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\sqrt{5}^{\sqrt{5}\sqrt{5}^{\sqrt{5}}+\sqrt{5}}}}$$

Resolución: Teniendo en cuenta:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a}^m \;;\; a>0$$

La expresión dada es:

$$K=\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\sqrt{5}^{\sqrt{5}\sqrt{5}^{\sqrt{5}}+\sqrt{5}}}}$$

Por teoremas tenemos:

$$K=\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}^{\sqrt{5}}}\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}\sqrt{5}}+\sqrt{5}}}}$$

$$K=\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}\sqrt{5}}+\sqrt{5}}\sqrt{5^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}\sqrt{5}}+\sqrt{5}}}}$$

$$\therefore\quad K=5$$

PROBLEMA 8 Determine el equivalente de:

$$\frac{\sqrt[5]{x^4\sqrt[5]{x^4\sqrt[5]{x^4\cdots\cdots}}}}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^3+\sqrt{x^3+\cdots}}}+\sqrt[6]{x^7+\sqrt[6]{x^7+\sqrt[6]{x^7+\cdots}}}}\;;\; x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$$

Resolución: Si "K" es el equivalente de la expresión, por propiedades se tendrá:

$$K=\frac{\sqrt[5-1]{x^4}}{\sqrt[2+1]{x^3}+\sqrt[6+1]{x^7}}$$

$$K=\frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[7]{x^7}}$$

$$K=\frac{x}{x+x}$$

$$K=\frac{x}{2x}$$

$$\therefore\quad K=\frac{1}{2}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Calcular x en:

$$\sqrt{2}^{x-1}.4^{x}=8^{2-x}$$

Resolución: Expresando en base 2, tenemos:

$$\sqrt{2}^{x-1}.(2^2)^{x}=(2^3)^{2-x}$$

$$2^{\frac{x-1}{2}}.2^{2x}=2^{6-3x}$$

$$2^{\frac{x-1}{2}+2x}=2^{6-3x}$$

Por teorema: $\frac{x-1}{2}+2x=6-3x$

$$\frac{x-1+4x}{2}=6-3x$$

$$5x-1=12-6x$$

$$11x=13$$

$$\therefore\ x=\frac{13}{11}$$

PROBLEMA 10 Si $x\in\mathbb{R}^{+}$, calcular "n" en:

$$\underbrace{\sqrt[5]{x^3\sqrt[5]{x^3\sqrt[5]{x^3\ .....\sqrt[5]{x^3}}}}}_{\text{"n" Radicales}}=\sqrt[5^n]{x^{468}}$$

Resolución: Por propiedad, se tendrá:

$$\left(\sqrt[5^n]{x^3}\right)^{\frac{5^n-1}{5-1}}=\sqrt[5^n]{x^{468}}$$

$$\sqrt[5^n]{x^{3\left(\frac{5^n-1}{4}\right)}}=\sqrt[5^n]{x^{468}}$$

Por teorema: $3\left(\frac{5^n-1}{4}\right)=468$

$$\frac{5^n-1}{4}=156$$

$$5^n-1=624$$

$$5^n=625$$

$$5^n=5^4$$

$$\therefore\ n=4$$

PROBLEMA 11 Calcular x en:

$$x^{x^3} = \sqrt[3]{4}$$

Resolución: Elevando a ambos miembros al cubo, se tendrá:

$$\left(x^{x^3}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3$$

$$(x^3)^{(x^3)} = 4 = 2^2$$

Por comparación: $x^3 = 2$

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{2}$

PROBLEMA 12 Calcular x en:

$$x^x = \sqrt[4]{2}^{-1}$$

Resolución: La ecuación dada se puede representar así:

$$x^x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$x^x = \sqrt[4]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}} = \sqrt[16]{\frac{1}{16}}$$

$$x^x = \left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)}$$

$\therefore \quad x = \dfrac{1}{16}$

PROBLEMA 13 Si x_0 es la solución de la ecuación :

$$4^{x+2} - 5(4^x) = 99$$

Determine el valor de : $\sqrt{32^x - 143}$

Resolución: La ecuación dada es:

$$4^{x+2} - 5 \,.\, 4^x = 99$$

$$4^x \,.\, 4^2 - 5 \,.\, 4^x = 99$$

Factorizando tenemos:

$$4^x \,.\, (16 - 5) = 99$$

$$4^x \,.\, 11 = 99 \rightarrow 4^x = 9$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\sqrt{4^x} = \sqrt{9} \quad \rightarrow \quad 2^x = 3$$

team CALAPENSHKO

En la expresión solicitada:

$$K = \sqrt{(2^x)^5 - 143}$$
$$K = \sqrt{(3)^5 - 143}$$
$$K = \sqrt{243 - 143}$$
$$K = \sqrt{100}$$
$$\therefore \quad K = 10$$

PROBLEMA 14 Simplificar:

$$\frac{x^{n+3}.x^{n+3}.x^{n+3}.....(n+5)\text{veces}}{x^{n+7}.x^{n+7}.x^{n+7}.....(n+1)\text{ veces}}; \; n \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Resolución: Si "E" es el equivalente, de acuerdo con la definición del exponente natural se tendrá:

$$E = \frac{(x^{n+3})^{n+5}}{(x^{n+7})^{n+1}} = \frac{x^{(n+3)(n+5)}}{x^{(n+7)(n+1)}}$$
$$E = \frac{x^{n^2+8n+15}}{x^{n^2+8n+7}} = x^{n^2+8n+15-n^2-8n-7}$$
$$E = x^{15-7}$$
$$\therefore E = x^8$$

PROBLEMA 15 Efectuar:

$$K = \left\{\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2^{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}} + \sqrt{8}\right\}^{-1}.\sqrt[4]{4}$$

Resolución: La expresión dada es:

$$K = \left\{\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2^2} + \sqrt{8}\right\}^{-1}.\sqrt[4]{2^2}$$
$$K = \left\{\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{2} + \sqrt{8}\right\}^{-1}.\sqrt{2}$$
$$K = \left\{\sqrt[4]{2^2} + 2\sqrt{2}\right\}^{-1}.\sqrt{2}$$
$$K = \left\{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right\}^{-1}.\sqrt{2}$$
$$K = \left\{3\sqrt{2}\right\}^{-1}.\sqrt{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.\sqrt{2}$$
$$\therefore \quad K = \frac{1}{3}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 16 Si: $2^x = 3^y$. Simplificar:

$$E = \frac{2^{x+3} + 3^{y+2}}{2^{x+2} - 3^{y+1}}$$

Resolución: La expresión propuesta es:

$$E = \frac{2^x.2^3 + 3^y.3^2}{2^x.2^2 - 3^y.3^1}$$

Reemplazando el dato:

$$E = \frac{2^x.8 + 2^x.9}{2^x.4 - 2^x.3}$$

$$E = \frac{2^x(8+9)}{2^x(4-3)} = \frac{8+9}{4-3}$$

$$\therefore E = 17$$

PROBLEMA 17 Calcular x en:

$$\sqrt{7}^{8^{x+4}} = 49^{4^{1-x}}$$

Resolución: En función de la base siete:

$$7^{\frac{8^{x+4}}{2}} = 7^{2.4^{1-x}}$$

Por teorema tenemos:

$$\frac{8^{x+4}}{2} = 2.4^{1-x}$$

$$8^{x+4} = 4.4^{1-x}$$

En función de la base dos:

$$(2^3)^{x+4} = 2^2.2^{2(1-x)}$$

$$2^{3x+12} = 2^{2+2-2x}$$

$$2^{3x+12} = 2^{4-2x}$$

Por teorema tenemos:

$$3x + 12 = 4 - 2x$$

$$5x = -8$$

$$\therefore x = -\frac{8}{5}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Determine un valor de x en:

$$x^{6x^{6x^{18}}} = 3$$

Resolución: La ecuación propuesta es:

$$x^{6x^{6x^{6.3}}} = 3$$

$$(x^6)^{(x^6)^{(x^6)^3}} = 3$$

Dando forma al segundo miembro:

$$(x^6)^{(x^6)^{(x^6)^3}} = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3}}$$

Por comparación tenemos:

$$x^6 = \sqrt[3]{3}$$

$$\therefore x = \sqrt[18]{3}$$

PROBLEMA 19 Reducir:

$$M = \sqrt[3n+2]{\frac{3^{9n+1}.756}{9(27)^{2n+1} + 9^{3n+1}}}$$

Resolución: Expresemos el radicando en función de base tres :

$$M = \sqrt[3n+2]{\frac{3^{9n+1}.3^3.28}{3^2(3^3)^{2n+1} + (3^2)^{3n+1}}}$$

Luego:

$$M = \sqrt[3n+2]{\frac{3^{9n+4}.28}{3^{6n+5} + 3^{6n+2}}}$$

$$M = \sqrt[3n+2]{\frac{3^{9n+4}.28}{3^{6n+2}(3^3+1)}}$$

$$M = \sqrt[3n+2]{3^{9n+4-(6n+2)}} = \sqrt[3n+2]{3^{3n+2}}$$

Finalmente:

$$\therefore M = 3$$

PROBLEMA 20 Resolver:

$$8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$$

para luego indicar el valor de:

$$K = (x+1)^{(x-1)}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Transponiendo términos:

$$8 + 2^{3-x} = x + x.2^x$$

Utilizando leyes de exponentes:

$$\frac{8}{2^x}(2^x + 1) = x(2^x + 1)$$

$$8 = x.2^x$$

Dando forma:

$$2.2^2 = x.2^x$$

Por analogía:

$$x = 2$$

Finalmente reemplazando en K:

$$K = (2+1)^{(2-1)}$$

$$\therefore K = 3$$

PROBLEMA 21 Reducir la siguiente expresión:

$$E = \left[\sqrt[n]{n^{\sqrt[n]{n}}\sqrt{n^{\sqrt[n]{n}}}}\right]^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{-n+1}+n-1}}$$

Resolución: Recordar:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[m.n.p]{A}$$

$$E = \left[\sqrt[n.n^{\sqrt[n]{n}}.n]{n^{\sqrt[n]{n}}}\right]^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{n}\sqrt[n]{n}+n-1}}$$

Efectuando:

$$E = \left[\sqrt[n.n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{n}^{n.\sqrt[n]{n}+n-1}}$$

$$E = \left[\sqrt[n.n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{\sqrt[n]{n}^{n}\left(\sqrt[n]{n}+1\right)}$$

$$E = \left[\sqrt[n.n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{n^{\sqrt[n]{n}+1}}$$

Luego:

$$\therefore E = \sqrt[n]{n}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 22 Simplificar:

$$K=\left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{(ab)^{-1}}\,x^{(bc)^{-1}}\,x^{(ac)^{-1}}}}{\sqrt[a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}]{x^{ab}\,x^{bc}\,x^{ac}}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Resolución: Aplicando leyes de exponentes en el cociente:

$$K=\left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}}}{\sqrt[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}]{x^{ab+bc+ac}}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

twitter.com/calapenshko

$$K=\left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{\frac{a+b+c}{abc}}}}{\sqrt[\frac{ab+bc+ac}{abc}]{x^{ab+bc+ac}}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Efectuando operaciones de cancelación:

$$K=\left[\frac{x^{\frac{1}{abc}}}{x^{abc}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}=\left[x^{\frac{1-(abc)^2}{abc}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Recordar: $M^2-N^2=(M+N)(M-N)$

$$K=\left[x^{\frac{(1-abc)(1+abc)}{abc}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Luego: $\therefore\ K=x^{1+abc}$

PROBLEMA 23 Simplificar:

$$M=\sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x^2}}}\cdot\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x^2}}}}$$

Resolución: Recordar: $\sqrt[m]{A^p\sqrt[q]{B^q}}=\sqrt[mn]{B^q\cdot(A^p)^n}$

En el problema:

$$M=\sqrt[\sqrt[x]{x}\,\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x^2}}}\cdot\left[\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x^2}}}\right]^{\sqrt[x]{x}}}$$

$$M = \sqrt[\sqrt[3]{x}]{x^2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}\sqrt{x^{2\sqrt[3]{x^2}}.x^{2\sqrt[3]{x^2}}.\sqrt[3]{x}}}}$$

$$M = \sqrt[\cancel{\sqrt[3]{x^2}}\,(1+\sqrt[3]{x})]{x^{2\cancel{\sqrt[3]{x^2}}\,(1+\sqrt[3]{x})}}$$

Finalmente: $\therefore M = x^2$

PROBLEMA 24 Proporcionar el valor más simple de:

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{(x^n)^{(n+1)^2} + x^{(n+1)^3}}{\left[x^{\frac{(n+1)^2}{2}}\right]^n + x^{\frac{(n+1)^2(n+2)}{2}}}}$$

Resolución: Haciendo arreglos en el radicando:

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{\left[x^{(n+1)^2}\right]^n + \left[x^{(n+1)^2}\right]^{(n+1)}}{\left[x^{(n+1)^2}\right]^{\frac{n}{2}} + \left[x^{(n+1)^2}\right]^{\frac{(n+2)}{2}}}}$$

Hagamos: $x^{(n+1)^2} = b$; (Por comodidad)

Luego: $$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{b^n + b^{n+1}}{b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}+1}}} = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{b^n\cancel{(1+b)}}{b^{\frac{n}{2}}\cancel{(1+b)}}}$$

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{b^{n-\frac{n}{2}}} = \sqrt[\frac{n}{2}]{b^{\frac{n}{2}}} = b$$

Finalmente: $\therefore K = x^{(n+1)^2}$

PROBLEMA 25 Simplifiquese:

$$E = \sqrt[2n]{\left[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}+1}\sqrt{\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}}}\right)^{\sqrt{x}}}}{\underbrace{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.....\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}_{(24n+1)\text{ Radicales}}}\right]^{-1}} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Efectuando en el radicando:

$$E = \sqrt[2n]{\left[\frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{\cancel{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.....\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}\right]^{-1}}$$

Recordar: $\boxed{A^{-m} = \left(\frac{1}{A}\right)^{m} = \frac{1}{A^{m}}}$

En el problema:

$$E = \sqrt[2n]{\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.....\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

Al efectuar la cancelación de "$\sqrt{x}$" en el radicando quedarán 24n radicales; de los cuales 12n serán: $\sqrt{x}$ y 12n serán $\sqrt[3]{y}$ por ser: 24n un número par.

Luego:

$$E = \sqrt[2n]{\overbrace{\sqrt{x}\sqrt{x}.....\sqrt{x}}^{\text{12n Radicales}}.\overbrace{\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{y}.....\sqrt[3]{y}}^{\text{12n Radicales}}}$$

$$E = \sqrt[2n]{\sqrt{x}^{12n}.\sqrt[3]{y}^{12n}} = \sqrt[2n]{x^{6n}}.\sqrt[2n]{y^{4n}}$$

Finalmente: $\therefore E = x^3y^2$

PROBLEMA 26 Siendo; $\frac{1}{a}$ solución de:

$$4^x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2^{2x}} = 0$$

Indicar el equivalente de:

$$K = \sqrt{2^{a+2}}$$

Resolución: La ecuación es: $2^{2x} + \frac{5}{2} - \frac{9}{2^{2x}} = 0$ ..... (I)

Hagamos que: $2^{2x} = m; \quad m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En(I):

$$m + \frac{5}{2} - \frac{9}{m} = 0$$

$$2m^2+5m+18=0$$

$$2m \quad 9 \rightarrow m=-\frac{9}{2} \quad \text{¡no!}$$

$$m \quad -2 \rightarrow m=2 \quad \text{¡sí!}$$

Luego:

$$2^{2x}=2$$
$$2x=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Del dato:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2$$

Finalmente:

$$\therefore K=4$$

PROBLEMA 27 Luego de reducir:

$$M=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^4}}}} \quad \text{.....“n” radicales}$$

Indicar el exponente final de “x”

Resolución: Hagamos : $\boxed{M=x^E}$

Calculo de “E”:

Usando leyes de exponentes tenemos:

$$E=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{4}{2.3.4.5}+.....+\frac{n}{2.3.....(n+1)}$$

Descomponiendo cada fracción convenientemente:

$$E=\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}\right]+\left[\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right]+...+\left[\frac{1}{2.3.....n}-\frac{1}{2.3.....(n+1)}\right]$$

$$E=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2.3}}+\cancel{\frac{1}{2.3}}-\cancel{\frac{1}{2.3.4}}+.....+\cancel{\frac{1}{2.3.....n}}-\frac{1}{2.3.....(n+1)}$$

Simplificando : $E=1-\frac{1}{2.3.....(n+1)}$

Finalmente : $\therefore E=1-\boxed{\frac{1}{n+1}}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 28 Proporcionar el valor más simple de:

$$K = \left[\sqrt{\sqrt[5]{x}}\right].\left[\sqrt[5]{\sqrt[8]{x}}\right].\left[\sqrt[8]{\sqrt[11]{x}}\right]....$$

Resolución: Efectuando convenientemente:

$$K = x^{\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\frac{1}{11.14}+...} = x^{E}$$

en el exponente:

$$E = \frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{11.14}+.....$$

Recordar:

$$\boxed{\frac{a-b}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \quad ..... (1)$$

En el problema:

$$E = \frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{11.14}+.....$$

Multiplicando por: "3"(para descomponer con 1)

$$3E = \frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{11.14}+.....$$

$$3E = \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]+\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right]+\left[\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right].....$$

Se observa que a partir del segundo sumando incluyendo a este se cancela dos a dos. Luego:

$$3E = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{6}$$

Finalmente:

$$\therefore K = \sqrt[6]{x}$$

PROBLEMA 29 Determine el exponente final de x en F(x), donde :

$$F(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{x^{-4}}}}{x^{-3}}}}{x^{-2}}}}{x^{-1}}} \quad ; \; x \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$$

Resolución: Teniendo en cuenta a la resolución del problema 4, la expresión dada puede reescribirse así:

$$F(x) = \sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3\sqrt{x^4\ldots}}}}$$

Por teoremas tenemos:

$$F(x) = \sqrt{x}\,.\,\sqrt{\sqrt{x^2}}\,.\,\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}\,.\,\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4}}}}\ \ldots$$

$$F(x) = \sqrt{x}\,.\,\sqrt[2^2]{x^2}\,.\,\sqrt[2^3]{x^3}\,.\,\sqrt[2^4]{x^4}\ \ldots$$

$$F(x) = x^{\frac{1}{2}}\,.\,x^{\frac{2}{2^2}}\,.\,x^{\frac{3}{2^3}}\,.\,x^{\frac{4}{2^4}}\ \ldots$$

$$F(x) = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots}$$

Sea "E" el exponente, luego:

$$E = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Multiplicando por 2 obtenemos:

$$2E = 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Restando (1) de (2) tenemos:

$$2E - E = 1+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots$$

$$E = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

$$E = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$$

Finalmente por suma límite:

$$E = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad E = 2$$

OBSERVACIÓN

$\forall\,|x|<1$, tenemos la suma límite:

twitter.com/calapenshko

$$1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots = \frac{1}{1-x}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Calcular x en:

$$\sqrt[5]{x}^{\,2+\sqrt[5]{x}^{\,2+\sqrt[5]{x}^{\,2+\cdots}}} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\cdots}}}$$

Resolución: Consideremos: $m = \sqrt[5]{x}^{\,2+\sqrt[5]{x}^{\,2+\cdots}} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\cdots}}$

Para el primer miembro: $\sqrt[5]{x}^{\,2+m} = m$

$$\sqrt[5]{x} = \sqrt[2+m]{m}$$

$$x = \sqrt[2+m]{m^5} \quad \text{.....(1)}$$

Para el segundo miembro: $\sqrt{x}^{\,m} = m$

$$\sqrt{x} = \sqrt[m]{m}$$

$$x = \sqrt[m]{m^2} \quad \text{.....(2)}$$

Igualando (1) y (2) tenemos:

$$\sqrt[2+m]{m^5} = \sqrt[m]{m^2}$$

$$m^{\frac{5}{m+2}} = m^{\frac{2}{m}}$$

Por teorema se debe cumplir:

$$\frac{5}{m+2} = \frac{2}{m} \leftrightarrow 5m = 2m + 4$$

$$3m = 4 \rightarrow m = \frac{4}{3} \quad \text{.....(3)}$$

Finalmente reemplazando (3) en (2):

$$x = \sqrt[\frac{4}{3}]{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{4}{3}}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{64}{27}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Efectúe:

$$3^2 + (1-\sqrt{2})^0 + 2^{-1}$$

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{21}{2}$ C) $\frac{21}{3}$
D) 1 E) 6

2. Simplifique:

$$\frac{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}\,.....(8\text{ factores})}{\sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[3]{x}\,.....(12\text{ factores})}$$

A) 1 B) x C) x^{-1}
D) x^2 E) x^{-2}

3. Simplificar:

$$P = \frac{3^{x+4} - 3^x}{3^{x+3}}$$

A) $\frac{80}{27}$ B) -3^{x+2} C) $\frac{50}{27}$
D) 3^{x+1} E) 3^{x-1}

4. Reducir:

$$W = 2\,.\,\sqrt[n]{2^{n-4}}\,.\,\sqrt[n]{4^{n+2}}$$

A) 16 B) 8 C) 64
D) 4 E) 2

5. Calcular x:

$$8^{x^4} = 4^{24}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

6. Reducir:

$$W = \sqrt[n]{\frac{a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n}{a^{-n} + b^{-n} + c^{-n}}}$$

A) 1 B) abc C) $\frac{1}{abc}$
D) n E) $\frac{n}{abc}$

7. Simplificar:

$$W = 2008^0 + (2007^{2006})^0 - 2005^0$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

8. Calcular "x"

$$9^{x+2} = 9^x + 240$$

A) 2 B) –2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) 1

9. Simplificar:

$$F = \left(\frac{1}{a^{(m^2+1)}}\right)^{m^2+1} - \left(\frac{m^2}{a^{(m^2-1)}}\right)^{1-\frac{1}{m^2}} + \sqrt[x]{a^{-x}}$$

A) a B) a^{-1} C) a^2
D) $2a^2$ E) 3a

10. Hallar el valor reducido de:

$$P = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - 6^{-1} + (6)^{-3}\right]^{-2}}$$

A) 1 B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{5}$
D) $\frac{25}{36}$ E) $\frac{36}{25}$

11. Resolver:

$$27^{9^{x-3}} = \sqrt[3]{3}$$

A) 2 B) 4 C) –2
D) –4 E) –3

team CALAPENSHKO

12. Calcular x:

$$3^{3^{x-3}} = 27^{9^{x+2}}$$

A) 8 B) 6 C) –8
D) –6 E) –10

13. Calcular "x"

$$\sqrt[7]{\frac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2}} = 5$$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

14. Simplificar:

$$P = \frac{b.\sqrt[a-b]{a^{2a}} + a.\sqrt[a-b]{a^{2b}}}{\sqrt[a-b]{a^{a+b}}}$$

A) ab + 1 B) ab – 1 C) a + b
D) a – b E) 1

15. A partir de: $mn = n^n = 16$

Calcular: $W = \sqrt[m]{n}$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) 2 C) 4
D) $\sqrt[8]{2}$ E) $\sqrt{2}$

16. Calcular "b" del sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[a]{a+b} = 6 \\ (a+b).3^a = 5832 \end{cases}$$

A) 123 B) 213 C) 125
D) 312 E) 36

17. Despejar "x" en:

$$(ax)^x = a^{a^a}$$

A) a^{a-1} B) a^{a+1} C) a
D) a^a E) $\sqrt[a]{a}$

18. Calcular "x"

$$32^{25^{x-1}} = \sqrt[5]{2}^{\sqrt[3]{5}^{x+3}}$$

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,8 E) 0,35

19. Si:

$$x^{x^{12}} = \sqrt[6]{2}$$

Calcular:

$$P = x^{24} + x^{12} + 1$$

A) 7 B) 9 C) 15
D) 12 E) 16

20. Determinar el exponente de x^x en

$$x^{x^x}$$

A) x B) x^{x+1} C) x^{x-1}
D) x^{x^x-1} E) x^{x-2}

21. Simplificar:

$$W = \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m^{-2n^{-n^{-1}}}}{(mn)^{-n^{-n^{-1}}}}}}$$

A) m B) n C) m/n
D) n/m E) 1

22. Para qué valor de "n" se verifica la igualdad:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}} = \sqrt[n+2]{x}$$

A) 4 B) 6 C) 2
D) 1 E) 5

23. Si se cumple:

$$\sqrt[x]{x^2} = \sqrt[4]{4}$$

Calcular:

$$E = \sqrt[x]{x}$$

A) 4 B) 2 C) $\sqrt[4]{2}$
D) 1/2 E) 1/4

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

24. Calcular "x"

$$128^{49^{1-x}} = \sqrt[7]{2}^{\sqrt[3]{7}^{1-x}}$$

A) 1,1 B) 2,2 C) 3,3
D) 4,4 E) 5,5

25. A partir de:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

Dar: "y"

A) $\sqrt[9]{3}$ B) $\sqrt[3]{9}$ C) $\sqrt[9]{9}$
D) $\sqrt[3]{3}$ E) 1/9

26. Determine "x" en:

$$x^{x^x} = 2^{-\sqrt{2}}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{16}$

27. Calcular "ab" si:

$$\frac{(a^b)^{a+c}.(b^a)^{b-c}}{(b^a.a^{-b})^{-c}} = 4$$

A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ B) 4 C) $\frac{1}{4}$
D) 4^{-2} E) 16

28. Reducir:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\ \sqrt[3]{a^2\ \sqrt[3]{a^2 \ldots \sqrt[3]{a^2}}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots \sqrt[3]{\frac{1}{a}}}}}}$$

Sabiendo que en el numerador y denominador existen "n" radicales (n > 4)

A) $\sqrt[3]{a}$ B) $\sqrt[n]{a^2}$ C) a
D) $\sqrt[3n]{\sqrt{a}^{3^n-1}}$ E) a^{3-n}

29. Si se cumple que:

$$x^{x-2^x} = \frac{1}{2}$$

Hallar el valor de:

$$L = \sqrt[x^{2^x}]{x^{(2x)^x - x^{x+1}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ E) $\sqrt[2\sqrt{2}]{2}$

30. En la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2 \ldots \sqrt[3]{x^2}}}} = x^k$$

El miembro de la izquierda consta de "n" radicales. Si: $k = \frac{80}{3^n}$ y $x = \frac{n}{2}$

Calcular: (n + x)

A) 6 B) 3 C) 21
D) 8 E) 10

31. Hallar el exponente de "x" en:

$$M = \sqrt{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^{\frac{3}{3}}\sqrt{x^{\frac{4}{3}}\ldots}}}}$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) $\frac{5}{3}$

32. Indique x^{-1} en:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}}^{x^2} = x^{x-1}$$

A) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

team CALAPENSHKO

33. Hallar "x" de:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{(x-\sqrt{2})^2}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}$

34. Obtener el exponente final de "x"

$$\sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{x^{m-1}}}}{x^{m-1}}}}{x^{m-1}}}$$

Sabiendo que existen "t" radicales.

A) $m^t - 1$ B) $m^{-t} + 1$ C) $m^{-t} - 1$
D) $m^{t+1} - 1$ E) $m^{-t+1} - 1$

35. Resolver:

$$4x^{x+1} + 4x^x = 5\sqrt[4]{x}$$

Indicando: $(x+2)^x$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

36. Hallar "x": $(x > 0)$

$$\left[x^{1+x^{1+x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right]^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+x^{\frac{1}{2}+x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{5}$ C) $\sqrt[5]{4}$
D) 2 E) 8

37. Encontrar todas las parejas de enteros "a" y "b" tales que: $a > 1; b > 1$ verifican:

$$a^{b^2} = b^a$$

Indique: $a + b$

A) 12 B) 18 C) 26
D) 32 E) Hay dos correctas

38. Calcular el valor límite, sabiendo que:
$0 < x < 1$

$$\cdots \sqrt[x^4+1]{x^2+1\sqrt{x^2-1\sqrt{\cdots\left[\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]^{\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}} \cdots$$

(un número ilimitado de veces).

A) 0 B) 1 C) Infinito
D) Indefinido E) Indeterminado

39. Hallar el valor de:

$$E = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots\ldots\infty}}}$$

donde se tiene que:

$$6^{1-x} = 2^{1-x} - 3^{1-x}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

40. Si:

$$\begin{cases} \sqrt[b]{a} \cdot b^a = 1 & \ldots\ldots\ldots(1) \\ a^{ab-1} = \sqrt{b}^{\sqrt{b}} & \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$ab \neq 1$

Hallar:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - \sqrt{a+b}$$

A) 2 B) 1 C) 1/2
D) 1/4 E) $-1/2$

41. Simplificar:

$$\frac{\sqrt{x^{n+1}\sqrt[3]{x^{n+2}\sqrt[4]{x^{n+3}} \ldots \sqrt[n]{x^{2n-1}}}}}{\sqrt{x^n\sqrt[3]{x^n\sqrt[4]{x^{n+3}} \ldots \sqrt[n]{x^{n-1}}}}}$$

Nota: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$

A) $\sqrt[n!]{x}$ B) $\frac{1}{\sqrt[n!]{x}}$ C) $\frac{\sqrt[n!]{x}}{x}$
D) $\frac{x}{\sqrt[n!]{x}}$ E) x

team CALAPENSHKO

42. Respecto a la ecuación:

$$9^x + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$$

Indicar la proposición verdadera:

A) No tiene raíces reales.
B) Tiene dos raíces reales positivos.
C) Tiene raíces reales de signos opuestos
D) Tiene sólo una raíz real.
E) Tiene dos raíces reales negativas

43. Calcular:

$$\sqrt[3]{4x-1}$$

si "x" verifica:

$$(x+2)^{2x+3} = 2$$

A) 2 B) 3 C) –3
D) –2 E) $\frac{1}{4}$

44. Calcular: $x \cdot y^{-1}$ del sistema:

$$\begin{cases} (mx)^{\sqrt[m]{x}} = m^{m^{-1}\sqrt{m^{-1}}} & \ldots\ldots (1) \\ (\sqrt[m]{m}y)^{\sqrt[m]{y}} = m^{m^{-2}\sqrt{m^{-1}}} & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) $\sqrt[m]{m^{1-m}}$ B) $\sqrt[m]{m^{m+1}}$ C) $\sqrt[m]{m}$
D) $\sqrt[m]{m^2}$ E) m^{-1}

45. Si $x \neq 1$.

Calcular:

$$2\sqrt[x]{2}^{(\sqrt[x]{2}-1)^2}$$

a partir de:

$$2^{2^{\frac{1-x}{x}}} = \left(\sqrt[3^x]{3^x}\right)^3$$

A) 3 B) 4 C) 8
D) 9 E) 16

46. Proporcionar el exponente final de x en:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\vdots}{x^{-10}}}}{x^{-7}}}}{x^{-5}}}$$

A) 8 B) –8 C) 6
D) –6 E) 2

47. Si se cumple: $\sqrt[x]{y} \cdot \sqrt[y]{x} = 3^{-\sqrt{3}}$

proporcionar un valor de: $x^2 + 2y^2$

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

48. Calcular: $3 + 7x^{-x} + 11x^{-2x} + 15x^{-3x} + \ldots$

si se verifica:

$$(x+5)^x = 23x + 1 + \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots}}}$$

A) 32/9 B) 51/7 C) 53/7
D) 52/9 E) 61/9

49. Calcular:

$$7^{7^{-7^{-7^{x+\sqrt{7}}}}}$$

sabiendo que: $\sqrt[x]{x} = 4$

A) $\sqrt{7}$ B) $\frac{1}{7}$ C) 7
D) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ E) $\sqrt[7]{7}$

50. Determine el cociente de dividir las soluciones de la ecuación

$$4^{x^2+\frac{1}{2}} - 3^{x^2-\frac{1}{2}} = 3^{x^2+\frac{1}{2}}$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

team CALAPENSHKO

Capítulo 2

Expresiones Algebraicas El Polinomio

CAPACIDADES:

- Identificar y denotar expresiones algebraicas.
- Determinar el grado y el valor numérico de las expresiones algebraicas.
- Reconocer y clasificar a los polinomios.

FRANÇOIS VIÈTE

$$P(x) \equiv Ax^2 + Bx + C$$

FRANÇOIS VIÈTE (1 540 – 1 603), el llamado "matemático francés más importante del siglo XVI" fue también abogado, miembro del Parlamento y consejero particular del rey Enrique IV de Francia, pero dedicaba sus horas libres a las matemáticas. Se cuenta que descifró un código secreto español que contenía centenares de símbolos y que durante varios años Francia se aprovechó de ello en su guerra contra España, pero la contribución más importante de Viète fue probablemente haber utilizado "parámetros" por primera vez en la historia de las matemáticas.

La idea de los parámetros ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas: en geometría por ejemplo, un diagrama de triángulo ABC podía representar "todos" los triángulos pero en álgebra no se conocían esas generalizaciones. En álgebra se estudiaban sólo casos especiales, se resolvían ecuaciones con coeficientes específicos, pero no existía un modelo que representara "todas" las ecuaciones cuadráticas o "todas" las ecuaciones cúbicas.

Viète empezó a utilizar vocales para representar las incógnitas y consonantes para representar magnitudes o números dados o supuestamente conocidos (parámetros). Con esa idea, a partir de Viète, el álgebra pudo estudiar clases de ecuaciones y concentrarse en la estructura de los problemas y no en su forma particular.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se denomina así a la reunión de letras y números (variables y constantes) que se encuentran ligadas por las seis operaciones matemáticas elementales o alguna combinación de estas en un número limitado de veces. La representación simbólica que permite reconocer las variables de una expresión es llamada notación matemática.

- P(x) Es la expresión P de variable x: $P(x) \equiv 4x^3 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$

- F(x; y) Es la expresión F de variables x ∧ y: $F(x;y) \equiv x^4 - xy^{-1} + 5x + \sqrt{3}y - \frac{1}{x}$

OBSERVACIÓN

En una expresión algebraica ninguna variable podrá formar parte de algún exponente y/o índice de un signo radical, así pues las expresiones:

- $P(x) \equiv 2 + x^2 - 3^x$
- $F(x) \equiv \sqrt[x]{5} + 3 - x$

No son algebraicas, así mismo según la definición las expresiones:

- $Q(x) \equiv 1 + x + x^2 + \ldots$
- $R(x;y) \equiv x^2 - \log x + 3\cos(xy) - y$

También no son algebraicas a todas estas expresiones se les denomina expresiones trascendentes.

TÉRMINO ALGEBRAICO

Es aquella expresión algebraica en la cual no existen operaciones de adición y/o sustracción, veamos algunos ejemplos:

- $P(x) \equiv 5x^4$
- $F(x;y) \equiv x^{-2}y$

Todo término algebraico presenta tres partes: coeficiente, variables y exponentes.

- $M(x;y) \equiv \underbrace{-7}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{x^{4}\ y^{-2/3}}_{\text{variables}}$ ← exponentes

team CALAPENSHKO

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos términos que presentan las mismas variables y con respecto a la variable en común iguales exponentes.

- $M(x; y) \equiv 5x^4y^3 \wedge N(x; y) \equiv -2x^4y^3$

Son términos semejantes y se les representa así:

$$5x^4y^3 \sim -2x^4y^3$$

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

I. EXPRESIÓN ALGEBRAICA RACIONAL (E.A.R.)

Es aquella expresión donde sus variables se encuentran afectadas solo por exponentes enteros y se subdividen en:

1) **Enteras:** Si todas sus variables se encuentran en el numerador afectadas solo por exponentes naturales.

- $P(x) \equiv x^4 + \frac{1}{3}x^2 - x + 5$
- $F(x; y) \equiv 5x^7 - 4xy^4 - \sqrt{2}y$

2) **Fraccionarias:** Si al observar al menos una variable en el denominador, esta presenta exponente entero positivo.

- $P(x) \equiv x^5 - 2x^3 + \frac{1}{x} + 1$
- $F(x; y) \equiv \frac{2}{x-y} + \frac{x+1}{xy^2} - 2x + y$

II. EXPRESIÓN ALGEBRAICA IRRACIONAL (E.A.I.)

Es aquella expresión donde existe al menos una variable afectada de signo radical o exponente fraccionario.

- $P(x) \equiv x^4 - \sqrt[3]{x} + 7$
- $F(x; y) \equiv \sqrt[3]{4x} + \sqrt{xy} + \frac{1}{x} + 1$

team CALAPENSHKO

EL POLINOMIO

DEFINICIÓN

Se denomina así a toda expresión algebraica racional entera , algunos ejemplos son:

- $P(x) = x^7 - x^2 + x + 1$
- $F(x; y) = 5x^4 - xy^3 + 4y + 7$

FORMA GENERAL DE UN POLINOMIO EN VARIABLE X

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Donde: $a_0; a_1; a_2; ....$ y a_n son coeficientes

$[P]^\circ$ = Grado de $P = n \Leftrightarrow a_0 \neq 0 ; n \in \mathbb{Z}_0^+$

a_0 = Coeficiente Principal (CP)

a_n = Término Independiente de x (TI)

PROPIEDADES

1) La suma de los coeficientes del polinomio P(x) se obtiene reemplazando x por la unidad.

$$\sum \text{Coef de } P(x) = P(1)$$

2) El término independiente de x en el polinomio P(x) se obtiene reemplazando x por cero.

$$\text{T.I en } P(x) = P(0)$$

- Para $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$

  $\sum$ coef de $P(x) = 5(1)^4 - 3(1)^2 + 2 = 5 - 3 + 2 = 4$

  TI en $P(x) = 5(0)^4 - 3(0)^2 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$

OBSERVACIÓN

A todo polinomio se le podrá asignar un nombre particular, este nombre dependerá de la cantidad de términos que presente, así pues tenemos:

- $M(x) = 5x^2$ tiene un término, se llama Monomio
- $F(x) = 3x + 4$ tiene dos términos, se llama Binomio
- $P(x) = x^7 - x^4 + x$ tiene tres términos, se llama Trinomio

team CALAPENSHKO

POLINOMIO MÓNICO

Es aquel polinomio literal (grado = $n \geq 1$) de una sola variable y de coeficientes enteros cuyo coeficiente principal es la unidad

- $P(x) \equiv x^5 + 4x^3 + x + 5$ es mónico
- $F(x) \equiv 2x^7 + x^4 - x^3 - 1$ no es mónico

GRADO DE POLINOMIOS

Es la categoría que se asigna a una expresión algebraica teniendo en cuenta a los exponentes de sus variables.

Frecuentemente distinguimos dos clases de grado, los cuales son:

I. GRADO RELATIVO (G.R.): Cuando se considera a una variable en particular.

- En polinomios de un solo término (monomios) el grado relativo respecto de una variable es el exponente de la variable en mención.
- En polinomios de dos o más términos el grado relativo respecto de una variable es el mayor exponente que presenta la variable en mención en uno de sus términos.

II. GRADO ABSOLUTO (G.A.): Cuando se considera a todas las variables.

- En polinomios de un solo término (monomios) es la suma de todos los exponentes que presentan las variables.
- En polinomios de dos o más términos es el mayor grado absoluto de dichos términos.

Ejemplos: **i)** $M(x; y) \equiv 5x^4y^6$

Grado Relativo a $x = GR(x) = 4$

Grado Relativo a $y = GR(y) = 6$

Grado Absoluto de $M = GA(M) = 4 + 6 = 10$

ii) $P(x; y) \equiv \underbrace{3x^5y^3}_{t_1} - \underbrace{4x^7y^2}_{t_2}$

Grado Relativo a $x = GR(X) = 7$

Grado Relativo a $y = GR(y) = 3$

$GA(t_1) = 8$

$GA(t_2) = 9$ (mayor) $\rightarrow GA(P) = 9$

POLINOMIO CONSTANTE

Sea C una constante cualquiera, entonces a todo polinomio de la forma $P(x) = C$ se le denomina polinomio constante.

Si $C \neq 0 \rightarrow$ El polinomio es de grado cero

Si $C = 0 \rightarrow$ El grado del polinomio no esta definido

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es el número real que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión por números determinados, veamos algunos ejemplos:

- Para $P(x) = x^3 + x - 3$ ¿P(2)?
  P(2) es el valor numérico de P cuando x se reemplaza por 2, luego
  $P(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$

- Para $F(x; y) \equiv x^2 - y^3 + xy + 1$ ¿F(1; −1)?
  F(1; -1) es el valor numérico de F cuando $x = 1 \wedge y = -1$, luego:
  $F(1; -1) = (1)^2 - (-1)^3 + (1)(-1) + 1 = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$

CAMBIO DE VARIABLE

En toda expresión las variables podrán ser sustituidas por otras variables o alguna expresión, veamos algunos ejemplos:

- $P(x) \equiv 2x^2 - x + 1$ ¿P(y)?
  observar que: $x \rightarrow y$
  $P(y) \equiv 2y^2 - y + 1$

- $F(x) \equiv 3x + 4$ ¿F(x − 2)?
  observar que: $x \rightarrow x - 2$
  $F(x - 2) \equiv 3(x - 2) + 4 \equiv 3x - 2$

POLINOMIOS ESPECIALES

Son aquellos polinomios cuya estructura presenta alguna característica particular.

I. POLINOMIO HOMOGÉNEO:

Se dice que un polinomio en dos ó más variables es homogéneo si todos sus términos presentan el mismo grado absoluto, al cual se le denomina grado de homogeneidad.

- $P(x;y) \equiv x^3 + 5xy^2 - x^2y$ es homogéneo de grado 3 (grado de homogeneidad)

II. POLINOMIO ORDENADO:

Se dice que un polinomio es ordenado con respecto de una variable, si los exponentes de la variable denominada ordenatriz aumentan o disminuyen desde el primer término contando de izquierda a derecha.

- $P(x) \equiv x^7 + x^4 - x$ ordenado en forma decreciente

- $F(x) \equiv x^4 + x^{10} - x^{32}$ ordenado en forma creciente

- $M(x;y) \equiv x^7y + 2x^4y^3 + xy^5 - y^{10}$ ordenado en forma decreciente con respecto a x; ordenado en forma creciente con respecto a y.

team CALAPENSHKO

III. POLINOMIO COMPLETO EN X:

Se dice que un polinomio de coeficiente no nulos es completo, cuando la variable x aparece en todos sus términos con todos los exponente naturales que van desde el cero (para el término independiente) hasta el grado.

- $P(x) \equiv x^2 + x + 4$ es completo de 2do grado, tiene 3 términos.
- $F(x) \equiv x^2 + x - 4x^3 + 7$ es completo de 3er grado, tiene 4 términos.

PROPIEDAD:

En todo polinomio completo en x, se cumple:

$$\boxed{N^\circ \text{ de términos} = GA + 1}$$

IV. POLINOMIO PRIMITIVO:

Es aquel polinomio literal en función de una variable de coeficientes enteros, cuyo máximo común divisor de todos sus coeficientes es igual a la unidad.

- $F(x) \equiv 2x^2 - 3x^3 + 10$ está definido en $\mathbb{Z}$, como: MCD(2; -3; 10) = 1, entonces F(x) es un polinomio primitivo.

V. POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO:

Se dice que un polinomio es idénticamente nulo si todos los coeficientes son iguales a cero.

PROPIEDAD:

Si: $P(x) \equiv ax^3 + bx + c = 0$

es un polinomio idénticamente nulo se denota así: $ax^3 + bx + c \equiv 0$
y se cumple que: $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios de igual grado que se encuentran en función de la misma variable serán idénticos si asumen igual valor numérico para todo valor de su variable.

Ejemplo:

- $P(x) \equiv (x-1)^2 \wedge Q(x) \equiv x^2 - 2x + 1$
  son idénticos pues $P(a) = Q(a)$; $\forall\, a \in \mathbb{R}$

PROPIEDAD:

Si los polinomios:

$$P(x) \equiv ax^3 + bx + c \quad ; \quad Q(x) \equiv mx^3 + nx + q$$

son idénticos se les representa así: $ax^3 + bx + c \equiv mx^3 + nx + q$
y se cumple que: $a = m;\ b = n;\ c = q$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Colocar un visto (√) en cada recuadro que corresponde a una expresión algebraica.

A) $x^2 - xy + y - 4$ ☐

B) $3x^2 + x - \frac{1}{y} + 1$ ☐

C) $\sqrt{x} - 5xy + 2y - 2$ ☐

D) $1 + x + x^2 + ...$ ☐

E) $\log 2 - x + x^2$ ☐

2. Completa las filas del cuadro adjunto:

EXPRESIÓN	GR (X)	GR (Y)	GA
$5x^2y^4$			
$-3^7x^4y^6$			
$x^2 - xy^3 + x - y^2$			
$x^3y - x^2y^2 - xy^3$			
$2x^4 + xy^2 - x^2y^3 + 2$			

3. Calcular lo pedido en cada caso de términos semejantes

A) ¿m + n? : $2x^3y^m - 7x^ny^2$

B) ¿a.b? : $5x^{a-1}y^4 - -8x^3y^{b+1}$

C) $¿\frac{m}{n}?$: $x^2y^{m-2} - 5x^{n-1}y^4$

D) $¿a^2 - b?$: $10x^{a-b}y^{10} - -2x^4y^{a+b}$

E) $¿m^3 + n^2?$: $4x^{2m-1}y^{m-n} - x^3y$

4. Coloca un visto en cada recuadro que corresponde a un polinomio:

A) $x^3 - x^2 - 4x + 7$ ☐

B) $2x^3 - 4x^{-1} + 10$ ☐

C) $5x$ ☐

D) -10 ☐

E) $x - x^x + 4x^2 - 1$ ☐

5. Dadas las expresiones:

$P(x) = x+2$; $Q(x) = x^2+1$; $R(x) = x-1$

Calcular lo pedido en cada caso:

A) P(1) + Q(0) – R(1)

B) P(–1) – Q(1) + R(2)

C) P(2) + Q(–1) – R(0)

D) P(–3) + Q(2) + R(–1)

E) P(–2) . Q(7) + Q(1) . R(20)

6. Marcar Verdadero (V)o Falso (F) según corresponda:

A) $P(x; y) = 5x^2y^3z \rightarrow GA = 6$ ...( )

B) $2x - b = ax - 2 \rightarrow ab = 4$ ...( )

C) $x^5 - 2x^{m-2} \rightarrow m = 7$ ...( )

D) $F(x) = 2008 \rightarrow GA = 0$ ...( )

E) $G(x) = 7^{10} \rightarrow GA = 10$...( )

7. Calcular lo pedido en cada caso

A) ¿m.n? si el polinomio es homogéneo

$$P(x;y) = 2x^3 - 4xy^m - y^{n-1}$$

B) ¿a . b. c? si el polinomio es ordenado

$$P(x) = x^7 - x^a + x^b - x^4 - x^6 - x^2$$

C) ¿a + b + c? si el polinomio es completo y ordenado

$$P(x) = x^{a-1} + x^{b-2} + x^{c-3} + a.b.c$$

D) ¿mn + m + n? si el polinomio es idénticamente nulo.

$$P(x) = (m - 4)x^2 + (n + 3)x$$

E) ¿a – b? si el polinomio es mónico lineal

$$P(x) = (a - 2)x^2 + (b + 3)x - ab$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Calcular "a . b" si:

$$(2a-3)x+5 \equiv 7x+b-1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Resolución: De la identidad se cumple que los coeficientes de sus términos semejantes son iguales, luego:

$$2a-3=7 \Rightarrow a=5$$

$$b-1=5 \Rightarrow b=6$$

$$\therefore\ a\,.\,b=30$$

PROBLEMA 2 Para qué valor de "m" y "n" el polinomio:

$$P(x;y) \equiv x^{m-1}+x^2y+xy^{n+1}$$

es homogéneo.

Resolución: Como P es homogéneo se cumple que el grado absoluto en todos sus términos son iguales, luego:

$$m-1=2+1=1+n+1$$

$$m-1=3=n+2$$

De donde: $m-1=3 \wedge n+2=3$

$$\therefore\ m=4 \quad \wedge \quad n=1$$

PROBLEMA 3 Si $P(x) \equiv 0$ calcular "a . b . c" Donde:

$$P(x) \equiv (a-1)x^2-(b-a-2)x+c-4$$

Resolución: Como P es idénticamente nulo se cumple que los coeficientes en todos sus términos son ceros, luego:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$b-a-2=0 \Leftrightarrow b-1-2=0$$

$$b=3$$

$$c-4=0 \Rightarrow c=4$$

$$\therefore\ a\,.\,b\,.\,c=12$$

PROBLEMA 4 Calcular el término independiente de x en el siguiente polinomio mónico cuadrático.

$$P(x) \equiv (b-2)x^3 + (a+2)x^2 + bx - ab$$

Resolución: Según la definición tenemos:

Por ser cuadrático: $b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

Por ser mónico: $a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$

Ahora tenemos: $P(x) \equiv x^2 + 2x + 2$

$\therefore$ TI de x en $P(x) = 2$

PROBLEMA 5 Para cuántos valores de "n" la expresión:

$$P(x;y) \equiv x^{n-1} + 4x^n y - y^{3-n}$$

es racional entera.

Resolución: De acuerdo con la definición se plantea lo siguiente:

De t_1: $n - 1 = \#\,\mathbb{N} \Rightarrow n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1$

t_2: $n = \#\,\mathbb{N}$

t_3: $3 - n = \#\,\mathbb{N} \Rightarrow 3 - n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 3$

Luego: $1 \leq n \leq 3$

De donde: $n = 1, 2$ ó 3

$\therefore$ "n" asume 3 valores

PROBLEMA 6 Si la expresión:

$$M(x) \equiv a^{2\ a+b}\sqrt{x^5} + (b-1)^{\ a-b}\sqrt{x} + abx$$

se reduce a monomio. Calcular su coeficiente.

Resolución: La expresión dada es:

$$M(x) \equiv a^2\, x^{\frac{5}{a+b}} + (b-1)x^{\frac{1}{a-b}} + abx$$

Como se reduce a monomio (un término), todos los términos deberán ser semejantes

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{a+b} = 1 \Leftrightarrow a + b = 5 \\ \dfrac{1}{a-b} = 1 \Leftrightarrow a - b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array}$$

Ahora el monomio será:

$$M(x) \equiv 9x + x + 6x \equiv 16x$$

$\therefore$ Coef de $M(x) = 16$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 7 Si se cumple:

$$P(x-2) \equiv 3x-5$$

Calcular "a + b" de modo que:

$$P(x+8) \equiv ax+b$$

Resolución: Convenientemente teniendo en cuenta el criterio del valor numérico

En el polinomio: $P(x+8) \equiv ax+b$

Hagamos x = 1: $P(9) = a+b$ ..... (1)

En el polinomio: $P(x-2) \equiv 3x-5$

Hagamos x = 11: $P(9) = 3(11)-5$

$P(9) = 28$ ..... (2)

$\therefore\ a+b=28$

PROBLEMA 8 Si: $T_1(x;y) \equiv (a^2+b)x^{a-4}y^3$

$T_2(x;y) \equiv (a-b^2)x^{2-a}y^{b+2}$

son términos semejantes. Calcular ab.

Resolución: De acuerdo con la teoría se cumple que:

$$a-4 = 2-a \ \wedge\ 3 = b+2$$
$$2a = 6 \ \wedge\ b+2 = 3$$
$$a = 3 \ \wedge\ b = 1$$

$\therefore ab = 3$

PROBLEMA 9 Sabiendo que:

$$P(x) \equiv (x^7 - 2x^3 + x + 1)^5$$
$$Q(x) \equiv (x^4 + x + 10)^6$$

Calcular : $E = \left[P^2\right]^\circ + \left[\sqrt[3]{Q}\right]^\circ$

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$[P]^\circ = (7)(5) = 35$$

$$[Q]^\circ = (4)(6) = 24$$

Asimismo también tenemos:

$$\left[P^2\right]^\circ = 2[P]^\circ = 70$$

$$\left[\sqrt[3]{Q}\right]^\circ = [Q]^\circ \div 3 = 8$$

Finalmente tenemos:

$$E = 70 + 8$$

$$\therefore E = 78$$

PROBLEMA 10 Determine la suma de coeficientes de P(x) a partir de:

$$P(x + 3) \equiv x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$$

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$P(1) = \Sigma \text{ de coeficientes de } P(x)$$

Por condición tenemos:

$$P(x + 3) \equiv x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$$

Para obtener lo pedido se plantea:

$$x + 3 = 1$$

$$x = -2$$

Finalmente tenemos:

$$P(1) = (-2)^4 - 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) + 1$$

$$P(1) = 16 + 16 + 20 + 2 + 1$$

$$\therefore P(1) = 55$$

PROBLEMA 11 Si:

$$f(x; y) \equiv (a^3 - 8)x^y + ax^3 + (b + 1)a^x - aby$$

es una expresión algebraica. Calcular la suma de sus coeficientes.

team CALAPENSHKO

Resolución: De acuerdo con la teoría f (x; y) será una expresión algebraica siempre que:

$$a^3 - 8 = 0 \ \wedge \ b + 1 = 0$$

$$a^3 = 8 \ \wedge \ b + 1 = 0$$

$$a = 2 \ \wedge \ b = -1$$

Ahora tenemos:

$$f(x; y) \equiv 2x^3 + 2y$$

$\therefore \Sigma$ de coeficientes $= 4$

PROBLEMA 12 Si: $P(x) \equiv x^2 - x + 2$

$Q(x) \equiv x^2 + x - 1$

$R(x) \equiv x + 2$

Calcular: $E = P(Q(R(-1)))$

Resolución: En la expresión: $R(x) \equiv x + 2$

$R(-1) = -1 + 2 = 1$

Ahora el valor pedido será:

$E = P(Q(1))$

En la expresión: $Q(x) \equiv x^2 + x - 1$

$Q(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

Ahora el valor pedido será:

$E = P(1)$

En la expresión: $P(x) \equiv x^2 - x + 2$

$P(1) = 1 - 1 + 2$

$\therefore E = 2$

PROBLEMA 13 Si: $P(x-2y; x+y) \equiv 3x + y$.

Determine la fórmula de: $P(x-y; x+2y)$

Resolución: En el polinomio dato hagamos un cambio de variable:

$$\begin{cases} x - 2y = u \\ x + y = v \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado, obtenemos:

$$x = \frac{u + 2v}{3} \wedge y = \frac{v - u}{3}$$

Ahora el polinomio dato se transforma en:

$$P(u;v) = 3\left(\frac{u + 2v}{3}\right) + \frac{v - u}{3}$$

$$P(u;v) = \frac{2u + 7v}{3}$$

Finalmente reemplazando "u" por $(x - y)$ y "v" por $(x + 2y)$ tenemos:

$$P(x - y; x + 2y) = \frac{2(x - y) + 7(x + 2y)}{3}$$

$$P(x - y; x + 2y) = \frac{9x + 12y}{3}$$

$$\therefore P(x - y; x + 2y) = 3x + 4y$$

PROBLEMA 14 Si: $P(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 3}$

Calcular: $E = P(P(P(P(2010))))$

Resolución: Sería muy tedioso iniciar la resolución hallando P(2010), pero si recuerdas la siguiente propiedad:

$$P(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$$

$$\underbrace{P(P(P...P(P(x))...))}_{\text{"m" veces}} = \begin{cases} \text{Si m es par: } x \\ \text{Si m es impar: } P(x) \end{cases}$$

Resulta que: $E = P(P(P(P(x)))) \;;\;$ para $x = 2010$

$$E = x$$

$$\therefore E = 2010$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 15 Si P es un polinomio que verifica:

$$P(P(P(x))) = 27x + 52$$

Calcular $P(-2)$

Resolución: Fácilmente podemos apreciar que P(x) es un polinomio de 1er grado, es decir su forma general es $P(x) = ax + b$

Por propiedad se plantea:

$$P(P(P(x))) = a^3x + b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)$$

Por condición se tendrá:

$$27x + 52 = a^3x + b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)$$

Ahora de la identidad:

$$a^3 = 27 \rightarrow a = 3$$

Asimismo también se cumple:

$$b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right) = 52$$

$$b(13) = 52 \rightarrow b = 4$$

Finalmente el polinomio será

$$P(x) = 3x + 4$$

$$\therefore P(-2) = -2$$

PROBLEMA 16 En el polinomio::

$$P(x + 1) = (2x + 1)^n + (x + 2)^n - 128(2x+ 3)$$

Donde "n" es impar, la suma de coeficientes y el término independiente en P(x) suman 1, calcular el valor de "n".

Resolución: Recordar que si tenemos:

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + ... + A_n$$

Se cumple: T. I de x en $P(x) = P(0)$

Σ coeficientes de $P(x) = P(1)$

En el problema:

$$\text{Sea}: x + 1 = m \rightarrow x = m - 1$$

team CALAPENSHKO

$$P(m) = (2m-2+1)^n + (m-1+2)^n - 128(2m-2+3)$$

$$P(m) = (2m-1)^n + (m+1)^n - 128(2m+1)$$

Luego:

$$P(x) = (2x-1)^n + (x+1)^n - 128(2x+1) \ldots\ldots\ldots (I)$$

Dato:

$$P(1) + P(0) = 1$$

De (I):

$$P(1) = 1 + 2^n - 384 = 2^n - 383$$

$$P(0) = -1 + 1 - 128 = -128$$

Sumando:

$$1 = 2^n - 511$$

$$2^n = 512 = 2^9$$

Comparando:

$$\therefore\ n = 9$$

PROBLEMA 17 Calcular "m + n" si el polinomio

$$P(x;y) = 3x^{2m+n-4}y^{m+n+2} + x^{2m+n-3}y^{m+n+1} - x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

es de grado 10 y la diferencia entre los grados relativos a x e y es 4.

Resolución: Una rápida inspección permite observar que:

$$GA = 3m + 2n - 2$$

Por condición:

$$3m + 2n - 2 = 10$$

$$3m + 2n = 12 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$GR(x) = 2m + n - 2 \wedge GR(y) = m + n + 2$$

Por condición:

$$(2m + n - 2) - (m + n + 2) = 4$$

$$2m + n - 2 - m - n - 2 = 4$$

$$m - 4 = 4$$

$$m = 8$$

Reemplazando en (1):

$$3(8) + 2n = 12$$

$$2n = -12$$

$$n = -6$$

$$\therefore\ m + n = 2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Si: $F(2x-3) = 4x^2 - 2x + 1$
Determine: $F(3x-2)$

Resolución: La expresión dada es:

$$F(2x-3) = 4x^2 - 2x + 1 \quad \text{.....(1)}$$

Hagamos el siguiente cambio:

$$2x - 3 = m$$

$$2x = m + 3 \rightarrow x = \frac{m+3}{2} \quad \text{.....(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$F(m) = 4\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m+3}{2}\right) + 1$$

Efectuando operaciones:

$$F(m) = \frac{4(m^2+6m+9)}{4} - (m+3) + 1$$

$$F(m) = m^2 + 6m + 9 - m - 3 + 1$$

$$F(m) = m^2 + 5m + 7$$

Finalmente $m = 3x - 2$:

$$F(3x-2) = (3x-2)^2 + 5(3x-2) + 7$$

$$F(3x-2) = 9x^2 - 12x + 4 + 15x - 10 + 7$$

$$\therefore \quad F(3x-2) = 9x^2 + 3x + 1$$

PROBLEMA 19 Determine el número de términos del siguiente polinomio completo y ordenado

$$P(x) = x^{2a+b+c} + x^{a+3b+2c} + x^{a+4b+8c} + x^{2a+b+4c} + ... + x^2 + x + 1$$

Resolución: Una rápida inspección permite observar que el polinomio completo esta ordenado en forma decreciente, esto por sus últimos términos, razón por la cual se plantea.

$$2a + b + c - (a + 3b + 2c) = 1$$
$$a - 2b - c = 1 \quad \text{..... (1)}$$

$$a + 3b + 2c - (a + 4b + 8c) = 1$$
$$-b - 6c = 1 \quad \text{..... (2)}$$

$$a + 4b + 8c - (2a + b + 4c) = 1$$
$$-a + 3b + 4c = 1 \quad \text{..... (3)}$$

Sumando (1) y (3): $b + 3c = 2$
Con la ecuación (2): $-b - 6c = 1$
} Resolviendo: $b = 5 \wedge c = -1$

team CALAPENSHKO

Reemplazando en (1): $a - 2(5) - (-1) = 1$

$a - 10 + 1 = 1$

$a = 10$

Observando que: N° de Term. = Grado + 1

$\Rightarrow$

N° de Term. $= 2a + b + c + 1$

N° de Term. $= 2(10) + 5 - 1 + 1$

$\therefore$ N° de Term. = 25

PROBLEMA 20 Calcular: $a + b + c$, si se cumple:

$$50x^3 + 5x^2 - 8x + 1 \equiv a(bx + 1)^a \cdot (cx - a)^b; \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución: Por ser polinomios idénticos sus grados son iguales, luego:

$a + b = 3$

Hacemos $x = 0$: $1 = a \cdot (1)^a \cdot (-a)^b$

$1 = a \cdot (-a)^b$

En vista que $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y de lo anterior se cumple:

$a = 1 \ \wedge \ b = 2$

Por coeficiente principal tenemos:

$50 = a \cdot b^a \cdot c^b$

Reemplazando valores conocidos:

$50 = 1 \cdot 2^1 \cdot c^2$

$25 = c^2$

$c^2 = 25$

$c = 5$

$\therefore$ $a + b + c = 8$

PROBLEMA 21 Si: $P(x-3) \equiv 5x - 7$

$P[F(x) + 2] \equiv 10x - 7$

Calcular: $F(-2)$

Resolución: En la primera condición:

$P(x - 3) \equiv 5x - 7$ .....(1)

Hagamos que $x - 3 = m$, luego tenemos: $x = m + 3$

team CALAPENSHKO

Reemplazando en (1):

$$P(m) \equiv 5(m+3) - 7$$

$$P(m) \equiv 5m + 8 \quad \text{.....(2)}$$

En (2) hacemos $m = F(x) + 2$:

$$P[F(x)+2] \equiv 5[F(x)+2] + 8$$

Utilizando la 2° condición:

$$10x - 7 \equiv 5F(x) + 18$$

$$5F(x) + 18 \equiv 10x - 7$$

$$5F(x) \equiv 10x - 25$$

$$F(x) \equiv 2x - 5$$

Finalmente hacemos $x = -2$:

$$F(-2) = 2(-2) - 5 = -4 - 5$$

$$\therefore \quad F(-2) = -9$$

PROBLEMA 22 Determine la suma de los coeficientes del siguiente polinomio completo:

$$P(x) \equiv c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x) \equiv cx^a + bx^a + cx^b + ax^b + ax^c + bx^c + abc$$

$$P(x) \equiv (b+c)x^a + (a+c)x^b + (a+b)x^c + abc$$

Como P es completo, debe ser de tercer grado pues tiene 4 términos.

Se pide calcular: $P(1) = (b+c) + (a+c) + (a+b) + abc$

$$P(1) = 2(a+b+c) + abc$$

Observar que se cumple:

$$\{a, b, c\} = \{3; 2; 1\}$$

De donde tenemos:

$$a + b + c = 6 \quad \text{y} \quad abc = 6$$

Reemplazando (2) en (1):

$$P(1) = 2(6) + 6 = 12 + 6$$

$$\therefore \quad P(1) = 18$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

PROBLEMA 23 Calcular el grado de: $\frac{\sqrt[3]{H(x)}}{Q(x)}$, sabiendo que el grado de: $\frac{\sqrt[3]{H(x)}\,.\,P(x)}{Q^2(x)}$ es 3 y el de $\frac{P(x)\,.\,Q(x)}{\sqrt[3]{H^2(x)}}$ es cero.

Resolución:

Sean los grados: $[H]^\circ = a$; $[P]^\circ = b$ y $[Q]^\circ = c$

Por propiedad: $\left[\sqrt[3]{H}\right]^\circ = \frac{a}{3}$; $\left[Q^2\right]^\circ = 2c$ y $\left[\sqrt[3]{H^2}\right]^\circ = \frac{2a}{3}$

Por condición: $\left[\frac{\sqrt[3]{H}\,.\,P}{Q^2}\right]^\circ = 3 \leftrightarrow \quad \frac{a}{3} + b - 2c = 3$

De donde tenemos: $a + 3b - 6c = 9$ .....(1)

Por condición: $\left[\frac{P\,.\,Q}{\sqrt[3]{H^2}}\right]^\circ = 0 \leftrightarrow \quad b + c - \frac{2a}{3} = 0$

De donde tenemos: $3b + 3c - 2a = 0$ .....(2)

Restando (2) de (1): $a + 3b - 6c - 3b - 3c + 2a = 9$

$3a - 9c = 9$

$a - 3c = 3$ .....(3)

Se pide calcular: $K = \frac{a}{3} - c$

$K = \frac{a - 3c}{3}$

Reemplazando(3): $K = \frac{3}{3}$

$\therefore \quad K = 1$

PROBLEMA 24 Calcular "n" a partir del polinomio:

$$P(3 - \sqrt{x}) = (2x - 9)^{n-4}\left(\frac{nx}{9} - 4\right) + \frac{n}{9}(x - 9)$$

Si en P(x) su término independiente más nueve veces su suma de coeficientes es igual a cero.

Resolución:

Por condición: $P(0) + 9P(1) = 0$ .... (1)

$$P(3 - \sqrt{x}) = (2x - 9)^{n-4}\left(\frac{nx}{9} - 4\right) + \frac{n}{9}(x - 9)$$

Hagamos: $3 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 9$

team CALAPENSHKO

$$P(0) = (18-9)^{n-4}.\left(\frac{9n}{9}-4\right)+\frac{n}{9}(9-9)$$

$$P(0) = 9^{n-4}.(n-4)$$

Hagamos: $3-\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=4$

$$P(1) = (8-9)^{n-4}.\left(\frac{4n}{9}-4\right)+\frac{n}{9}(4-9)$$

$$P(1) = (-1)^{n-4}.\left(\frac{4n}{9}-4\right)-\frac{5n}{9}$$

Reemplazando en la condición se tendrá:

$$9^{n-4}.(n-4)+9\left[(-1)^{n-4}.\left(\frac{4n}{9}-4\right)-\frac{5n}{9}\right]=0$$

$$9^{n-4}.(n-4)+(-1)^{n-4}.(4n-36)-5n=0$$

Si "n" es par: $9^{n-4}.(n-4)+4n-36-5n=0$

$$9^{n-4}.(n-4)=n+36$$

$$9^{n-4}=\frac{n+36}{n-4}=1+\frac{40}{n-4}$$

Observar que $(n-4)$ es un número par y divisor de 40, luego:

$$n-4 = 2; 4; 8; 10; 20; 40$$

En ningún caso existe "n" que verifique la condición del problema.

Si "n" es impar: $9^{n-4}.(n-4)-(4n-36)-5n=0$

$$9^{n-4}.(n-4)-(9n-36)=0$$

$$9^{n-4}.(n-4)-9(n-4)=0$$

$$(n-4).(9^{n-4}-9)=0$$

$$n-4=0 \ \vee \ 9^{n-4}-9=0$$

$$n=4 \ \vee \ n-4=1$$

$$n=4 \ \vee \ n=5$$

Como "n" es impar: $n \neq 4$

$\therefore \ n=5$

PROBLEMA 25 Si:

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{b+c}+\frac{2c}{a+c}=5$$

Determine el grado de la expresión

$$M(x) \equiv \frac{\sqrt[a+b]{x^{a-b}}.\sqrt[b+c]{x^{b-c}}}{\sqrt[a+c]{x^{a-c}}}$$

Resolución:

Se pide: $[M]^\circ = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} - \frac{a-c}{a+c}$

$[M]^\circ = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c}$

Por condición: $\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{a+c} = 5$

Restando 3: $\frac{2a}{a+b} - 1 + \frac{2b}{b+c} - 1 + \frac{2c}{a+c} - 1 = 5 - 3$

$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c} = 2$

$\therefore [M]^\circ = 2$

PROBLEMA 26 Sea $P(x; y; z)$ un polinomio homogéneo de grado 3 que cumple: $P(1; 2; -1) = 4$. Determine el valor de $P(-4; -8; 4)$

Resolución:

Se sabe que si $P(x; y; z)$ es un polinomio homogéneo de grado "n", se cumple que:

$$P(kx; ky; kz) \equiv k^n . P(x; y; z) \quad \text{.....(1)}$$

Por dato tenemos: $P(1; 2; -1) = 4 \wedge n = 3$

Se pide calcular: $P(-4; -8; 4)$, es decir: $k = -4$

Ahora en (1) tenemos:

$$P(-4; -8; 4) = (-4)^3 . P(1; 2; -1)$$

$$P(-4; -8; 4) = (-4)^3 . 4 = -4^4$$

$$\therefore P(-4; -8; 4) = -256$$

PROBLEMA 27 La suma de los polinomios:

$$P(x) = (a+x).(b+cx) + ax + 4$$

$$Q(x) = (x+b).(x+2)+x$$

Origina un polinomio de grado cero.

Calcular:

$$K = 4cb^2$$

Resolución:

Ordenando: $P(x) = cx^2 + (ac+b+a)x + ab + 4$

$Q(x) = x^2 + (b+3)x$

Sumando: $P(x) + Q(x) = (c+1)x^2 + (ac+2b+a+3)x + ab + 4$

team CALAPENSHKO

Dato:

$P(x) + Q(x)$ es de grado cero.

se cumple:

$$c + 1 = 0 \quad \wedge \quad ac + 2b + a + 3 = 0$$
$$\boxed{c = -1} \quad \Rightarrow \quad -a + 2b + a + 3 = 0$$
$$\boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

Luego:

$$K = 4(-1)\left(-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\therefore K = -9$$

PROBLEMA 28 Siendo P(x;y) un polinomio idénticamente nulo. Calcular el producto de los valores naturales de "m" y "n"

$$P(x;y) = 2(mnx+y)x - (n+9)x^2 + (5m - 4n)xy$$

Resolución:

Ordenando:

$$P(x;y) = 2mnx^2 + 2xy - (n+9)x^2 + (5m - 4n)xy$$
$$P(x;y) = (2mn - n - 9)x^2 + (2 + 5m - 4n)xy$$

Dato:

$$P(x;y) \equiv 0$$

Se cumple: $2 + 5m - 4n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{4n-2}{5}$ ..... (1)

Asímismo:

$$2mn - n - 9 = 0$$
$$2\left(\frac{4n-2}{5}\right)n - n - 9 = 0$$
$$2(4n-2)n - 5n - 45 = 0$$
$$8n^2 - 9n - 45 = 0$$

$8n \quad 15 \quad \rightarrow \quad n = -\dfrac{15}{8}$ ¡no!

$n \quad -3 \quad \rightarrow \quad n = 3$ ¡sí!

$$\boxed{n = 3}$$

Luego en (1) tenemos:

$$\boxed{m = 2}$$

Finalmente:

$$\therefore \ m.n = 6$$

PROBLEMA 29 Dada la relación:

$$F(x+2\sqrt{x}) = x+4\sqrt{x}+4$$

Hallar:

$$F(x-2\sqrt{x})$$

Resolución: De:

$$F(x+2\sqrt{x}) = x+4\sqrt{x}+4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Hagamos:

$$x+2\sqrt{x} = m$$

$$(\sqrt{x}+1)^2 = m+1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{m+1}-1$$

De (1):

$$F(x+2\sqrt{x}) = (\sqrt{x}+2)^2$$

Haciendo el cambio:

$$F(m) = (\sqrt{m+1}+1)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Se pide:

$$F(x-2\sqrt{x})$$

Hagamos:

$$m = x-2\sqrt{x}$$

$$m+1 = (\sqrt{x}-1)^2$$

$$\sqrt{m+1} = \sqrt{x}-1$$

Haciendo el cambio en (2):

$$F(x-2\sqrt{x}) = (\sqrt{x}-1+1)^2$$

Finalmente:

$$\therefore\ F(x-2\sqrt{x}) = x$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Si el polinomio ordenado decrecientemente y completo

$$M(x) \equiv x^{2n+1} + 2x^{p+3} - 3x^{m+2} + \ldots\ldots \blacksquare$$

Posee 2m términos. Hallar "p".

Resolución: Se cumple:

$$2n+1-(p+3)=1 \quad \wedge \quad p+3-(m+2)=1 \quad \wedge \quad 2n+2=2m$$

$$2n-p=3 \qquad p-m=0 \qquad n+1=m$$

$$\underbrace{2n-p=3}_{\text{I}} \qquad \underbrace{p=m}_{\text{II}} \qquad \underbrace{n+1=m}_{\text{III}}$$

Con (II) y (I):

$$2n-m=3 \ldots\ldots \text{"IV"}$$

De "III" y "IV":

$$\left.\begin{array}{l} n+1=m \\ 2n-m=3 \end{array}\right\} 2n-n-1=3$$

$$n=4$$

$$\Rightarrow m=5$$

Finalmente:

$$\therefore \ p=5$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Reconocer a la expresión que representa a un polinomio:

A) $P(x) = x^3 + \sqrt{2}x + \frac{4}{x} - 1$

B) $P(x; y) = x^2 + xy - 5z$

C) $P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$

D) $P(x) = 4$

E) más de una es correcta

2. Si:

$$P(\sqrt{x} - 1) = x^2 + 3x + 1$$

Calcular: P(2)

A) 5 B) 109 C) 103
D) 6 E) 29

3. Dada la expresión "f", tal que:

$$F\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right) = 2x^2 - 18 \; ; \; x$$

Calcular:

$$\frac{f(1) + f(-1)}{2}$$

A) 11 B) 7 C) 10
D) 9 E) 8

4. ¿Qué ocurre con el valor de F, siendo:

$$F(x) = x^3 + x - 10$$

cuando x varía de $x_1 = -2$ hasta $x_2 = 1$?

A) Disminuye en 12
B) Disminuye en 18
C) Aumenta en 18
D) Aumenta en 3
E) Aumenta en 12

5. Calcular "m + n" sabiendo que el polinomio:

$$P(x; y) = x^{m+1} - 4xy^5 + x^{n-2}y^3 - y^6$$

es homogéneo

A) 10 B) 8 C) 12
D) 16 E) 6

6. Si el polinomio:

$$P(x; y) = 2x^n - (xy^2)^b - (xy)^4 y$$

es homogéneo. Calcular:

$$P(3b; a)$$

A) 4 B) 0 C) 1
D) –2 E) 3

7. ¿Cuántos polinomios de la forma:

$$P(x; y) = x^{n-5} + (n+2)xy^n - y^{7-n}$$

existen?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) infinitos

8. La suma de los coeficientes del polinomio:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2(b - a)$$

es –36, además su término independiente es –30. Calcule: a + b

A) 15 B) 7 C) 44
D) –7 E) –15

9. Calcular "n" si la suma de coeficientes es el cuádruple del término independiente de x en el siguiente polinomio:

$$P(x) = (n + nx)^2 + (3x - 1)^{2n} - 15x^2 + 15$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

10. Determine el término independiente de x en el siguiente polinomio mónico lineal:

$$P(x) = (a - 5)x^2 + (b - 2)x + ab$$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 18

team CALAPENSHKO

11. Determinar el coeficiente de la expresión:

$$M(x;y)=\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 9^m x^{3m+2n} y^{5m-n}$$

cuyo grado absoluto es 10 y el grado relativo a x es 7.

A) 1 B) 2 C) 30
D) 4 E) 5

12. En el polinomio:

$$P(x;y)=3^5 x^{n+3} y^{m-2} z^{6-n} + x^{n+2} y^{m-3}$$

se cumple: GA = 11 ; GR(y) = 3

Calcular el valor de:

$$2m + n$$

A) 5 B) 10 C) 15
D) 25 E) 12

13. Si:

$$F(x;y)=\frac{x^m \cdot y^n}{x^n \cdot y^{10-m}}$$

Entonces para determinar el grado absoluto de F tenemos los siguientes datos:

I. $m = 12$ II. $n = 9$

A) Cada dato por separado es suficiente
B) I es suficiente
C) I y II son necesarios en conjunto
D) No es necesario los datos
E) II es suficiente

14. Si el equivalente de la expresión:

$$P(x)=3x^6 \sqrt[5]{x^4 \sqrt[3]{x^m \sqrt{x^m}}}$$

es un monomio de grado ocho, determine el valor de "m".

A) 2 B) 6 C) 9
D) 12 E) 16

15. Si:

$$3x+6=A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)$$

Hallar: A + B + C

A) –2 B) 2 C) 4
D) 0 E) –4

16. Si:

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

Hallar: abc

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) 0

17. COLUMNA (A)

El grado de P, donde:

$$P(x)=(x^7-1)^4(xy+1)^3$$

COLUMNA (B)

El grado de F, donde:

$$F(x)=(x^2-x+1)^{15}(x^2-1)^2$$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

18. Si el grado del polinomio:

$$P(x)=(25x^2+7)^n(100x^3-1)^{n-2}(2x^5-1)$$

es 49. Calcular:

$$\sqrt{n+6}$$

A) 2 B) $\sqrt{10}$ C) 10
D) 4 E) 3

19. A partir de:

$$\left[\{(x-3)^2-6\}^2-6\right]^2=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$
$$\ldots+A_7x^7+A_8x^8$$

Calcular:

$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_8$$

A) –5 B) –4 C) –13
D) 9 E) –9

20. Sea el polinomio:

$$P(x+1) = x^2 + 1$$

Además se define:

$$Q(x) = \begin{cases} P(x-1) + P(x+1) ; x \geq 1 \\ P(x) + P(-x) ; x < 1 \end{cases}$$

Hallar: $Q(0) + Q(1)$

A) 9 B) 7 C) 8
D) 6 E) 4

21. Calcular:

$$\frac{1}{101}\left[P(\sqrt{2}) + P(\sqrt{3}) + P(\sqrt{4}) + ... + P(\sqrt{102})\right]$$

Sabiendo que:

$$P\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

A) 40 B) 45 C) 50
D) 55 E) 100

22. Si:

$(a^4 + 36)x + a^2 + a = 6 + 13a^2x \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

los valores de "a" son:

A) –2 y 3 B) 2 y –3
C) 2 y 3
D) 2, –2, 3 y –3 E) –2 y –3

23. Calcular:

$$[R[P(a) - Q(a)]]^{0,5}$$

Si: $R(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 9a^2}$

$$P(x-a) = \frac{1 - x^3}{1 - 2a}$$

$$Q(x-a) = \frac{1 + x^3}{1 + 2a} ; a \neq 0$$

A) 2 B) 0,2 C) 3
D) 0,8 E) 0,6

24. Si el monomio:

$$M(x) = \left[\sqrt[n]{x^{n^n}\sqrt[n]{x^{n^n}}}\right]^n$$

es de sexto grado. ¿Cuál es el grado del polinomio:

$$P(x) = (...(((x+1)^1 + 1)^2 + 1)^3 ... + 1)^n \; ?$$

A) 20 B) 30 C) 60
D) 90 E) 120

25. En el polinomio:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$
$$P(1) = P(3) = 0$$
$$P(2) = 2$$

Hallar: a, b, c, respectivamente.

A) 1, 4, 3 B) –1, 4, 3
C) –2, 8, –6
D) –7, 8, –6 E) 1, 2, 3

26. Dado el polinomio lineal P(x), que presenta resultados mostrados en el cuadro:

x	1	2
P(x)	4	6

Calcule: $P(5) + P(0)$

A) 18 B) 16 C) 12
D) 14 E) 8

27. Si: $F(x) = e^x + a^x$
$F(4) = 1$

Halle: $\sqrt[3]{\dfrac{F(7) - F(3)}{F(1)}}$

A) ae B) $\dfrac{a}{e}$ C) $\dfrac{1}{e}$
D) $\dfrac{1}{a}$ E) –ae

28. Si:

$$P(x) = \underbrace{(x-2)^9 + (x-4)^9 + (x-6)^9 + ...}_{99 \text{términos}}$$

Calcular:

$$\sqrt[9]{P(101)}$$

A) 99 B) 101 C) 97
D) 103 E) 0

team CALAPENSHKO

29. Si: $P(4x+1)+3x \equiv 7+F(x+3)$
$F(5x+1)-13 \equiv x^2-P(2x+11)$
Calcular: $\sqrt[3]{F(P(13))}$

A) 4 B) 2 C) 6
D) 7 E) 9

30. Marcar verdadero (V) o falso (F):
( ) Todo polinomio completo es ordenado.
( ) El polinomio homogéneo carece de término independiente.
( ) Todo polinomio tiene grado definido.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

31. Si el polinomio:
$P(x) \equiv (4a+2)x^{2a-30} + (4a)x^{2a-29} + (4a-2)x^{2a-28} + \ldots + \blacktriangle$
es completo y ordenado ¿cuál es su grado?

A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 29

32. Si el polinomio P(x) es:
$(m^2+m-19)x^2-(m^2-7m+1)x+3m^2-m+3$
se reduce a uno de primer grado, calcular:
P(0,5)

A) 40 B) 50 C) 60
D) 25 E) 100

33. Si: $P\left(\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}x-1}\right)=\sqrt{3}x$
Calcular:
$$\frac{P(2)P(4)P(6)\ldots P(98)P(100)}{P(3)P(5)P(7)\ldots P(97)P(99)}$$

A) 2,01 B) 2,02 C) 2,03
D) $\sqrt{3}$ E) 2

34. Si: $F\left(\frac{2}{x}+3\right) \equiv x \; ; \; x \neq 0$
Determinar:
$F(4) + F(5) + F(7) + F(11) + \ldots.$

A) 1/2 B) 1 C) 2
D) 4 E) ∞

35. Sabiendo que:
$P(x) \equiv (a^2+b^2-ab)x^5 + (b^2+c^2-bc)x^3 + c^2+a^2-ac$
es idénticamente nulo.
Calcular:
$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}$$

A) 16 B) 12 C) 9
D) 3 E) 1

36. Calcular el valor de $m^n - n^m$ del polinomio homogéneo.
$$P(x;y) \equiv \frac{x^m y^n}{x^2 y}+\sqrt{x^n y^m}$$

A) 2 B) 1 C) 0
D) –1 E) B ó D

37. Si: $R\left(\frac{x}{5}-3\right) \equiv x+1$
Además: $R\left(F\left(\frac{2x}{9}+7\right)\right) \equiv 20x+1$
Calcular: F(x)

A) 15x – 9 B) 8x – 129
C) 18x – 129
D) 18x – 29 E) –19x + 129

38. Una expresión verifica:
$$f(n)+f(n-1)=\frac{2}{n^2-1} \; ; \; n>1$$
Hallar:
$R = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \ldots f(100)$

A) $\frac{101}{102}$ B) $\frac{200}{201}$ C) $\frac{99}{100}$
D) 5 E) $\frac{100}{101}$

39. Sea el polinomio:
$P(2x) \equiv a_0x + 2a_1x^2 + 2^2a_2x^3 + \ldots + 2^5a_5x^6$
Hallar la suma de coeficientes de P(x), si su término independiente es: $a_5 - 2$ y además:
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8 \; ; \; a_0 \neq 0$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 2 E) 1

40. ¿Cuál será el grado del polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv x^{n+4} - y^{\frac{-1}{n+2}} + z^{1-n} \ ?$$

A) 4 B) 2 C) 6
D) 0 E) 8

41. Calcular: "ab" si:

$$F(x^2 + x) \equiv x$$
$$F(x) \equiv a\sqrt{1 + bx} - \frac{1}{2}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

42. Si: $f(x^2-2x+1) \equiv x^2-3$, entonces $f(x-2)$ es:

A) $x^2 + 2x - 1$ B) $x^2 + 2\sqrt{x-2}$
C) $x + 2\sqrt{x-2} - 4$
D) $(x - \sqrt{2})^2 + 1$ E) $x - 2\sqrt{x-2} + 4$

43. Si: $P(x) \equiv a\sqrt{bx+1} - \frac{1}{2}$ y $P(x^2 + x) \equiv x$

Obtener: ab

A) 5 B) 3 C) 4
D) 6 E) 2

44. Sean: P y Q dos polinomios primitivos; tales que:

$$P(x) \equiv ax + 3 \ ; \ Q(x) \equiv 2x + b$$

Siendo: $a; b \in \mathbb{Z}^+$. a, b impares.
Además: $P(Q(x)) - Q(P(x)) = 3$
Indicar: $P(x) - Q(x)$

A) $5x + 1$ B) $5x + 2$ C) $4x + 3$
D) $3x + 4$ E) $3x + 5$

45. Del polinomio homogéneo P(x; y) de segundo grado, se sabe que:

$$P(x; x) \equiv x^2$$
$$P(x; -x) \equiv 2x^2$$
$$P(x; y) \equiv P(y; x)$$

Calcular: $P(2; 4)$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 15

46. Si F(x) es un polinomio tal que:
$P(x) \equiv x^2F(x) + xF(x^2)$, calcular "a" de modo que: $P(x) \equiv 8x^3 + (a-2)x^2 + 3x$

A) 7 B) 5 C) 3
D) 9 E) 1

47. Sea "f" una función definida en el conjunto de los números reales tal que verifica las siguientes propiedades:

$$f(x + y) = f(x) + f(y); \ f(1) = 2$$

Calcular: $f(1 + 2 + ... + 10)$

A) 220 B) 20 C) 40
D) 55 E) 110

48. Sea: $P(x) \equiv a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ un polinomio de grado "n". Definimos un operador sobre los polinomios, mediante:

$$D\left[a_0 + a_1x + ... + a_nx^n\right] = \left[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}\right]$$

Determinar el polinomio P(x); tal que:

$$D[P(x)] \equiv 3x^2 + 2x^3$$

Dar la suma de sus coeficientes como respuesta.

A) $a_0 + \frac{1}{2}$ B) $a_0 + \frac{9}{2}$ C) $a_0 + \frac{7}{2}$
D) $a_0 + \frac{5}{2}$ E) $a_0 + \frac{3}{2}$

49. Sabiendo que: $P(x-1) \equiv x^7 + x^5 - x^2 + x$

Calcular: $P(x^2)$

A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 0

50. Si F es una relación funcional que verifica:

I. $F(x) > 0$ II. $F(x - y) = \frac{1}{F(x)} - F(y)$

Calcular: $F(2011)$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 4

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Capítulo 3

Productos Notables

CAPACIDADES:

- Efectuar multiplicaciones algebraicas.
- Reconocer y desarrollar cuadrados y cubos de binomios y trinomios.
- Identificar a las principales equivalencias algebraicas.

LAGRANGE

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

JOSEPH LOUIS DE LAGRANGE, precedía de una ilustre familia parisiense, que tenía profundo arraigo en Cerdeña, y algún rastro de noble linaje italiano. Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín, y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. Una especulación insensata llevada a cabo por su padre, abandonó a Lagrange a sus propios recursos, a una edad temprana, pero este cambió de fortuna no resultó ser una gran calamidad, "pues de otro modo – dijo él – tal vez nunca hubiera descubierto mi vocación". En la escuela, sus intereses infantiles eran Homero y Virgilio, y cuando una memoria de Halley le cayó en las manos, se alumbró la chispa matemática. Como Newton, pero a una edad aún más temprana, llegó al corazón de la materia del espacio de tiempo increíblemente corto. a los dieciséis años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín, donde el tímido muchacho, que no poseía recursos de oratoria y era de muy pocas palabras, mantenía la atención de hombres bastante mayores que él. Su encantadora personalidad atraía su amistad y entusiasmo. Pronto condujo un joven grupo de científicos, que fueron los primeros miembros de la Academia de Turín. Lagrange se transfiguraba cuando tenía una pluma en sus manos; y, desde un principio, sus escritos fueron la elegancia misma. Transcribía a las matemáticas todos los pequeños temas sobre investigaciones físicas que le traían sus amigos, de la misma manera que Schubert pondría música a cualquier ritmo perdido que arrebatara su fantasía.

team CALAPENSHKO

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

DEFINICIÓN

Dados dos expresiones algebraicas A(x) y B(x), la multiplicación es la operación que hace corresponder a dicho par de expresiones una nueva expresión P(x) llamado producto.

$$A(x).B(x) = P(x)$$

REGLA DE MULTIPLICACIÓN

La multiplicación de A(x) por B(x) se ejecuta según la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición veamos algunos ejemplos.

- $2x^2.(5x+3) = 2x^2.5x + 2x^2.3$
  $= 10x^3 + 6x^2$

- $(2x+3)(3x-5) = 2x.3x + 2x.-5 + 3.3x + 3.-5$
  $= 6x^2 - 10x + 9x - 15 = 6x^2 - x - 15$

- $(3x^2+2)(2x-5) = 3x^2(2x-5) + 2(2x-5)$
  $= 6x^3 - 15x^2 + 4x - 10$

- $(2x^3+1)(3x^2-2) = 2x^3(3x^2-2) + 1(3x^2-2)$
  $= 6x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2$

twitter.com/calapenshko

PROPIEDADES

1) La multiplicación de A(x) por B(x) es equivalente a la expresión producto P(x).

2) El grado de P(x) se obtiene al sumar los grados de A(x) y B(x).

- $A(x) = 2x^2 \rightarrow [A]^\circ = 2$
- $B(x) = 5x + 3 \rightarrow [B]^\circ = 1$
- $A(x).B(x) = P(x) \rightarrow [A]^\circ + [B]^\circ = [P]^\circ$
  $2 + 1 = [P]^\circ$
  $\therefore [P]^\circ = 3$

team CALAPENSHKO

PRODUCTOS NOTABLES

DEFINICIÓN

Se denomina así a los resultados de ciertas multiplicaciones que se obtienen en forma directa, sin necesidad de efectuar operación alguna. A los productos notables también se les da el nombre de equivalencias algebraicas.

PRINCIPALES EQUIVALENCIAS ALGEBRAICAS

I. BINOMIO AL CUADRADO

1) $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

- $(x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2$

$\Rightarrow (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

2) $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

- $(x-5)^2 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2$

$\Rightarrow (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

Observación: $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\boxed{(a-b)^{2m} = (b-a)^{2m}}$

II. EQUIVALENCIA DE LEGENDRE

1) $\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$

- $(x+7)^2 + (x-7)^2 = 2(x^2 + 7^2) = 2(x^2 + 49)$

2) $\boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}$

- $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 4(x \,.\, 3) = 12x$

III. DIFERENCIA DE CUADRADOS

1) $\boxed{(a+b)\,.\,(a-b) = a^2 - b^2}$

- $(x+5)(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
- $(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

2) $\boxed{(a^m + b^n)(a^m - b^n) = a^{2m} - b^{2n}}$

- $(x^2 + y)(x^2 - y) = x^4 - y^2$
- $(x^5 + y^3)(x^5 - y^3) = x^{10} - y^6$

IV. TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- $(x+2y+3)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (3)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3) + 2(2y)(3)$

  $\Rightarrow (x+2y+3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$

- $(2x-y+5)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (5)^2 + 2(2x)(-y) + 2(2x)(5) + 2(-y)(5)$

  $\Rightarrow (2x-y+5)^2 = 4x^2 + y^2 + 25 - 4xy + 20x - 10y$

V. BINOMIO AL CUBO

1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- $(x+5)^3 = x^3 + 3(x)^2(5) + 3(x)(5)^2 + (5)^3$

  $\Rightarrow (x+5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

2) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- $(x-2)^3 = x^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3$

  $\Rightarrow (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

VI. EQUIVALENCIA DE CAUCHY

1) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a+b)$

- $(x+2)^3 = (x)^3 + (2)^3 + 3(x)(2)(x+2)$

  $\Rightarrow (x+2)^3 = x^3 + 8 + 6x(x+2)$

2) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3(ab)(a-b)$

- $(x-10)^3 = (x)^3 - (10)^3 - 3(x)(10)(x-10)$

  $\Rightarrow (x-10)^3 = x^3 - 1000 - 30x(x-10)$

VII. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

1) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

- $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$
- $(x-5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 - 5^3 = x^3 - 125$

2) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

- $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$
- $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$

team CALAPENSHKO

VIII. TRINOMIO AL CUBO

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

- $(x+2y+5)^3 = (x)^3 + (2y)^3 + (5)^3 + 3(x+2y)(x+5)(2y+5)$

$\Rightarrow (x+2y+5)^3 = x^3 + 8y^3 + 125 + 3(x+2y)(x+5)(2y+5)$

Otras equivalencias:

- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$
- $(a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3+b^3+c^3) + 6abc$

IX. EQUIVALENCIA DE STEVEN

1) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

2) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$

- $(x+5)(x+2) = x^2 + 7x + 10$
- $(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$
- $(x+8)(x-5) = x^2 + 3x - 40$
- $(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $(x+2)(x+3)(x-4) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

X. EQUIVALENCIA DE ARGAN'D

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

En particular:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

XI. EQUIVALENCIA DE LAGRANGE

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

XII. EQUIVALENCIA DE GAUSS

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$

XIII. EQUIVALENCIA ADICIONAL

$(a+b+c)(ab+ac+bc)=(a+b)(a+c)(b+c)+abc$

XIV. EQUIVALENCIA CONDICIONAL

Si los números a, b $\wedge$ c verifican: $a+b+c=0$

Se cumple:

1) $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$

2) $(ab+ac+bc)^2=(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2$

3) $a^3+b^3+c^3=3abc$

4) $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

5) $a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+ac+bc)$

6) $a^6+b^6+c^6=3(abc)^2-2(ab+ac+bc)^3$

IMPLICANCIAS NOTABLES

Siendo a, b y c números reales tenemos:

1) Si: $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Rightarrow a=b=c$

2) Si: $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow a+b+c=0 \vee a=b=c$

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Marcar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda

A) $(x+2)^2 = x^2+4$ .....( )

B) $(x-3)^2 = x^2-6x-9$ .....( )

C) $(2x-5)^2 = 4x^2+25-20x$ .....( )

D) $(x+2).(x-3) = x^2-6$ .....( )

E) $(x-5).(x-2) = x^2-7x+10$ .....( )

2. Escribe el desarrollo de cada expresión que a continuación se muestra:

A) $(3x+1)^2$ = ...

B) $(x+2y+1)^2$ = ...

C) $(2x-1)^3$ = ...

D) $(2x+y+3)^3$ = ...

E) $(2x-3y-5)^2$ = ...

3. Ejecuta las operaciones indicadas, mostrando el equivalente en cada caso.

A) $(2x+1)^2+(2x-1)^2$

B) $(5x+2)^2-(5x-2)^2$

C) $(x+1)^3+(x-1)^3$

D) $(x+2)^3-(x-2)^3$

E) $(x+5).(x+4)-(x+6).(x+3)$

4. Coloca el signo de relación (>; <; =) correspondiente en cada recuadro.

A) $(\sqrt{7}+1).(\sqrt{7}-1)$ ☐ $(\sqrt{3}+1)^2$

B) $(2\sqrt{3}-1)^2+1$ ☐ $(2\sqrt{3}+1)^2$

C) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}).(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ ☐ $(\sqrt{7}+2).(\sqrt{7}-2)$

D) $(3\sqrt{2}+1).(3\sqrt{2}-1)$ ☐ $(\sqrt{10}-1)^2$

E) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-1$ ☐ $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

5. Si: $a+b=4 \wedge a.b=2$. Calcular:

A) a^2+b^2

B) a^4+b^4

C) a^3+b^3

D) a^6+b^6

E) a^5+b^5

6. Si: $x+x^{-1}=3$. Calcular:

A) x^2+x^{-2}

B) x^4+x^{-4}

C) x^3+x^{-3}

D) x^5+x^{-5}

E) $x-x^{-1}$

7. Calcular lo pedido en cada caso:

A) si: $a+b=5 \wedge ab=3$ ¿a^2+b^2?

B) si: $a+b=10 \wedge ab=8$ ¿a^3+b^3?

C) si: $a+b=7 \wedge ab=2$ ¿a^2-b^2?

D) si: $a-b=5 \wedge ab=1$ ¿a^3-b^3?

E) si: $a^2-b^2=24 \wedge a+b=8$ ¿$a-b$?

8. Reducir en cada caso:

A) $(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2$

B) $(x+7)(x+5)-(x+6)^2$

C) $(x+5)^2-(x-5)^2-x$

D) $(x+3)(x^2-3x+9)-27$

E) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Si: $x - x^{-1} = 5$

Calcular:

$$x^3 - x^{-3}$$

Resolución: Por condición tenemos: $x - x^{-1} = 5$

Por la equivalencia de Cauchy:

$$(x - x^{-1})^3 = (5)^3$$
$$x^3 - x^{-3} - 3(x \cdot x^{-1}) \cdot (x - x^{-1}) = 125$$
$$x^3 - x^{-3} - 3(1)(5) = 125$$
$$x^3 - x^{-3} - 15 = 125$$

$$\therefore \quad x^3 - x^{-3} = 140$$

PROBLEMA 2 Si: $a + b = 2 \wedge ab = 3$

Calcular:

$$M = a^3 + b^3 + a^2 + b^2$$

Resolución: La expresión M se puede reacomodar de la manera siguiente:

$$M = (a^3 + b^3) + (a^2 + b^2)$$

Hallemos $a^2 + b^2$: $a + b = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = (2)^2$

$$a^2 + b^2 + 2(ab) = 4$$
$$a^2 + b^2 + 2(3) = 4$$
$$a^2 + b^2 + 6 = 4$$
$$a^2 + b^2 = -2$$

twitter.com/calapenshko

Hallemos $a^3 + b^3$: $a + b = 2 \Rightarrow (a + b)^3 = (2)^3$

$$a^3 + b^3 + 3(ab)(a + b) = 8$$
$$a^3 + b^3 + 3(3)(2) = 8$$
$$a^3 + b^3 + 18 = 8$$
$$a^3 + b^3 = -10$$

Finalmente: $M = (-10) + (-2)$

$$\therefore \quad M = -12$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 3 Si: $x^3+y^3=5$ ..... (1)

$xy(x+y)=1$ ..... (2)

Calcular: $(x+y)^2$

Resolución: Teniendo en cuenta la equivalencia de Cauchy

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3(xy)(x+y)$$
$$(x+y)^3=5+3(1)$$
$$(x+y)^3=5+3$$
$$(x+y)^3=8$$
$$x+y=2$$

$\therefore\ (x+y)^2=4$

PROBLEMA 4 Si: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$; $\{x;y\}\subset\mathbb{R}^*$

Calcular: $\frac{5x-y}{3x+y}$

Resolución: Por condición tenemos: $\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{x+y}$

Efectuando operaciones: $(x+y)^2=4xy$

$$x^2+y^2+2xy=4xy$$
$$x^2+y^2-2xy=0$$

Por binomio al cuadrado: $(x-y)^2=0\rightarrow x-y=0$

$$x=y$$

Finalmente se pide: $K=\frac{5x-y}{3x+y}$

$$K=\frac{5x-x}{3x+x}$$
$$K=\frac{4x}{4x}$$

$\therefore\ K=1$

PROBLEMA 5 Calcular:

$$ab+ac+bc$$

Si:

$$a+b+c=5\ \wedge\ a^2+b^2+c^2=7$$

Resolución: Teniendo en cuenta al trinomio al cuadrado:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
$$(5)^2 = 7+2(ab+ab+bc)$$
$$25-7 = 2(ab+ac+bc)$$
$$18 = 2(ab+ac+bc)$$
$$\therefore\ ab+ac+bc = 9$$

PROBLEMA 6 Simplificar:

$$E = \frac{(x+a+b)(x+a+c)-bc}{x+a+b+c}$$

Resolución: Hagamos que $x + a = m$, luego la expresión dada será:

$$E = \frac{(m+b)(m+c)-bc}{m+b+c}$$
$$E = \frac{m^2+(b+c)m+bc-bc}{m+b+c}$$
$$E = \frac{m^2+(b+c)m}{m+b+c}$$
$$E = \frac{m(m+b+c)}{m+b+c}$$
$$E = m$$
$$\therefore\ E = x+a$$

PROBLEMA 7 Si: $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$; $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Calcular:

$$K = \sqrt{\frac{a^n+5b^n+3c^n}{b^n}}$$

Resolución: De acuerdo con la implicancia notable, se cumple: $a = b = c$

Ahora en la expresión K se tendrá:

$$K = \sqrt{\frac{a^n+5a^n+3a^n}{a^n}}$$
$$K = \sqrt{\frac{9a^n}{a^n}}$$
$$K = \sqrt{9}$$
$$\therefore\ K = 3$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 8 Si: $x - y = 8$. Reducir:

$$E = (x - 3y)^2 - 4y(2y - x) + 8$$

Resolución: La expresión dada es:

$$E = (x - 3y)^2 - 4y(2y - x) + 8$$

$$E = x^2 + 9y^2 - 6xy - 8y^2 + 4xy + 8$$

$$E = \underbrace{x^2 + y^2 - 2xy} + 8 = (x - y)^2 + 8$$

Finalmente tenemos:

$$E = (8)^2 + 8 = 64 + 8$$

$$\therefore E = 72$$

PROBLEMA 9 Calcular:

$$K = (a + 1)^2 + (b + 1)^2 + 2ab - 1$$

Sabiendo que:

$$a = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$b = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

Resolución: La expresión pedida es:

$$K = a^2 + 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 + 2ab - 1$$

Reduciendo términos:

$$K = a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b + 1$$

$$K = (a + b)^2 + 2(a + b) + 1$$

Por binomio al cuadrado:

$$K = [(a + b) + 1]^2 = (a + b + 1)^2$$

Reemplazando los datos:

$$K = (4 + 1)^2 = (5)^2$$

$$\therefore K = 25$$

PROBLEMA 10 Si: $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcular "abc" de modo que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 21 = 2(a + 2b + 4c)$$

Resolución: En la condición:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 21 = 2a + 4b + 8c$$

$$a^2 - 2a + b^2 - 4b + c^2 - 8c + 21 = 0$$

Observa que $21 = 1 + 4 + 16$, luego agrupando y completando cuadrados tenemos: $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 8c + 16) = 0$

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-4)^2 = 0$$

De aquí se cumple que:

$$(a-1)^2 = 0 \ \wedge \ (b-2)^2 = 0 \ \wedge \ (c-4)^2 = 0$$
$$a - 1 = 0 \ \wedge \ b - 2 = 0 \ \wedge \ c - 4 = 0$$
$$a = 1 \ \wedge \ b = 2 \ \wedge \ c = 4$$

$\therefore abc = 8$

PROBLEMA 11 Calcular:

$$E = [(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - [(a+b)^2 - (a-b)^2]^2$$

Sabiendo que:

$$a = \sqrt{999} \ \wedge \ b = \sqrt{997}$$

Resolución: En la expresión dada:

$$E = [(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - [(a+b)^2 - (a-b)^2]^2$$

Por la equivalencia de Legendre:

$$E = [2(a^2 + b^2)]^2 - [4(ab)]^2$$

$$E = 4(a^2 + b^2)^2 - 16(ab)^2$$

$$E = 4(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) - 16a^2b^2$$

$$E = 4a^4 + 4b^4 + 8a^2b^2 - 16a^2b^2$$

$$E = 4a^4 + 4b^4 - 8a^2b^2 = 4(a^4 + b^4 - 2a^2b^2)$$

$$E = 4(a^2 - b^2)^2$$

Reemplazando datos:

$$E = 4(999 - 997)^2 = 4(2)^2 = 4(4)$$

$\therefore E = 16$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Si: $a^2 + b^2 = 40, m^2 + n^2 = 2, am + bn = 4$
Calcular: $bm - an$

Resolución: Por la equivalencia de Legendre:

$$(a^2 + b^2) \cdot (m^2 + n^2) = (am + bn)^2 + (an - bm)^2$$

Por propiedad tenemos:

$$(a^2 + b^2) \cdot (m^2 + n^2) = (am + bn)^2 + (bm - an)^2$$

Reemplazando datos:

$$(40)\,(2) = (4)^2 + (bm - an)^2$$

$$80 = 16 + (bm - an)^2$$

$$64 = (bm - an)^2$$

Por axioma de simetría:

$$(bm - an)^2 = 64$$

$$\therefore \quad bm - an = \pm 8$$

PROBLEMA 13 Sabiendo que:

$$\frac{7x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 4$$

Calcular: $E = \sqrt{\frac{49x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2}}$

Resolución: La condición dada es:

$$\frac{7x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 4$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{49x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2} + 2\left(\frac{7x}{3y}\right)\left(\frac{3y}{2x}\right) = 16$$

$$\frac{49x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2} + 7 = 16$$

$$\frac{49x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2} = 9$$

Finalmente tenemos:

$$E = \sqrt{9}$$

$$\therefore \quad E = 3$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 14 Si:

$$\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}=3$$

Calcular: $E=x^2+x^{-2}$

Resolución: Por la equivalencia de Legendre, la condición se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\frac{2(x^2+1)}{4(x)}=3$$

De donde obtenemos:

$$\frac{x^2+1}{x}=6 \leftrightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=6$$

$$x+x^{-1}=6$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2+x^{-2}+2(x.x^{-1})=36$$

Finalmente tenemos:

$$E+2(1)=36 \leftrightarrow E+2=36$$

$$\therefore E=34$$

PROBLEMA 15 Sabiendo que:

$$A=(x-y)\,(x^2+xy+y^2)\,(x^6+x^3y^3+y^6)$$

$$B=(x+y)\,(x^2-xy+y^2)\,(x^6-x^3y^3+y^6)$$

Proporcionar el equivalente de A + B

Resolución: En la 1^{era} expresión:

$$A=\underbrace{(x-y)(x^2+xy+y^2)}_{\text{Diferencia de cubos}}(x^6+x^3y^3+y^6)$$

$$A=(x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)$$

$$A=(x^3)^3-(y^3)^3=x^9-y^9$$

team CALAPENSHKO

En la 2da expresión:

$$B = \underbrace{(x+y)(x^2-xy+y^2)}_{\text{Suma de cubos}}(x^6-x^3y^3+y^6)$$

$$B = (x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$$

$$B = (x^3)^3+(y^3)^3 = x^9+y^9$$

Finalmente tenemos:

$$A+B = x^9-y^9+x^9+y^9$$

$$\therefore\ A+B = 2x^9$$

PROBLEMA 16 Si:

$$\sqrt{x+2yz}+\sqrt{x-2yz} = 8yz$$

Calcular:

$$\sqrt{x+2yz}-\sqrt{x-2yz}$$

Resolución: Sea "k" el valor solicitado:

Condición: $\sqrt{x+2yz}+\sqrt{x-2yz} = 8yz$

Se pide: $\sqrt{x+2yz}-\sqrt{x-2yz} = k$

Multiplicando miembro a miembro se puede apreciar una diferencia de cuadrados:

$$\left(\sqrt{x+2yz}\right)^2-\left(\sqrt{x-2yz}\right)^2 = 8yz\,.\,k$$

$$x+2yz-x+2yz = 8yz\,.\,k$$

$$4yz = 8yz\,.\,k$$

$$4 = 8k$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 17 Calcular: $K = \dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{abc(ab+ac+bc)}$

Sabiendo que: $a = \sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$b = \sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

$c = \sqrt{5}-2\sqrt{3}$

Resolución: Una rapida inspección permite apreciar que: a + b + c = 0, luego por equivalencia condicional en "K" se tendrá:

$$K = \frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{abc(ab+ac+bc)}$$

$$K = \frac{3(abc)[-2(ab+ac+bc)]}{abc(ab+ac+bc)}$$

$$K = (3)(-2)$$

$$\therefore \quad K = -6$$

PROBLEMA 18 Calcular: $N = (a+b)^4 - (a-b)^4$

Sabiendo que: $ab = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$

$a^2 + b^2 = \sqrt[3]{10} + 1$

Resolución: La expresión N se puede expresar así:

$$N = \left[(a+b)^2\right]^2 - \left[(a-b)^2\right]^2$$

Por diferencia de cuadrados se tendrá:

$$N = \left[(a+b)^2 + (a-b)^2\right] . \left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

Por la equivalencia de Legendre tenemos:

$$N = \left[2(a^2+b^2)\right] . [4(ab)]$$

$$N = 8(a^2+b^2)(ab)$$

Reemplazando datos tenemos:

$$N = 8\left(\sqrt[3]{10}+1\right)\left(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1\right)$$

$$N = 8\underbrace{\left(\sqrt[3]{10}+1\right)\left(\sqrt[3]{10}^2 - \sqrt[3]{10} + 1\right)}_{\text{suma de cubos}}$$

$$N = 8\left[\left(\sqrt[3]{10}\right)^3 + (1)^3\right] = 8[10+1] = 8[11]$$

$$\therefore \quad N = 88$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 19 Calcular : $5x^3+3x+1$

Sabiendo que : $x=\sqrt[3]{1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}$

Resolución: Elevando al cubo a ambos miembros de la condición:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}\right)^3$$

Ahora por la equivalencia de Cauchy tenemos:

$$x^3=1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}+1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}+3.\sqrt[3]{\left(1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)}.(x)$$

$$x^3=2+3.\sqrt[3]{(1)^2-\left(\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)^2}.x$$

$$x^3=2+3.\sqrt[3]{1-\frac{126}{125}}.x$$

$$x^3=2+3.\left(-\frac{1}{5}\right).x \leftrightarrow x^3=2-\frac{3}{5}x$$

Multiplicando a ambos miembros por cinco obtenemos:

$$5x^3=10-3x \leftrightarrow 5x^3+3x=10$$

Finalmente sumando uno a cada miembro tenemos:

$$5x^3+3x+1=10+1$$

$$\therefore \quad 5x^3+3x+1=11$$

PROBLEMA 20 Calcular:

$$F=\frac{(a+b+c)(2-ab-ac-bc)}{1-abc}$$

Sabiendo que:

$$a^3+b^3+c^3=3 \ \wedge \ a^2+b^2+c^2=2$$

Resolución: De acuerdo con la equivalencia de Gauss tenemos:

$$\underbrace{a^3+b^3+c^3}-3abc=(a+b+c)(\underbrace{a^2+b^2+c^2}-ab-ac-bc)$$

$$3-3abc=(a+b+c)(2-ab-ac-bc)$$

$$3(1-abc)=(a+b+c)(2-ab-ac-bc)$$

Finalmente en la expresión F se tendrá:

$$F=\frac{3(1-abc)}{1-abc}$$

$$\therefore \quad F=3$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21 Simplificar:

$$M=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}$$

Resolución: Convenientemente hagamos:

$$\sqrt{7}-\sqrt{5}=a$$
$$\sqrt{5}-2\sqrt{2}=b$$
$$2\sqrt{2}-\sqrt{7}=c$$

Luego. $M=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$

Observar que: $a+b+c=0$

Entonces por equivalencia condicional:

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$$

Finalmente: $M=\dfrac{-2(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac}$

$$\therefore\ M=-2$$

PROBLEMA 22 Siendo x, y, z, reales que verifican:

$$x^2+y^2+z^2+14=2(x+2y+3z)$$

Calcular: $K=\dfrac{(x+y+z)xyz}{x^3+y^3+z^3}$

Resolución: Por condición tenemos: $x^2+y^2+z^2+14=2(x+2y+3z)$

$$x^2+y^2+z^2+14=2x+4y+6z$$

Reacomodando tenemos: $x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z+14=0$

Observa que $14=1+4+9$: $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=0$

Por binomio al cuadrado: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$

De donde se cumple: $x-1=0\ \wedge\ y-2=0\ \wedge\ z-3=0$

$$x=1\ \wedge\ y=2\ \wedge\ z=3$$

Finalmente en "K" tenemos: $K=\dfrac{(1+2+3).(1.2.3)}{1^3+2^3+3^3}$

$$K=\frac{(6).(6)}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\therefore\ K=1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Si $x, y \in \mathbb{R}$ tal que: $x^2 + y^2 = 8$

Resolución: Teniendo en cuenta la equivalencia de Legendre:

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$$

$$(x+y)^2 = 2\underbrace{(x^2+y^2)}_{8} - (x-y)^2$$

$$(x+y)^2 = 16 - (x-y)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Una rápida inspección permite observar que si $(x+y)$ es máximo, $(x+y)^2$ también es máximo, luego en (I) si $(x+y)^2$ es máximo, $(x-y)^2$ deberá ser mínimo, es decir cero.

$$(x+y)^2_{máx} = 16 - (x-y)^2_{mín}$$

$$(x+y)^2_{máx} = 16 - 0$$

$$(x+y)^2_{máx} = 16$$

$$\therefore\ (x+y)_{máx} = 4$$

PROBLEMA 24 Si:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

$$(a+b+c).(1+ab+ac+bc) = 32$$

Calcular:

$$a+b+c$$

Resolución: Por trinomio al cuadrado:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

Teniendo en cuenta al 1er dato:

$$(a+b+c)^2 = 2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$(a+b+c)^2 = 2(1+ab+ac+bc)$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2} = 1+ab+ac+bc$$

En el 2do dato tenemos:

$$(a+b+c).\frac{(a+b+c)^2}{2} = 32$$

$$(a+b+c)^3 = 64$$

$$\therefore\ a+b+c = 4$$

PROBLEMA 25 Reducir:

$$K=\left[\frac{\frac{2a+b}{2a-b}-\frac{2a-b}{2a+b}}{\frac{2a+b}{2a-b}+\frac{2a-b}{2a+b}}\right]\cdot\left[\frac{(2a+b)^2-4ab}{4}\right]$$

Resolución: Efectuando:

$$K=\left[\frac{(2a+b)^2-(2a-b)^2}{(2a+b)^2+(2a-b)^2}\right]\cdot\left[\frac{4a^2+4ab+b^2-4ab}{4}\right]$$

Aplicando Lagendre y simplificando:

$$K=\left[\frac{4(2a)(b)}{2\left[4a^2+b^2\right]}\right]\left[\frac{4a^2+b^2}{4}\right]$$

$$K=\frac{8ab\left(4a^2+b^2\right)}{8\left(4a^2+b^2\right)}$$

Finalmente: $\therefore\ K=ab$

PROBLEMA 26 Si:

$$x=\frac{2}{n}\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\right)$$

$$n=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ldots+a_n^2$$

Calcular:

$$M=\left(x-a_1\right)^2+\left(x-a_2\right)^2+\ldots+\left(x-a_n\right)^2$$

Resolución: Efectuando:

$$M=nx^2-2x\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\right)+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$$

Del dato:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{nx}{2}$$

Luego

$$M=nx^2-2x\left(\frac{nx}{2}\right)+n=nx^2-nx^2+n$$

Finalmente:

$$\therefore\ M=n$$

PROBLEMA 27 Si : $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1$, reducir :

$$E=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{abc-2(a+b+c)}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Por condición:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \leftrightarrow ab+ac+bc=abc$$

elevando al cuadrado:

$$(ab+ac+bc)^2=(abc)^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)=(abc)^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=(abc)^2-2abc(a+b+c)$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=abc[abc-2(a+b+c)]$$

Finalmente tenemos:

$$E=\frac{abc[abc-2(a+b+c)]}{abc-2(a+b+c)}$$

$$\therefore \quad E=abc$$

PROBLEMA 28 Si: $x,y,z \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$(xy+xz+yz)^2=3xyz(x+y+z)$$

Calcular:

$$K=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Resolución: De la condición tenemos:

$$(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2=xyz(x+y+z)$$

Reacomodando el segundo miembro:

$$(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2=(xy)(xz)+(xy)(yz)+(xz)(yz)$$

Por implicancia se cumple:

$$xy=xz=yz$$

De donde resulta evidente que:

$$x=y=z$$

Finalmente:

$$K=\frac{\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2}}{\sqrt{3x^2}}=\frac{3\sqrt{2x^2}}{\sqrt{3x^2}}=\frac{3\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x}$$

$$K=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore K=\sqrt{6}$$

PROBLEMA 29 Si: a, b, c y d son números reales que verifican la siguiente relación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 = a + b + c + d$$

Calcular: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

Resolución: La condición dada es:

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d + 1 = 0$$

Reescribiendo al uno = 1:

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Agrupando tenemos:

$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) + \left(d^2 - d + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Por ser números reales:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\left(d - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{1}{2}$$

Finalmente tenemos:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\therefore \; a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \frac{1}{2}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Sean a, b y c tres números reales distintos entre sí. Simplificar:

$$K = \frac{c^3(a-b)^3 - a^3(c-b)^3 + b^3(c-a)^3}{(a-b)^3 - (c-b)^3 + (c-a)^3}$$

Resolución: Introduciendo el signo negativo en cada término central, tanto en el numerador como en el denominador tenemos:

$$K = \frac{c^3(a-b)^3 + a^3(b-c)^3 + b^3(c-a)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

Leyes de exponentes en el numerador:

$$K = \frac{[c(a-b)]^3 + [a(b-c)]^3 + [b(c-a)]^3}{(a-b)^3 - (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

$$K = \frac{(ac-bc)^3 + (ab-ac)^3 + (bc-ab)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

Una rápida inspección permite apreciar que las bases, tanto en el numerador como en el denominador, de cada potencia suman cero. Ahora podemos utilizar la siguiente equivalencia:

$$A + B + C = 0 \quad \rightarrow \quad A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

En nuestra expresión:

$$K = \frac{3(ac-bc)(ab-ac)(bc-ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$K = \frac{3(a-b)(c)(a)(b-c)(c-a)(b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$K = \frac{3abc\,(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\therefore K = 3abc$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si: $a + b + c = 0$
Obtener:

$$R = \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}$$

A) 2 B) –3 C) 1
D) –2 E) 3

2. Si: $a + b + c = 0$
Reducir:

$$E = \frac{a+b-3c}{c} + \frac{b+c-3a}{a} + \frac{a+c-3b}{b}$$

A) 18 B) –16 C) –12
D) –8 E) –10

3. Efectuar:

$$L = (x+y)\left[(x+y)^2 - 2xy + (x-y)^2\right] - 2y^3$$

A) $2y^3$ B) y^3 C) $2x^3$
D) x^3 E) $x^3 + y^3$

4. Simplificar:

$$R = \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^2 - 3ab} - a$$

A) a B) a – b C) b
D) a + b E) ab

5. Simplificar:

$$\frac{\left[(a+b)^2-(b-a)^2\right]^2 - \left[(b-a)^2+(a+b)^2\right]^2}{(a^2-b^2)^2}$$

A) 1 B) 8 C) 2
D) –2 E) –4

6. Calcular:

$$A = \sqrt[128]{80(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)+1}$$

A) $\sqrt[4]{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3
D) 9 E) 1

7. Si: $a + b = 2 \wedge ab = 4$
Hallar el valor de:

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 1/3 E) 1/2

8. Si: $(x + y + z)^2 = 4z(x + y)$
Calcular:

$$R = \frac{x-z}{y} + \frac{y-z}{x}$$

A) 2 B) 4 C) 1
D) –2 E) –4

9. Si: $x^2 - x = 57$
Dar el equivalente de:

$$R = (x-3)(x+7)(x-8)(x+2)$$

A) 677 B) 345 C) 243
D) 49 E) 51

10. Calcular:

$$K = \sqrt{(x+1)^2(x^2+2x-1) - (x-1)^2(x^2-2x-1)}$$

para: $x = \sqrt[3]{2}$

A) 8 B) 4 C) 16
D) 2 E) $2\sqrt{2}$

11. Si: $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a+n} = \frac{4}{x+2a+n}$
Calcular:

$$\frac{x^2 + x + n^2 - n}{(x+n)^2}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 6
D) 2 E) 1

team CALAPENSHKO

12. Si: $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a + b + c = 0$

Determine el valor de:

$$E = \frac{(a^2 - ab + b^2)(a + b) + c^3}{6abc}$$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

13. Reducir:

$$R = (a + b + c + d)^2 + (a + b + c)^2 - (a + b + c + d)(2a + 2b + 2c)$$

A) d^2 B) $4a^2$ C) $4b^2$
D) c^2 E) a^2b^2

14. Siendo: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 62$

Entonces cual es el valor de:

$$\left(\frac{a + b}{\sqrt{ab}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

A) 3 B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{a + b}{2}$
D) ab E) 2

15. Si: $x^3 = -y^3 \wedge x \neq -y$

Calcular:

$$R = \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

A) 2 B) 1 C) –1
D) –2 E) 3

16. Si: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

Hallar el valor de:

$$M = \sqrt[3]{x^3 + 3x + 4}$$

A) 2 B) 5 C) 3
D) 1 E) 10

17. Reducir:

$$K = \frac{(x - y)^3 - (y - z)^3 + (z - x)^3}{(x - y)(z - x)(y - z)}$$

A) 3 B) 2 C) –3
D) 1 E) 6

18. Si: $6n^2 + 7n - 7 = 0$

Obtener el equivalente de:

$$M = \sqrt{(3n + 2)(2n + 1)(6n + 1)(n + 1)}$$

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

19. Sea: $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}$

Hallar el valor de:

$$x^3 - 3\sqrt[3]{7}x$$

A) $\sqrt[3]{7}$ B) 3 C) 2
D) 6 E) $3\sqrt[3]{7}$

20. Si: $\frac{a}{(b - 1)(b + 1)} = \frac{b}{(a + 1)(a - 1)}$; $a \neq b$

Calcular:

$$K = \frac{(a - b)^2}{1 - 3ab} + \frac{a^2 - b^2}{1 - b(a + 2b)}$$

A) 1 B) 2 C) –1
D) –2 E) 0

21. Simplificar:

$$\frac{(a + b)(a^3 - b^3) + (a - b)(a^3 + b^3)}{a^4 - b^4}$$

A) 1 B) 4 C) 2
D) 8 E) 16

22. Si: $a + b + c = 0$

Simplificar:

$$\frac{a^9 + b^9 + c^9 + 3(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}{6(a^3 + b^3 + c^3) - 15abc}$$

A) $9a^2b^2c^2$ B) $9a^3b^3c^3$ C) $9ab^2c^3$
D) 9abc E) 0

23. Si se verifica:

$$a^3+b^3+c^3=2(a+b)(b+c)(a+c)$$
$$a+b+c=1$$

Calcular el valor de:

$$\frac{1+5abc}{ab+bc+ac}$$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

24. Si: $x^8-7x^4+1=0$

qué valor de "A" verifica:

$$x^{10}-Ax^5-1=0$$

A) 7 B) 9 C) 8
D) 10 E) 11

25. Si: $a^3+b^3=a+b$

Reducir:

$$\frac{a^2+b^2}{1+ab}+\frac{1+3ab}{(a+b)^2}$$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

26. Si: $a^2+b^2=4ab$

Evaluar:

$$\frac{ab(a^4+b^4)}{a^6+b^6}$$

A) 7 B) $\frac{7}{26}$ C) 26
D) $\frac{26}{7}$ E) 14

27. Si: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Calcular:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}$$

A) –2 B) 0 C) 2
D) –3 E) 3

28. Calcular: $x^5+\frac{1}{x^5}$

Si:

$$\frac{1}{3-x}=x$$

A) 120 B) 201 C) 123
D) 49 E) 125

29. Si: $x-1=\sqrt{3}+1$

Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{(x^4+1)^2}{x^8+1}$$

A) $\frac{98}{97}$ B) $\frac{97}{98}$ C) $\frac{99}{97}$
D) $\frac{98}{99}$ E) $\frac{97}{99}$

30. Si: $x^3+y^3=20$; $xy=5$

Calcular:

$$M=(x+y)^3-15(x+y)+15$$

A) 40 B) 35 C) 20
D) 30 E) 15

31. Si: $(xy^{-1}+1)(yz^{-1}+1)(zx^{-1}+1)=0$

Calcular:

$$R=\sqrt{(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) 2
D) 4 E) 1

32. Calcular el producto abc, sabiendo que:

$$a+b+c=15$$
$$a^2+b^2+c^2=93$$
$$a^3+b^3+c^3=645$$

A) 70 B) 80
C) No se puede determinar
D) 60 E) 75

team CALAPENSHKO

33. Si:

$$H = \sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$$

Hallar:

$$R = \sqrt{H+16,25}$$

A) $2x+1$ B) $\frac{x+1}{2}$ C) $x+2$

D) $\frac{2x+1}{2}$ E) $2x-1$

34. Sean: (a, b, c) una terna de números enteros tales que:

$$a+b+c=24$$

$$a^2+b^2+c^2=210$$

$$abc=440$$

el menor número de esta terna es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

35. Sean: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

$$y = \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$$

$$z = \sqrt[3]{3+\sqrt{3}}$$

Calcular:

$$M = \frac{x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz)}{(y-z)^2+(x-z)^2}$$

A) 2 B) $\frac{1}{3}$ C) 4

D) 1 E) $\frac{1}{2}$

36. Sea: $a, b, c \in R/$

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^2b^2c^2$$

Calcular:

$$L = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$

D) 3 E) 4

37. Evaluar:

$$E = 4ab(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$$

Para:

$$a = \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2} \; ; \; b = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$$

A) 2 B) 3 C) –3
D) –4 E) 5

38. Sabiendo que:

$$F(x) = a^x + b^x + c^x$$

Calcular: abc, además:

$$F(n) = n \; ; \; n \in \{1; 2; 3\}$$

A) 4^{-1} B) 2^{-1} C) 3^{-1}

D) 6^{-1} E) 5^{-1}

39. Si: $ab(a+b) = 1$

$$a^2b^2(a^2+b^2) = 2$$

Hallar: $a^3b^3(a^3+b^3)$

A) 3 B) 2,5 C) 5
D) 4 E) 4,5

40. Si: $x + 2x^{-1} = 2$

Hallar:

$$x^9 - (x^4+x^2+1)(x^6+x^3+1)$$

A) 1 B) –1 C) x

D) –x E) $\frac{1}{x}$

41. Computar el valor de:

$$L = \frac{a^{27}+b^{27}+c^{27}-3a^9b^9c^9}{a^{18}+b^{18}+c^{18}-3a^6b^6c^6}$$

Sabiendo que:

$$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{11}}$$

$$b = \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$$

$$c = \sqrt[3]{5}$$

A) 40 B) 71 C) 120
D) 193 E) 234

42. De la condición:

$a^2(b^{-2}+c^{-2})+b^2(a^{-2}+c^{-2})+c^2(a^{-2}+b^{-2})=6$

Donde: $a \in \mathbb{R}^+$; $b \in \mathbb{R}^- \wedge c \in \mathbb{R}^+$

Calcular:

$$\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right)\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)$$

A) 3 B) –3 C) 9
D) –9 E) 1

43. Calcule:

$$M=\sum_{n=2}^{m} n\sqrt[n]{\frac{(a+b+c)^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}}$$

Sabiendo que:

$$\frac{1}{a}(b+c)+\frac{1}{b}(c+a)+\frac{1}{c}(a+b)=6$$

Donde: $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}^+$

A) $\frac{3}{2}m(m+2)$ B) $\frac{n(m-1)}{2}$
C) $\frac{3}{2}(m-1)(m+2)$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{2}m(m+1)$

44. Si:

$$ab\left(c\frac{1}{c}\right)+bc\left(a\frac{1}{a}\right)+ac\left(b\frac{1}{b}\right)=0$$

y $3abc = 1$.

Calcule: $\sqrt[3]{5F}$, siendo:

$$F=\frac{(ab)^6+(bc)^6+(ac)^6}{2,5}-\frac{(ab)^4+(bc)^4+(ac)^4}{5}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 3

45 Si:

$\sqrt{x-y+4}=2-\sqrt{3y-3x-9}$ / $\{x; y\} \subset \mathbb{R}$

Calcular el valor numérico de: $\frac{x+4y}{x+3}$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

46. Si se cumple: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Hallar el máximo valor de: $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$

A) 10 B) 2 C) 8
D) 1 E) –2

47. Si: $x^2+y^2=1$ tal que $\{x; y\} \subset \mathbb{R}$.

Halle el máximo valor de: $3x + 4y$

A) 10 B) 3 C) 12
D) 5 E) 7

48. Si: $\{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$ determinar el máximo valor de: $x + 2y + 3z$; de modo que se verifique: $7(x^2+y^2+1)=9-7z^2$

A) 4 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 2 E) 14

49. Calcular: $\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x-1}{y-1}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y+1}{x+1}\right)$

Si : $x=\sqrt[4]{9}+\sqrt{2}$; $y=\sqrt{3}-\sqrt[4]{4}$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) $2\sqrt{2}$

50. Si : $x^2=5x+1$. Calcular :

$$\frac{(x^3-140)\sqrt[3]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) 3 E) $\frac{1}{3}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 4

División de Polinomios

CAPACIDADES:

- Reconocer divisiones entre polinomios que originan nuevos polinomios.
- Conocer los diversos métodos para efectuar una división entre polinomios.
- Determinar el residuo de una división en forma directa.

PAOLO RUFFINI

	a_1	a_2	a_3	...	a_n
a	↓	b_1	b_2	...	b_{n-1}
	a_1	c_1	c_2	...	c_{n-1}

PAOLO RUFFINI (1 765 – 1 822), físico y matemático italiano. Nació en Valentano, entonces perteneciente a los Estados Pontificios, estudió en la Universidad de Módena, donde fue profesor de matemáticas y, en 1 814, rector. Ruffini fue el primero que realizó un intento, con éxito parcial (probablemente en 1 803 o 1 805), de demostrar la imposibilidad de resolver mediante procesos elementales de álgebra las ecuaciones generales de un grado superior a cuatro. Esta formulación, denominada teorema Abel – Ruffini, fue demostrada definitivamente por el matemático noruego Niels Henrik Abel. Ruffini murió en 1 822 en Módena.

Regla de Ruffini: División de polinomios con el divisor del tipo "x – a". El caso más importante de la división de polinomios es el que tiene por divisor un binomio del tipo x – a, siendo "a" un número entero; por ejemplo (x – 1), (x + 2), etc.

La regla de Ruffini se utiliza fundamentalmente cuando el polinomio dividendo tiene como única letra (variable) la x y el ya citado divisor (x – a). Utiliza los coeficientes del dividendo y el valor de "a", obteniéndose los coeficientes del polinomio cociente y el valor del resto (obsérvese que el resto siempre sera un número).

En el año 1 799 público el libro Teoría general de las ecuaciones, en el cual aparece la regla que lleva su nombre. Con posterioridad se han encontrado documentos antiguos de matemáticos chinos y árabes donde aparecen aplicaciones de la regla atribuida a Ruffini.

team CALAPENSHKO

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Dados dos polinomios:

$$D(x) \text{ y } d(x) \text{ tal que } [D]^\circ \geq [d]^\circ$$

La división denotada por:

$$D(x) \div d(x) \text{ ó } \frac{D(x)}{d(x)}$$

Es la operación matemática que tiene por objetivo determinar un nuevo polinomio Q(x) llamado cociente y como consecuencia otro polinomio R(x) denominado residuo de modo que verifiquen la siguiente relación

$$D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Denominada identidad fundamental de la división, donde:

D(x) = Dividendo
d(x) = Divisor
Q(x) = Cociente
R(x) = Residuo o resto

twitter.com/calapenshko

CLASES DE DIVISIÓN

1) **Exacta;** si el residuo es nulo, es decir $R(x) \equiv 0$

2) **Inexacta;** si el residuo es no nulo, es decir $R(x) \neq 0$

PROPIEDADES REFERIDAS AL GRADO

1) El grado del cociente se obtiene mediante la diferencia entre los grados del dividendo y divisor.

$$[Q]^\circ = [D]^\circ - [d]^\circ$$

2) Para divisiones inexactas el grado del residuo siempre será menor que el grado del divisor.

$$[R]^\circ < [d]^\circ$$

3) El máximo valor que puede alcanzar el grado del residuo será igual al grado del divisor disminuido en la unidad.

$$[R]^\circ_{máx} = [d]^\circ - 1$$

team CALAPENSHKO

MÉTODOS PARA EFECTUAR UNA DIVISIÓN ENTRE POLINOMIOS

I. MÉTODO DE WILLIAM HORNER:

Sólo considera a los coeficientes de los polinomios dados, los cuales deberán ser completos y ordenados inicialmente en forma decreciente. En el esquema se deberá considerar lo siguiente:

- El primer coeficiente del divisor se coloca con su mismo signo, mientras que los otros van con signo cambiado.
- La línea punteada (vertical) que separa los coeficientes del cociente con los coeficientes del residuo se traza a partir de la derecha contando una cantidad de espacios numéricamente igual al grado del divisor.

Veamos un ejemplo; sea la división:

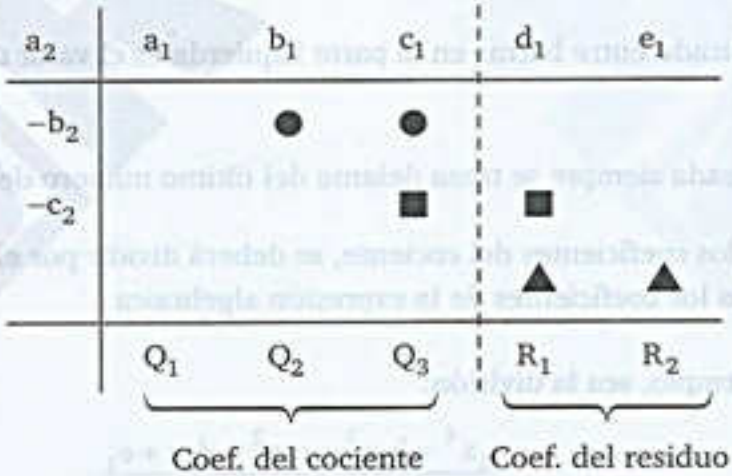
$$\frac{a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

Observar que los polinomios:

$$D(x) \equiv a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$$

$$d(x) \equiv a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Ya están completos y ordenados, luego en el esquema se tendrá:



Ejercicio: Dividir: $\frac{6x^4 - 23x^2 - 19x + 8}{2x^2 - 4x - 1}$

Resolución: Completando y ordenando a los polinomios datos tenemos:

$$D(x) \equiv 6x^4 - 23x^2 - 19x + 8$$

team CALAPENSHKO

¡falta el término cúbico! Se completará con coeficiente cero, veamos:

$$D(x) \equiv 6x^4 + 0x^3 - 23x^2 - 19x + 8$$

$$d(x) \equiv 2x^2 - 4x - 1$$

Ahora en el esquema se tendrá:

2	6	0	− 23	− 19	8
4		12	3		
1			24	6	
				8	2
	3	6	2	− 5	10

De donde:

$$Q(x) \equiv 3x^2 + 6x + 2 \ \wedge \ R(x) \equiv -5x + 10$$

PROPIEDAD

Si una división es exacta al utilizar el método de Horner, los polinomios datos podrán ser ordenados en forma creciente.

II. REGLA GENERALIZADA DE PAOLO RUFFINI:

Se utiliza cuando el divisor es un binomio de primer grado, es decir: $d(x) \equiv ax + b$. En el esquema se deberá considerar lo siguiente:

- El número ubicado entre barras en la parte izquierda es el valor de x cuando el divisor se iguala a cero.
- La línea punteada siempre se traza delante del último número de la horizontal.
- Para obtener los coeficientes del cociente, se deberá dividir por el coeficiente principal del divisor a todos los coeficientes de la expresión algebraica.

Veamos un ejemplo, sea la división:

$$\frac{a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1}{ax + b}$$

Observar que el dividendo ya está completo y ordenado en forma decreciente.

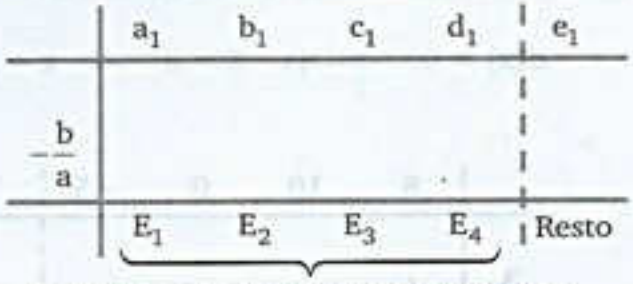
$$D(x) \equiv a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$$

$$d(x) \equiv ax + b \rightarrow ax + b = 0$$

$$x = -b/a$$

team CALAPENSHKO

Ahora en el esquema se tendrá:



Coeficiente de la expresión algebraica

Si: $a = 1$

E_1, E_2, E_3 y E_4 son los coeficientes del cociente

Si: $a \neq 1$

$\frac{E_1}{a}$, $\frac{E_2}{a}$, $\frac{E_3}{a}$ y $\frac{E_4}{a}$ serán los coeficientes del cociente.

Ejercicio: Dividir: $\dfrac{2x^3+4x^2-5x+1}{x+1}$

Resolución: $D(x) \equiv 2x^3+4x^2-5x+1 \wedge d(x) \equiv x+1$

Observar que en la forma del divisor tenemos $a = 1$, esto involucra que en el esquema se obtendra directamente los coeficientes del cociente.

$$d(x) = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

	2	4	−5	1
−1	↓	−2	−2	7
	2	2	−7	8

De donde:

$$Q(x) \equiv 2x^2+2x-7 \wedge R(x) \equiv 8$$

Ejercicio: Dividir: $\dfrac{8x^4+10x^3-5x+1}{4x-3}$

Resolución: Completando y ordenando al dividendo:

$$D(x) \equiv 8x^4+10x^3+0x^2-5x+1$$
$$d(x) \equiv 4x-3$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Observar que en la forma del divisor tenemos $a \neq 1$ ($a = 4$), luego en el esquema cada coeficiente de la expresión se deberá dividir por 4.

$$d(x) = 0 \rightarrow 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

	8	10	0	−5	1
$\frac{3}{4}$	↓	6	12	9	3
	8	16	12	4	4
÷4	2	4	3	1	

Coef de cociente

$$Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \wedge R(x) = 4$$

TEOREMA DEL RESTO

Es una regla que permite determinar en forma directa el residuo de cierta división. El teorema del resto inicialmente dado por René Descartes formula por enunciado lo siguiente: "En toda división de la forma $P(x) \div (ax + b)$; $a \neq 0$ el residuo es igual al valor numérico de $P(x)$ cuando $x = -\frac{b}{a}$".

Es decir:

$$\frac{P(x)}{ax + b} \rightarrow \text{Resto} = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Ejercicio: Determinar el residuo de dividir:

$$\frac{x^7 + 2x^5 - x + 1}{x - 1}$$

Por el teorema del resto: $x - 1 = 0$

$$x = 1$$

El polinomio es: $P(x) = x^7 + 2x^5 - x + 1$

El residuo es: $P(1) = (1)^7 + 2(1)^5 - (1) + 1$

$$P(1) = 1 + 2 - 1 + 1$$

$$\therefore \quad R(x) = 3$$

OBSERVACIÓN

El teorema del resto se podrá aplicar para un divisor de grado arbitrario teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Se iguala el divisor a cero, despejando solo por transposición de términos, letras de números (variables de constantes)

2) El valor numérico obtenido para la parte literal se reemplaza en el dividendo, siendo el resultado final, el residuo de la división.

Ejercicio: Determinar el residuo de la división:

$$\frac{x^5+2x^4+x^3-x+2}{x^2+2}$$

Resolución: Por teorema del resto: $x^2+2=0$

$$x^2=-2$$

Ahora en el dividendo se deberá buscar a x^2 para luego reemplazarlo por –2, veamos:

$$D(x)\equiv x^5+2x^4+x^3-x+2$$
$$D(x)\equiv (x^2)^2x+2(x^2)^2+(x^2)x-x+2$$

Reemplazando x^2 por –2

$$R(x)\equiv (-2)^2x+2(-2)^2+(-2)x-x+2$$
$$R(x)\equiv 4x+8-2x-x+2$$
$$\therefore\ R(x)\equiv x+10$$

RESTOS ESPECIALES

Si al dividendo y al divisor se le multiplica (o divide) simultáneamente por una expresión diferente de cero, el cociente no se altera pero el residuo quedará multiplicado (o dividido) por dicha expresión.

- División inicial: $\frac{D}{d}$ → Q, R
- División final: $\frac{D\,.\,k}{d\,.\,k}$ → Q, $R'\equiv R\,.\,k$

PROPIEDADES ADICIONALES

1) Si R es el residuo de dividir P(x) entre (x – a), entonces: R = P(a)

2) Si al dividir un polinomio en forma separada por dos o más expresiones primos entre si se obtiene siempre el mismo residuo R, la división de dicho polinomio por el producto de todas las expresiones mencionadas también dejará residuo R.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Determine el cociente de dividir:

A) $\frac{2x^3+x^2-x+1}{x+1}$

B) $\frac{x^4-x^2+x+10}{x-1}$

C) $\frac{3x^3-2x+4}{x+2}$

D) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x-1}$

E) $\frac{x^3-x^2+x+1}{x+1}$

2. Determine el residuo de dividir:

A) $\frac{x^3-2x^2+x+1}{x^2+x-1}$

B) $\frac{2x^4+x^3-2x^2+x-4}{x^2+2x+2}$

C) $\frac{x^4+3x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1}$

D) $\frac{x^5-2x^3+x+1}{x^3-2x^2+x+1}$

E) $\frac{x^5+x^4-x^2+2}{x^3+x+1}$

3. Marcar con un visto (√) en cada recuadro que corresponda a divisiones exactas.

A) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ ☐

B) $\frac{x^4-2x^2+x+3}{x^2+x+3}$ ☐

C) $\frac{x^5+2x+1}{x-1}$ ☐

D) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$ ☐

E) $\frac{x^4-2x^3-x+1}{x^2+x+1}$ ☐

4. Determina el grado del cociente y el grado máximo del residuo en cada división mostrada en el cuadro adjunto:

DIVISIÓN	$[Q]^o$	$[R]^o_{máx}$
$\frac{x^5-x^2+x-1}{x^3+x-1}$		
$\frac{x^4}{x^3-4x^2+x-1}$		
$\frac{x^7+10}{x^5-2x^4-x^2+1}$		
$\frac{x^{100}}{x^{80}-x^{60}-x^4-x+1}$		
$\frac{x^{2008}}{x^{1994}-x^{1976}+x^{1972}-1}$		

5. Determine el residuo de dividir:

A) $\frac{x^7-x+1}{x+1}$ B) $\frac{x^{12}-16x^8-x+2}{x+2}$

C) $\frac{x^5-x^3+x+1}{x^2-1}$ D) $\frac{x^{10}-x^7+x^6+4}{x^3+1}$

6. Determine lo pedido en cada caso:

A) Suma de coeficientes del cociente de dividir

$$\frac{x^5+2}{x^3-x^2+x-1}$$

B) El término independiente de x en el residuo de:

$$\frac{x^4-x^2-x-5}{x^2-x-1}$$

C) El valor de a + b en la división exacta:

$$\frac{2x^4-x^3+x^2+ax+b}{x^2+x+1}$$

D) El valor de a – b en la división de residuo 2x – 3

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-ax-b}{x^2+x-1}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Determine la suma de los coeficientes del residuo de dividir:

$$\frac{10x^5+3x^4-17x^3-x^2-5}{3x^2+2x^3-x-2}$$

Resolución: Reconociendo y completando datos:

$$D(x) \equiv 10x^5+3x^4-17x^3-x^2+0x-5$$
$$d(x) \equiv 2x^3+3x^2-x-2$$

Por el método de Horner:

2	10	3	−17	−1	0	−5
−3		−15	5	10		
1			18	−6	−12	
2				−9	3	6
	5	−6	3	−6	−9	1

Obtenemos: $R(x) \equiv -6x^2-9x+1$

Para $x=1$: $R(1) = -6-9+1$

$\therefore \quad R(1) = -14$

PROBLEMA 2 Si Q(x) es el cociente de dividir:

$$\frac{x^5+(a+1)x^4+(a+b)x^3+(b+1)x^2+ax+b}{x^2+ax+b}$$

Calcular: Q(3)

Resolución: Hallemos el cociente de la división según el método de Horner

1	1	(a+1)	(a+b)	(b+1)	a	b
−a		−a	−b			
−b			−a	−b		
				0	0	
					−a	−b
	1	1	0	1	0	0

Coeficientes de Q(x)

$$Q(x) \equiv x^3+x^2+1$$
$$Q(3) = 3^3+3^2+1$$

$\therefore \quad Q(3) = 37$

PROBLEMA 3 Calcular Q(−2). Siendo Q(x) el cociente de dividir:

$$(x^5 - 2x^3 + x^2 + 1) \div (x^3 - x + 1)$$

Resolución: Completando a los polinomios dividendo y divisor, según el método de Horner procedemos de la manera siguiente

1	1	0	−2	1	0	1
0		0	1	−1		
1			0	0	0	
−1				0	−1	1
	1	0	−1	0	−1	2

Ahora tenemos:

$$Q(x) = x^2 - 1$$

Haciendo x = − 2:

$$Q(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1$$
$$\therefore Q(-2) = 3$$

PROBLEMA 4 Determine el término independiente de x en el cociente de dividir:

$$\frac{x^5 - x - 10}{x + 2}$$

Resolución: De acuerdo con la regla de Ruffini procedemos de la manera siguiente:

	1	0	0	0	−1	−10
−2	↓	−2	4	−8	16	−30
	1	−2	4	−8	15	−40

Observa que:

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 15$$
$$\therefore \text{TI de } x = 15$$

PROBLEMA 5 Proporcione el resto de dividir:

$$\frac{6x^4 - x^3 + x^2 + 4x - 1}{3x - 2}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: De acuerdo con la regla de Ruffini, el resto de la división se obtiene de la manera siguiente:

	6	−1	1	4	−1
$\frac{2}{3}$	↓	4	2	2	4
	6	3	3	6	3

$\therefore R(x) = 3$

PROBLEMA 6 Indicar el resto de dividir:

$$\frac{x^7 - 2x^6 + x^4 - x + 1}{x^3 + 1}$$

Resolución: Por el teorema del resto:

$$x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$$

En el dividendo tenemos:

$$D(x) = x^7 - 2x^6 + x^4 - x + 1$$

Formando x^3 en el dividendo:

$$D(x) = (x^3)^2 . x - 2(x^3)^2 + (x^3) . x - x + 1$$

Reemplazando $x^3 = -1$ tenemos:

$$R(x) = (-1)^2 . x - 2(-1)^2 + (-1) . x - x + 1$$
$$R(x) = x - 2 - x - x + 1$$
$$\therefore R(x) = -x - 1$$

PROBLEMA 7 Calcular "n + k" si la división:

$$\frac{15x^4 + 41x^3 + 71x^2 + nx + 2k}{3x^2 + 4x + 5}$$

es exacta.

Resolución: Por condición R(x) = 0, ahora según el método de Horner se tendrá:

3	15	41	71	n	2k
−4		−20	−25		
−5			−28	−35	
				−24	−30
	5	7	6	0	0

team CALAPENSHKO

En la columna del residuo se cumple:

$$n - 35 - 24 = 0 \Rightarrow n = 59$$

$$2k - 30 = 0 \Rightarrow k = 15$$

$$\therefore\ n + k = 74$$

PROBLEMA 8 Calcular "a – b" si $R(x) \equiv 6 - 3x$, es el residuo de dividir:

$$\frac{10x^4 + 16x^3 - 17x^2 - ax - b}{5x^2 - 2x + 3}$$

Resolución: Ordenando cuidadosamente los datos en el esquema de Horner se tendrá:

5	10	16	– 17	– a	– b
2		4	– 6		
– 3			8	– 12	
				– 6	9
	2	4	– 3	– 3	6

En la columna del residuo se cumple:

$$-a - 12 - 6 = -3 \Rightarrow a = -15$$

$$-b + 9 = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\therefore\ a - b = -18$$

PROBLEMA 9 Calcular "m" si la división:

$$\frac{21x^4 - 41x^3 - 23x^2 + mx - 16}{3x - 5}$$

deja como resto 4.

Resolución: Teniendo en cuenta al método de Ruffini procedemos del modo siguiente:

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{3}$$

team CALAPENSHKO

	21	−41	−23	m	−16
$\frac{5}{3}$	↓	35	−10	−55	$\frac{5}{3}(m-55)$
	21	−6	−33	(m − 55)	4

En la columna del residuo tenemos:

$$-16 + \frac{5}{3}(m-55) = 4$$

$$\frac{5}{3}(m-55) = 20$$

$$m - 55 = 12$$

$$\therefore \quad m = 67$$

PROBLEMA 10 A continuación se muestra el esquema de una división que ha sido efectuada según el método de Ruffini:

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	20
M_1		12	M_2	M_3	M_4	−28
	A_1	A_2	2	A_3	A_4	A_5

Calcular: $K = M_1 . A_1 + N_3 + M_2 + M_1 . A_4 - A_5$

Resolución:

Del esquema tenemos: $M_1 . A_1 = 12$

$N_3 + M_2 = 2$

$M_1 . A_4 = -28$

$20 - 28 = A_5 \leftrightarrow A_5 = -8$

Finalmente tenemos: $K = 12 + 2 + (-28) - (-8)$

$K = 14 - 28 + 8$

$\therefore \quad K = -6$

PROBLEMA 11 A partir de la división

$$\frac{5x^{401} - 2x^{400} + x^{399} + 6x^2 + 5x + 11}{x - 1}$$

Calcular la suma de los coeficientes de su cociente.

Resolución: De acuerdo con el método de Ruffini procedemos de la manera siguiente:

401 números

	5	−2	1	0	0	....	0	6	5	11
1	↓	5	3	4	4	....	4	4	10	15
	5	3	4	4	4	....	4	10	15	26

397 números

Sea "K" la suma de los coeficientes del cociente, luego:

$$K = 5+3+\underbrace{4+4+4+....+4}_{397\text{ veces}}+10+15$$

$$K = 8+(4)(397)+25$$

$$K = 8+1588+25$$

$$\therefore\ K = 1621$$

PROBLEMA 12 Determinar el resto de dividir:

$$\frac{(x^2-x-4)^{2008}+2x^2-2x+1}{x^2-x-3}$$

Resolución: De acuerdo con el teorema del resto procedemos de la manera siguiente:

$$d(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$$

$$x^2-x=3$$

$$D(x) \equiv (x^2-x-4)^{2008}+2x^2-2x+1$$

$$D(x) \equiv \left[(x^2-x)-4\right]^{2008}+2(x^2-x)+1$$

Reemplazando: x^2-x por 3

$$R(x) \equiv (-1)^{2008}+2(3)+1$$

$$R(x) \equiv 1+6+1$$

$$\therefore\ R(x) \equiv 8$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 13 Proporcionar el residuo de dividir:

$$\frac{x^7(x-2)^7 + 2x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x - 1}$$

Resolución: Por el teorema del resto:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 1$$

$$D(x) \equiv \underbrace{x^7.(x-2)^7} + 2x^2 - 4x + 7$$

$$D(x) \equiv [x(x-2)]^7 + 2x^2 - 4x + 7$$

$$D(x) \equiv \left[x^2 - 2x\right]^7 + 2(x^2 - 2x) + 7$$

Reemplazando $x^2 - 2x$ por 1

$$R(x) \equiv (1)^7 + 2(1) + 7$$

$$R(x) \equiv 1 + 2 + 7$$

$$\therefore\ R(x) \equiv 10$$

PROBLEMA 14 Calcular "m + n + p" si la división:

$$\frac{8x^5 + 4x^3 + mx^2 + nx + p}{2x^3 + x^2 + 3}$$

deja como resto: $R(x) \equiv (5x + 2)(2x + 3)$

Resolución: Los polinomios datos son:

- $D(x) \equiv 8x^5 + 0x^4 + 4x^3 + mx^2 + nx + p$
- $d(x) \equiv 2x^3 + x^2 + 0x + 3$
- $R(x) \equiv (5x + 2)(2x + 3)$
  $\equiv 10x^2 + 15x + 4x + 6$
  $\equiv 10x^2 + 19x + 6$

Ahora en el esquema de Horner se tendrá:

2	8	0	4	m	n	p
−1		−4	0	−12		
0			2	0	6	
−3				−3	0	−9
	4	−2	3	10	19	6

En la columna del residuo se cumple:

$$m - 12 - 3 = 10 \Rightarrow m = 25$$

$$n + 6 = 19 \Rightarrow n = 13$$

$$p - 9 = 6 \Rightarrow p = 15$$

$$\therefore\ m + n + p = 53$$

PROBLEMA 15 Calcular "a + b" si la siguiente división es exacta.

$$\frac{ax^5 + bx^4 - x^3 - 5x + 7x^2 - 12}{3x^2 + x - 4}$$

Resolución: Como la división es exacta, dividendo y divisor podrán ser ordenados en forma creciente al aplicar el método de Horner.

$$D(x) \equiv -12 - 5x + 7x^2 - x^3 + bx^4 + ax^5$$
$$d(x) \equiv -4 + x + 3x^2$$

−4	−12	−5	7	−1	b	a
−1		−3	−9			
−3			−2	−6		
				−1	−3	
					−2	−6
	3	2	1	2	0	0

En la columna del residuo se cumple:

$$b - 3 - 2 = 0 \ \wedge \ a - 6 = 0$$
$$b = 5 \ \wedge \ a = b$$

$$\therefore \ a + b = 11$$

PROBLEMA 16 Al dividir un polinomio P(x) separadamente por (x − 3) y (x − 2) se obtienen como residuos 5 y 2 respectivamente ¿Cuál es el residuo de dividir P(x) entre [(x−3)(x−2)]?

Resolución:

Por condición : $P(x) \div (x-3) \rightarrow R(x) = 5$

Por propiedad : $P(3) = 5$ .....(1)

Por condición : $P(x) \div (x-2) \rightarrow R(x) = 2$

Por propiedad : $P(2) = 2$ .....(2)

Ahora se plantea : $P(x) \div [(x-3)(x-2)] \rightarrow R(x) = ?$

Observar que el grado del divisor es 2, luego el grado máximo del residuo será 1 con lo cual tenemos:

$$R(x) \equiv ax + b$$

Por identidad fundamental:

$$P(x) \equiv (x-3)(x-2)Q(x) + ax + b$$

Haciendo x = 3 obtenemos :

$$P(3) = 3a + b$$

Utilizando (1) conseguimos:

$$3a + b = 5 \quad \text{.....(3)}$$

team CALAPENSHKO

Haciendo $x = 2$ obtenemos :

$$P(2) = 2a + b$$

Utilizando (2) conseguimos:

$$2a + b = 2 \quad \text{.....(4)}$$

Resolviendo (3) y (4) tenemos:

$$a = 3 \quad y \quad b = -4$$

$$\therefore \quad R(x) = 3x - 4$$

PROBLEMA 17 Determine el residuo de dividir:

$$\frac{(x-2)^{2005} + (x-3)^{2007}}{(x-2)(x-3)}$$

Resolución: Por la identidad fundamental de la división:

$$D(x) \equiv d(x) \,.\, Q(x) + R(x)$$

$$(x-2)^{2005} + (x-3)^{2007} \equiv \underbrace{(x-2)(x-3)}_{2^\circ} Q(x) + \underbrace{R(x)}_{1^\circ}$$

Una rápida inspección permite observar que el residuo como máximo será de 1° grado, es decir: $R(x) \equiv ax + b$

$$(x-2)^{2005} + (x-3)^{2007} \equiv (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

Para $x = 2$: $\quad -1 = 2a + b$ ..... (I)
Para $x = 3$: $\quad 1 = 3a + b$ ..... (II)

Restando (II) – (I): $2 = a \wedge b = -5$

$$\therefore R(x) \equiv 2x - 5$$

PROBLEMA 18 Al efectuar la división del polinomio $P(x)$ entre $(x^2 + 1)$ se obtiene como residuo $(x-2)$. Determine el residuo de dividir el cubo de $P^3(x)$ entre $(x^2 + 1)$.

Resolución: Del enunciado tenemos:

$$P(x) \div (x^2 + 1) \rightarrow R(x) \equiv x - 2$$

Por identidad fundamental:

$$P(x) \equiv (x^2 + 1) \,.\, Q(x) + (x - 2)$$

Se pide el resto de dividir:

$$\frac{\left[(x^2+1) \,.\, Q(x) + (x-2)\right]^3}{x^2+1}$$

$$\frac{\left[(x^2+1).Q(x)\right]^3 + (x-2)^3 + 3(x^2+1).Q(x).(x-2)\left[(x^2+1).Q(x)+(x-2)\right]}{x^2+1}$$

Porelteoremadelresto:

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$$

Observar que al reemplazar $x^2=-1$ en el numerador sólo queda $(x-2)^3$ cuyo equivalentees:

$$(x-2)^3=x^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3$$
$$(x-2)^3=x^2\,.\,x-6x^2+12x-8$$

Donde nuevamente $x^2=-1$:

$$R(x)\equiv(-1)\,.\,x-6\,.\,(-1)+12x-8$$
$$R(x)\equiv -x+6+12x-8$$

$$\therefore\quad R(x)\equiv 11x-2$$

PROBLEMA 19 Determine el residuo de dividir:

$$\frac{x^{21}+1}{x^2+x+1}$$

Resolución: Con la finalidad de transformar al divisor en binomio multiplicaremos a cada término de la división mostrada por $(x-1)$

$$\frac{x^{21}+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^{21}+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}=\frac{(x^{21}+1)(x-1)}{x^3-1}$$

Ahora hallaremos el residuo de esta nueva división según el teorema del resto:

$$d(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3-1=0$$
$$x^3=1$$

En busca de x^3 en el dividendo de la nueva división:

$$D(x)\equiv(x^{21}+1)(x-1)$$
$$D(x)\equiv\left[(x^3)^7+1\right](x-1)$$

Reemplazando $x^3=1$ se tendrá:

$$R'(x)\equiv 2(x-1)$$

Por propiedad como al dividendo y al divisor se ha multiplicado por $(x-1)$, el residuo inicial también queda multiplicado por $(x-1)$.

Si R(x) es el residuo inicial, se cumple:

$$(x-1)\,.\,R(x)\equiv R'(x)$$
$$(x-1)\,.\,R(x)\equiv 2\,.\,(x-1)$$

$$\therefore\quad R(x)\equiv 2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 20 Calcular: $E = ab - cd$, si la división:

$$\frac{x^4 + 4dx^3 + 6ax^2 + 4bx + c}{x^3 + 3dx^2 + 3ax + b}$$

es exacta.

Resolución: Por condición la división es exacta, luego $R(x) = 0$ y según el método de Horner tenemos:

1	1	4d	6a	4b	c
$-3d$		$-3d$	$-3a$	$-b$	
$-3a$			$-3d^2$	$-3ad$	$-bd$
$-b$					
	1	d	0	0	0

En las columnas del residuo:

$$6a - 3a - 3d^2 = 0 \leftrightarrow 3a = 3d^2 \; ; \; 4b - b - 3ad = 0 \leftrightarrow 3b = 3ad$$
$$a = d^2 \qquad\qquad b = ad$$

De ambos resultados tenemos:

$$a = d^2 \wedge b = d^3$$

Asimismo también se cumple que:

$$c = bd \leftrightarrow c = d^4$$

Finalmente:

$$E = ab - cd \leftrightarrow E = d^5 - d^5$$
$$\therefore \; E = 0$$

PROBLEMA 21 Determine el cociente completo de dividir:

$$\frac{\dfrac{4x^3 + 16x^2 + 19x + 6}{x + 2}}{\dfrac{1}{2}x + 1}$$

Resolución: Efectuando la división propuesta en el numerador según la regla de Ruffini:

	4	16	19	6
-2		-8	-16	-6
	4	8	3	0

Observa que el cociente aquí obtenido es: $4x^2 + 8x + 3$; luego en la división:

$$\frac{4x^2 + 8x + 3}{\dfrac{1}{2}x + 1}$$

Ahora según la regla generalizada de Ruffini tenemos:

	4	8	3
−2	↓	−8	0
	4	0	3

$\div\frac{1}{2}$: 8 0

De donde el cociente es: 8x; pero se pide el cociente completo (c. c), luego:

$$\therefore\ c.c = 8x + \frac{3}{\frac{x}{2}+1}$$

PROBLEMA 22 Si: $P(x) = (a-b)x^5 + (b-c)x^4 + (c-a)x^3 + (a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a)$.
Calcular la suma de los coeficientes del cociente de dividir:

$$\big((P(x) \div (x-1)) \div (x+1)\big) \div ((a-b)x + a - c)$$

Resolución: De acuerdo con el criterio de las divisiones sucesivas procedemos del modo siguiente:

	(a − b)	(b − c)	(c − a)	(a − b)	(b − c)	(c − a)
1	↓	a − b	a − c	0	a − b	a − c
	a − b	a − c	0	a − b	a − c	0
−1	↓	−a+b	−b+c	b − c	−a+c	
	a − b	b − c	−b+c	a − c	0	
$-\frac{a-c}{a-b}$	↓	−a+c	a − c	−a+c		
	a − b	b − a	a − b	0		

$\div(a-b)$: 1 −1 1

El cociente de la división es: $Q(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore Q(1) = 1$

PROBLEMA 23 Proporcionar el residuo de dividir:

$$\frac{8x^2(5x^{38}+1) + 20(x^{20}+1) + 10m(x^{10}+1) + 2mx^6(4x^2+3)}{4x^4+4}$$

sabiendo que dicho residuo es de grado cero.

team CALAPENSHKO

Resolución: Por el teorema del resto: $4x^4 + 4 = 0 \leftrightarrow x^4 = -1$; ahora en el dividendo:

$$D(x) \equiv 40x^{40} + 8x^2 + 20x^{20} + 20 + 10mx^{10} + 10m + 8mx^8 + 6mx^6$$

$$D(x) \equiv 40(x^4)^{10} + 8x^2 + 20(x^4)^{5} + 20 + 10m(x^4)^{2}.x^2 + 10m + 8m(x^4)^2 + 6m(x^4).x^2$$

Reemplazando x^4 por -1, tenemos:

$$R(x) \equiv 40 + 8x^2 - 20 + 20 + 10mx^2 + 10m + 8m - 6mx^2$$

$$R(x) \equiv (4m+8)x^2 + (40 + 18m)$$

Por condición: $[R]^\circ = 0$, entonces:

$$4m + 8 = 0 \leftrightarrow m = -2$$

$$R(x) \equiv 40 + 18(-2) = 40 - 36$$

$$\therefore \; R(x) \equiv 4$$

PROBLEMA 24 Determine el resto de dividir:

$$\frac{\left[(x^2)^{n+2} - 2x^{2n+1}\right](x^3-2)^{2n} + x^{2n+1}}{x^2+x+1}; \; n \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución: Por el teorema del resto: $x^2 + x + 1 = 0 \leftrightarrow x^2 = -x - 1$

En el dividendo tenemos:

$$D(x) \equiv (x^{2n+4} - 2x^{2n+1})(x^3-2)^{2n} + x^{2n+1}$$

$$D(x) \equiv x^{2n+1}(x^3-2).(x^3-2)^{2n} + x^{2n+1}$$

$$D(x) \equiv x^{2n+1}(x^3-2)^{2n+1} + x^{2n+1}$$

$$D(x) \equiv x^{2n+1}\left[(x^3-2)^{2n+1} + 1\right]$$

$$D(x) \equiv x^{2n+1}\left[(x^2.x-2)^{2n+1} + 1\right]$$

Utilizando la condición:

$$R(x) \equiv x^{2n+1}\left[((-x-1).x-2)^{2n+1} + 1\right]$$

$$R(x) \equiv x^{2n+1}\left[(-x^2-x-2)^{2n+1} + 1\right]$$

$$R(x) \equiv x^{2n+1}\left[(\underbrace{-1-x^2-x-1}_{\text{es cero}})^{2n+1} + 1\right]$$

$$R(x) \equiv x^{2n+1}\left[(-1)^{2n+1} + 1\right]$$

$$R(x) \equiv x^{2n+1}[-1+1] \equiv x^{2n+1}.0$$

$$\therefore R(x) = 0$$

PROBLEMA 25 Si $R(x) \equiv 3x - 7$ es el residuo de dividir:

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - mx + n}{x^2 - x - 1}$$

Calcular: $m + n$

Resolución: De acuerdo con el método de Horner procedemos de la manera siguiente

1	2	−3	1	−m	n
1		2	2		
1			−1	−1	
				2	2
	2	−1	2	3	−7

En las columnas del residuo tenemos:

$$-m - 1 + 2 = 3 \quad \wedge \quad n + 2 = -7$$
$$-m + 1 = 3 \quad \wedge \quad n + 2 = -7$$
$$m = -2 \quad \wedge \quad n = -9$$
$$\therefore \quad m + n = -11$$

PROBLEMA 26 Si $R(x) \equiv -3x - 6$ es el residuo de dividir:

$$\frac{ax^4 + x^3 + bx^2 + 11x + 2}{3x^2 + 5x + 2}$$

Calcular: $a + b$

Resolución: Por identidad fundamental:

$$D(x) \equiv d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$ax^4 + x^3 + bx^2 + 11x + 2 \equiv (3x^2 + 5x + 2) \cdot Q(x) - 3x - 6$$

Haciendo $x = -1$:

$$a(-1)^4 + (-1)^3 + b(-1)^2 + 11(-1) + 2 \equiv \underbrace{(3 - 5 + 2)}_{0} \cdot Q(-1) + 3 - 6$$

Reduciendo tenemos:

$$a - 1 + b - 11 + 2 = -3$$
$$a + b - 10 = -3$$
$$\therefore \quad a + b = 7$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 27 Calcular: $a+b+c$, sabiendo que el cociente de la división exacta:

$$\frac{x^{2a}+x^{a}+(b-1)x+(c-1)}{x^2-x+1}$$

es un polinomio de segundo grado.

Resolución: Por condición tenemos:

$$[Q]^\circ = 2 \leftrightarrow 2a-2=2$$
$$2a=4 \leftrightarrow a=2$$

Ahora la división será:

$$\frac{x^4+x^2+(b-1)x+(c-1)}{x^2-x+1}$$

Por el método de Horner:

	1	0	1	(b − 1)	(c − 1)
1		1	−1		
−1			1	−1	
				1	−1
	1	1	1	0	0

En las columnas del residuo:

$$b-1-1+1=0 \ \wedge \ c-1-1=0$$
$$b=1 \ \wedge \ c=2$$
$$\therefore \ a+b+c=5$$

PROBLEMA 28 Luego de efectuar una división empleando la regla de Ruffini se obtiene:

	6	a	6	b	d	c
$x=\frac{m}{n}$		*	*	*	*	*
	6	−1	3	−9	1	7

Calcular: $a+b+c+d$

Resolución: En la tercera columna del dividendo podemos observar que el número que falta es -3 ¿Por qué? por qué $6+(-3)=3$.

Por lo deducido antes:

$$(-1).\left(\frac{m}{n}\right)=-3$$
$$\frac{m}{n}=3$$

Ahora en el esquema:

	6	a	6	b	d	c
3			−3			
	6	−1	3	−9	1	7

Completando el esquema:

twitter.com/calapenshko

	6	a	6	b	d	c
3	↓	18	−3	9	−27	3
	6	−1	3	−9	1	7

Hallando los parámetros:

$$a = -19 \wedge b = -18 \wedge d = 28 \wedge c = 4$$

$$\therefore\ a + b + c + d = -5$$

PROBLEMA 29 Calcular: a ÷ b. Sabiendo que las divisiones:

$$\frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1} \text{ y } \frac{ax^2 + bx + 2}{5x + 2}$$

Originan el mismo residuo.

Resolución:

Para la 1° división:

$$\frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$$

Teorema del resto

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$R_1(x) \equiv a(1)^2 + b(1) + 2$$

$$R_1(x) \equiv a + b + 2$$

Para la 2° división:

$$\frac{ax^2 + bx + 2}{5x + 2}$$

Teorema del resto:

$$5x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

$$R_2(x) \equiv a\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{5}\right) + 2$$

$$R_2(x) \equiv \frac{4a}{25} - \frac{2b}{5} + 2$$

team CALAPENSHKO

Por condición tenemos:

$$R_1(x) = R_2(x)$$

$$a + b + 2 = \frac{4a}{25} - \frac{2b}{5} + 2$$

$$a - \frac{4a}{25} = -b - \frac{2b}{5}$$

$$\frac{21a}{25} = -\frac{7b}{5}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{25}{21}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = -\frac{5}{3}$$

PROBLEMA 30 Determine el resto de dividir:

$$\frac{x^{2011}(x^3 + 2010x^2)}{x^4 - 1}$$

Resolución: La división dada es:

$$\frac{x^{2014} + 2010x^{2013}}{x^4 - 1}$$

Teorema del resto:

$$x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1$$

En el dividendo:

$$D(x) \equiv (x^{2014}) + 2010x^{2013}$$

$$D(x) \equiv (x^4)^{503} \cdot x^2 + 2010(x^4)^{503} \cdot x$$

Reemplazando x^4 por 1:

$$R(x) \equiv 1 \cdot x^2 + 2010 \cdot 1 \cdot x$$

$$\therefore R(x) \equiv x^2 + 2010x$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Indicar el residuo de dividir:

$$\frac{2x^4+3\sqrt{2}x^3-12x^2+3\sqrt{2}x-2}{x-\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 0
D) -2 E) $-\sqrt{2}$

2. COLUMNA (A)

La suma de los coeficientes del cociente de:

$$\frac{35x^4+11x^3+14x^2-18x-13}{5x+3}$$

COLUMNA (B)

El residuo de dividir:

$$\frac{6x^4-5x^3-8x^2+18x-2}{3x-1}$$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción
E) No se puede determinar

3. Calcular "n + k + c" si la división:

$$\frac{8x^5+4x^3+nx^2+kx+c}{2x^3+x^2+3}$$

deja como resto: $3x^2+2x+1$

A) 16 B) 19 C) 21
E) 24 E) 20

4. En la división exacta:

$$\frac{x^4+ax^2+b}{x^2+x+1}$$

Calcular: a + b

A) 0 B) –2 C) 4
D) –4 E) 2

5. Si al dividir:

$$\frac{16x^4+2x+1}{-2x-1}$$

se obtiene por cociente a:

$$\left(\frac{m}{3}-1\right)x^3+\left(\frac{n}{4}-2\right)x^2+(p-3)x+\left(\frac{q}{6}-4\right)$$

Calcular el valor de:

$$m+n+p+q$$

A) 48 B) 28 C) 51
D) 52 E) 56

6. Calcular: $\sqrt[A+B]{(A+B)^2}$

Si la división:

$$\frac{Ax^4+Bx-2}{x^2+x-1}$$

es exacta.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\sqrt[3]{6}$ E) 1

7. Calcular: (A + B – C), si la siguiente división:

$$\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+27x^2+19x+5}{4x^3+3x+1}$$

es exacta.

A) 41 B) 21 C) 11
D) 10 E) 40

8. Calcular "n + k" sabiendo que la división:

$$\frac{4x^4+2x^3-nx^2+3x+k}{(x-1)^2}$$

es exacta.

A) 17 B) 16 C) 15
D) 14 E) 13

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

9. Calcular "n + k" si la división:

$$\frac{6x^4 + nx^3 - 14x^2 + kx - 5}{2x^2 + x - 5}$$

deja como resto: 3x + 5

A) 17 B) 16 C) 15
D) 14 E) 13

10. Cuando el polinomio:

$$P(x) = 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se divide entre: $5x^2 - x + 3$ se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de uno en uno a partir del primero y un residuo idéntico a: 2x – 9. Calcular el valor de:

$$a + b - c + 2d$$

A) 7 B) –6 C) 12
D) 0 E) –12

11. Calcular "m" en la siguiente división exacta:

$$\frac{mx^4 - (3m+2)x^2 - (2m+1)x^3 + mx - 9}{x - 3}$$

A) 9 B) –9 C) 3
D) –3 E) 18

12. Hallar el resto de dividir:

$$\frac{8x^3 + 4x^2 - 6mx + 15}{2x - 1}$$

sabiendo que la suma de coeficientes del ociente entero es 37.

A) 46 B) 45 C) 44
D) 43 E) 42

13. Calcular "n", para que el residuo de la división:

$$\frac{x^3 - nx^2 - nx - n^2}{x - n - 2}$$

Sea: 3n + 2

A) –2 B) –1 C) 1
D) 2 E) 3

14. Determinar la suma de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir:

$$\frac{4x^{80} - 2x^{79} + x + 1}{x - 1}$$

A) 165 B) 161 C) 164
D) 163 E) 162

15. El resto obtenido en:

$$\frac{\sqrt{3}x^4 - (1-\sqrt{3})x^3 - 2\sqrt{3}(x^2+1) + A - 2x}{x + 1 - \sqrt{3}}$$

es 2. ¿Cuánto vale A?

A) 18 B) 6 C) 9
D) 8 E) –6

16. COLUMNA (A)
El resto de dividir:

$$\frac{(x+3)^7 + (x^2 - x - 7)^8 - x - 2}{x + 2}$$

COLUMNA (B)
El resto de dividir:

$$\frac{(x-2)^{50} + 2(x-3)^{40} + 3(x-4)^{25} + 4}{x - 3}$$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

17. Si la división:

$$\frac{n^3x^5 - 7nx^3 + (n^2 - 6)x^2 + n(n-1)}{nx + 2}$$

es exacta, calcular la suma de los coeficientes de su cociente.

A) 0 B) 9 C) 4
D) –4 E) –9

18. Indicar el residuo de dividir:

$$\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 17}{x^2 + 7x + 1}$$

A) 78 B) 80 C) 82
D) x – 1 E) x + 1

19. Proporcionar el resto de dividir:

$$\frac{x^{2004}(x-3)^{2004} - 2x^2 + 6x - 11}{x^2 - 3x + 1}$$

A) –8 B) 8 C) 7
D) –7 E) –9

20. Al dividir el polinomio:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + 1$$

entre $x^3 + x^2 + bx + b$ se obtiene el resto R(x). Determine el resto de dividir dicho resto entre $x + 1$.

A) –6 B) –3 C) –1
D) 1 E) 4

21. Si el residuo de dividir: $(ax^3 + ax^2 - 4x + 2a)$ entre $(x^2 - bx + 2)$ es: $2x$
Determine la suma de coeficientes del cociente.

A) –6 B) –4 C) 0
D) 3 E) 2

22. Si el esquema:

a	a	b	a	b	a
b		b	c		
c			b	c	
				c	c^2
	b	b	c		

Representa la división de dos polinomios en x por el método de William Horner, indique el resto.

A) $x + 2$ B) $3x + 2$ C) $2x + 1$
D) $4x + 7$ E) $7x + 11$

23. ¿Qué relación debe existir entre "n" y "k" de modo que la división:

$$\frac{x^5 - (n^2 + 2m)x^3 + n^3x + (k - 2m^3)}{x^2 + nx - m}$$

sea exacta?

A) $k^2 = 2n^9$ B) $n^2 = 4k^9$ C) $n^2 = k^3$
D) $k^2 = 4n^9$ E) $nk^2 = 9$

24. Halle el resto de dividir:

$$\frac{x^{23} - 3x^{21} + 2x^{15} + x^3 + 4}{x^5 - 2}$$

A) $2x^2 - 5x + 11$
B) $x^3 - 17x - 20$
C) $17x^3 - 48x + 20$
D) $x^3 - 1$
E) $2x^2 - 6x + 11$

25. Si el residuo de la división:

$$\frac{mx^8 + nx^6 - 3x^5 - 1}{x^3 + 1}$$

es $8x^2 - px - 5$
Calcule: $m + n + p$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) 3

26. Si el residuo de la división:

$$\frac{(x+1)^9 + ax^2 + b}{x^2 + 2x - 1}$$

es: $6x + 25$. Calcular la suma de coeficientes del cociente entero.

A) 250 B) 245 C) 242
D) 237 E) 235

27. Calcular el valor de "m" en el polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 - 2x^3 + mx - 3$$

sabiendo que al dividir entre $(x + 1)$ el residuo que se obtiene es el triple del residuo obtenido al dividirlo por $(x - 1)$

A) 1 B) –1 C) 3
D) –3 E) 6

28. Calcular el valor numérico de:

$$P(x) = x^5 + (2-2)x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 5x - 3\sqrt{2}$$

Para: $x = 2\sqrt{2}$

A) $8\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2} + 7$ C) $7\sqrt{2}$
D) $13\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{2}$

team CALAPENSHKO

29. Dado el polinomio:

$$P(x) \equiv (\sqrt{3}-\sqrt{2})x^5 - 2\sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{3}x + 3$$

Calcular $P(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

30. Señale la relación necesaria de "a", con "c", tal que la división:

$$\frac{2a^2x^5 + 4abx^4 + 2c^2x^3 - a^3x^2 + a^2x + 2a^2b}{ax^2 + bx - c}$$

presenta un resto:

$$4a^2x + 2c^2 - a^2c$$

A) $3a = 2c$ B) $2a = 3c$ C) $a = c$
D) $3a = 2c$ E) $3a = -2c$

31. Hallar el resto en:

$$\frac{(x^3-1)^{29} + x^{15} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1}$$

A) x B) –x C) x + 1
D) 1 – x E) 0

32. Mostrar el residuo de dividir:

$$\frac{(x-3)^{2004} + (x-4)^{2005} + 6}{(x-4)(x-3)}$$

A) 2x – 1 B) 2x + 1 C) 4x – 1
D) 0 E) 2x + 3

33. Al dividir un polinomio P(x) entre los binomios (x – 4) y (x – 2) se obtienen como residuos 9 y 5 respectivamente. ¿Cuál es el residuo de dividir:

$$P(x) \div [(x-4)(x-2)]?$$

A) 2x – 1 B) 2x + 1 C) x – 1
D) 3x + 1 E) x + 1

34. Calcular el valor de "n" necesario para que el término independiente del cociente entero sea 364, al dividir: $\frac{(2x-3)^n}{(x-1)(x-2)}$

A) 10 B) 8 C) 6
D) 4 E) 12

35. Al efectuar la división:

$$\frac{(x-2)^{2m} + (x-1)^m - 1}{(x-1)(x+1)}$$

$m \in \mathbb{Z}^+ \wedge m > 2006$

Se obtiene por cociente Q(x)

Calcular: Q(2) + Q(1)

A) –m B) 0 C) m
D) –2m E) 2m

36. Al efectuar una división de polinomios se obtiene como cociente:

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

y como residuo 16, si el divisor es: x – 2, indicar el dividendo.

A) x^4 B) $-x^4$
C) $x^4 - 16$
D) $x^4 + 2x^2 + 16$ E) $x^4 + 2x^3 - 16$

37. Al dividir:

$$P(x) \equiv x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 2x - 1$$

entre un polinomio de segundo grado se obtuvo como resto 2x + 1 y como cociente $x^2 - 1$. Determine el valor de "B"

A) 1 B) –1 C) 0
D) –2 E) 2

38. Si se divide el resto d ela siguiente división:

$$\frac{x^{7n} + x^{6n+3} + 2x^{5n+1} + 3x^{4n} - 3}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1}$$

entre $x^2 + 2$; se obtendrá como resto:

A) x B) x + 1 C) 1
D) –1 E) 0

39. Calcular: $\sqrt{\frac{A+C-5}{A-C}}$

Si la división: $\frac{x^{21} - Ax + C}{x^2 - 2x + 1}$ es exacta.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

40. Al dividir un polinomio P(x) entre el producto:

$$[(x+1)(x-2)(x+3)]$$

el resto obtenido es: $x^2 - 5x + 1$. ¿Cuáles son los restos que se obtienen al dividir separadamente P(x) por $(x+1)$, $(x-2)$ y $(x+3)$ respectivamente?

A) 7 ; – 3 y 12 B) 14 ; 13 y – 5
C) 7 ; – 5 y 15
D) 7 ; – 13 y 15 E) 7 ; – 5 y 25

41. Al efectuar la división de 2 polinomios enteros en "x", el producto de los términos independientes del divisor y el cociente es 8, la diferencia de los cuadrados de los términos independientes del dividendo y resto es 24, luego la suma de los términos independientes del dividendo y resto es:

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 16

42. Indicar el residuo de dividir:

$$\frac{x^{2^{5n}} + x^{2^{4n}} + x^{2^{3n}} + 1}{x^{2^n} + 1}$$

$n \in \mathbb{N} / n \geq 2010$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

43. Obtener el término independiente del cociente de:

$$\frac{x^{18}(x^3+1) - 5x^{14} + 3x^4 - 11}{x+1}$$

A) 10 B) 8 C) 4
D) 6 E) 2

44. Si "P" es un polinomio, tal que al dividir: P(x) entre $(x^3 + x + 1)$ se obtiene como residuo $(-x^2 + 1)$; entonces el residuo que se obtiene de dividir P(x) entre $(x^2 + x + 1)$ es:

A) x – 2 B) x + 2 C) x – 1
D) x + 1 E) 2x + 3

45. Si el residuo que resulta de dividir:

$$(x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + c + 2) \div (x-1)^3$$

es $(bx + c)^2$. Hallar el mínimo valor de:

$$E = 9a + 2b + c$$

A) 24 B) 25 C) 26
D) 30 E) 31

46. ¿Qué residuo se obtiene al dividir:

$$\frac{(x-1)^{2n} - x^n}{x^2 - x + 1}?$$

Siendo "n" par:

A) x + 1 B) x – 1 C) x
D) – x E) 0

47. Al dividir el polinomio P(x) entre:

$$(x^3 - x^2 - 2x + 2)$$

se obtuvo como resto (x – 2). Proporcionar el residuo de dividir $P^3(x)$ entre $(x^2 - 2)$

A) 2x – 1 B) x – 2 C) 20x – 14
D) 14x – 20 E) 5x – 2

48. Dadas las relaciones:

$m^4 - am + a = 0$ $n^4 - an + a = 0$
$p^4 - ap + a = 0$ $q^4 - aq + a = 0$

Hallar el resto de dividir: $\dfrac{x^4 - ax + a}{x - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$

A) 0 B) –1 C) 1
D) mnp E) –2

49. Sea Q(x) el cociente de efectuar la división:

$$(x^n + nx^{n-1} - n - 1) \div (x-1)$$

Calcular $Q(1)^n$

A) 0 B) 1 C) n
D) n^2 E) $n^2 - 1$

50. Determine el resto de dividir:

$$\frac{[x(x+1)(2x+1)^2 - x(x-1)(2x-1)^2](8x^2-1)+1}{x^4 - x - 2^{-6}}$$

A) $32x^2+1$ B) $128x^2+1$ C) $64x^2+1$
D) $32x^2$ E) $512x^2+1$

team CALAPENSHKO

Capítulo 5

Divisibilidad Algebraica

CAPACIDADES:

- Reconocer divisibilidad entre polinomios.
- Identificar teoremas y propiedades de una división exacta.
- Reconocer cociente notables y aplicar las propiedades que lo involucran.

$$P(x) \equiv (x+a)(x+b)Q(x)$$

KARL GAUSS

KARL FRIEDRICH GAUSS, nació el 30 de abril de 1 777 en Brunswick, ciudad principal del ducado de Brunswick – Wolfenbüttel, Alemania. fue hijo único de Gebhard Dietrich Gauss y Dorothea Benze.

En 1784 asistió a la escuela primaria y se distinguió, entre más de 50 niños con diversos conocimientos y distintas edades, debido a que ya sabía leer, escribir, contar y realizar cálculos elementales. Gracias a la ayuda de Büttner – su profesor – y de su asistente, Gauss fue admitido en la secundaria en 1 788. Allí adquirió conocimientos sólidos de Latín, entonces indispensables para alcanzar una buena posición académica, y el alemán culto, pues antes sólo conocía el dialecto local.

El duque de Brunswick – Wolfenbüttel le asignó ayuda financiera hasta 1 806, año en que Napoleón desintegró el estado alemán de Brunswick – Wolfenbüttel. Antes de los 19 años probó que el polígono regular de 17 lados se puede construir utilizando solamente regla y compás (y lápiz o algo similar).

En 1 795 Gauss continúa estudiando matemáticas en la Universidad de Gotinga. En 1 798 deja la Universidad sin obtener un diploma, más ya había desarrollado las ideas básicas de la mayoría de sus trabajos académicos importantes que habría de publicar en los siguientes 25 ños. La Universidad de Helmstedt, sin embargo, le otorga el grado de doctor *in absentia* al año siguiente por su demostración del Teorema fundamental del álgebra. Un año después es nombrado director del nuevo observatorio de la Universidad de Gotinga.

Murió el 23 de febrero de 1 855 y fue enterrado en Gotinga. Poco después de su muerte se acuñaron monedas en su honor.

Gauss fue gran admirador de Arquímedes y Newton es considerado uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos: *el Príncipe de las matemáticas*.

team CALAPENSHKO

DIVISIBILIDAD ENTRE POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Dados los polinomios P(x) y d(x) no constantes tal que $[P]^\circ \geq [d]^\circ$, se dice que P(x) es divisible por d(x) si existe un único polinomio Q(x) tal que multiplicado por el anterior nos reproduce el primero es decir si:

$$P(x) \equiv d(x) \cdot Q(x)$$

OBSERVACIÓN

Si P(x) es divisible por d(x), P(x) ÷ d(x) es exacta

Ejemplo: ¿Será $P(x) \equiv x^3 - 6x^2 + x + 4$ divisible por $(x - 1)$?

Hallemos el residuo de la división:

$$\frac{P(x)}{x-1}$$

Por el teorema del resto:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$
$$R(x) \equiv (1)^3 - 6(1)^2 + 1 + 4$$
$$R(x) \equiv 1 - 6 + 1 + 4$$
$$R(x) \equiv 0$$

Como la división es exacta se podrá afirmar que P(x) es divisible por $(x - 1)$

TEOREMAS

1) Si un polinomio es divisible en forma separada por dos o más expresiones primos entre si, dicho polinomio también será divisible por el producto de todas las expresiones mencionadas.

- Dado el polinomio P(x) y las expresiones primos entre sí $(x + a)$ y $(x + b)$, luego si:

$$P(x) \div (x + a) \rightarrow R(x) \equiv 0$$
$$P(x) \div (x + b) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Entonces: $P(x) \div [(x + a)(x + b)] \rightarrow R(x) \equiv 0$

team CALAPENSHKO

COROLARIO: Si un polinomio es divisible por el producto de dos o más expresiones primos entre si, dicho polinomio también será divisible por cada una de las expresiones mencionadas.

- Dado el polinomio P(x) y las expresiones primos entre sí (x + a) y (x + b), luego si:

$$P(x) \div [(x+a)(x+b)] \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Entonces:
$$P(x) \div (x+a) \rightarrow R(x) \equiv 0$$
$$P(x) \div (x+b) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

2) (Teorema del factor). Si el polinomio P(x) se anula cuando x = a, entonces (x – a) será un factor de P(x)

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \text{ es un factor de } P(x)$$
$$\therefore P(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x)$$

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN

Son resultados que se obtienen en forma directa, a partir de ciertas divisiones que tienen la siguiente forma general:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} \quad ; n \in \mathbb{N} / n \geq 2$$

NOTA

Estas divisiones deben ser exactas:

Ejemplo: ¿La división $\frac{x^5 - y^5}{x - y}$ origina un cociente notable?

Hallemos el residuo de la división según el teorema del resto:

$$x - y = 0 \; ; \; x = y$$
$$R(x) \equiv (y)^5 - y^5 \equiv y^5 - y^5 \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Como la división es exacta, se podrá afirmar que dicha división genera cociente notable.

team CALAPENSHKO

ESTUDIO DE LOS COCIENTE NOTABLES

1) $\forall\, n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

Origina cociente notable cuyos términos presentan signos positivos.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}$$

2) $\forall\, n \in \mathbb{N} / n =$ impar

$$\frac{x^n + y^n}{x + y}$$

Origina cociente notable cuyos términos presentan signos alternados(+, –, +, –, ... , +)

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1}$$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N} / n =$ par

$$\frac{x^n - y^n}{x + y}$$

Origina cociente notable cuyos términos presentan signos alternados (+, –, +, –, ... , –)

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - y^{n-1}$$

Observación: La división $\frac{x^n + y^n}{x - y}$ jamás origina cociente notable ¿por qué? porque su residuo es no nulo.

PROPIEDADES

Si la división:

$$\frac{x^m \pm y^p}{x^a \pm y^b}$$

Origina un cociente notable, se cumple:

team CALAPENSHKO

1) El número de términos "n" del cociente notable verifica:

$$n = \frac{m}{a} = \frac{p}{b}$$

2) En el cociente notable los exponentes de x van disminuyendo de "a" en "a", mientras que los exponentes de y van aumentando de "b" en "b".

- Para el cociente notable de: $\dfrac{x^8 - y^{12}}{x^2 - y^3}$

$$n = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} \rightarrow n = 4$$

$$C - N \equiv x^6 + x^4y^3 + x^2y^6 + y^9$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO DE LUGAR k (t_k) EN UN COCIENTE NOTABLE

Dada la división:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y};\ n \in \mathbb{N} / n \geq 2;$$

que genera cociente notable:

$$t_k = (\text{signo})x^{n-k}y^{k-1}$$

Donde: t_k = término de lugar k
n = número de términos del C – N
x = primer término del divisor
y = segundo término del divisor

OBSERVACIÓN

Para el signo se tendrá en cuenta lo siguiente:

1) Si el divisor es de la forma (x – y), todos los términos tendrán signo positivo.

2) Si el divisor es de la forma (x + y), los términos de lugar impar tendrán signos positivos, mientras que los de lugar par tendrán signos negativos.

Ejercicio: Encontrar el quinto y octavo término del cociente notable de dividir:

$$\frac{x^{26} + y^{39}}{x^2 + y^3}$$

Resolución: Observar que: $n = \frac{26}{2} = \frac{39}{3} \rightarrow n = 13$

Hallemos el quinto término: $t_5 \rightarrow k = 5$

$$t_5 = (\text{signo})\,[x^2]^{13-5}\,[y^3]^{5-1}$$

$$t_5 = (\text{signo})\,[x^2]^8\,[y^3]^4$$

De acuerdo con la observación el signo que le corresponde es +, veamos:

$$t_5 = (+)[x^2]^8\,[y^3]^4$$

$$\therefore \quad t_5 = x^{16}\,y^{12}$$

Hallemos el octavo término: $t_8 \rightarrow k = 8$

$$t_8 = (\text{signo})\,[x^2]^{13-8}\,[y^3]^{8-1}$$

$$t_8 = (\text{signo})\,[x^2]^5\,[y^3]^7$$

De acuerdo con la observación el signo que le corresponde es –, veamos:

$$t_8 = (-)[x^2]^5\,[y^3]^7$$

$$\therefore \quad t_8 = -x^{10}\,y^{21}$$

NOTA

Si en un cociente notable se quiere determinar, al término de lugar k contado a partir del extremo final (derecha e izquierda) se tendrá en cuenta a la siguiente relación:

$$\overleftarrow{t_k} = (\text{signo})\,x^{k-1}\,y^{n-k}$$

Donde el signo dependerá de un análisis que involucra al divisor.

PROPIEDAD

Sea $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ una división que origina cociente notable, si n es impar existe un término central cuyo lugar se determina así: $\frac{n+1}{2}$

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Calcular "m" si:

A) $x^2-(m+1)x-8$; es divisible por $(x-2)$

B) $2x^3+4x-m$; es divisible por $(x+1)$

C) $x^4+(m+2)x^2+1$; es divisible por (x^2-x+1)

D) $x^2+2x+m-7$; es divisible por $(x-1)$

E) $x^3+(m+1)x^2+x+1$; es divisible por $(x+2)$

2. Vincula mediante una línea las expresiones de la izquierda con su respectivo divisor del la derecha.

A) x^2+4x	I. $x-3$
B) x^2-x-6	II. $x+1$
C) x^3+x^2+x+1	III. $x-5$
D) x^2-25	IV. $x+3$
E) x^3-9x	V. x

3. Marcar Verdadero (V) o Falso (F)

I. Si A es divisible por B, $\frac{A}{B}$ es una división exacta. .....( )

II. Si M es divisible por N, $\frac{M}{N}$ es una división exacta. .....( )

III. Si M es divisible por "a" y también por "b", M es divisible por "ab" .....( )

4. Marcar con un visto (√) los recuadros correspondientes a divisiones que originan cocientes notables.

A) $\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$ ☐

B) $\frac{x^5-y^{10}}{x+y^2}$ ☐

C) $\frac{x^{12}+y^{18}}{x^2+y^3}$ ☐

D) $\frac{x^{15}+y^{25}}{x^3+y^5}$ ☐

E) $\frac{x^{20}+y^{30}}{x^2-y^3}$ ☐

5. Calcular "m" en cada división que origina un cociente notable.

A) $\frac{x^{m-2}-y^{10}}{x^2-y^2}$ B) $\frac{x^{15}+y^{2m+1}}{x^3+y}$

C) $\frac{x^8-y^{m^2-1}}{x^2+y^3}$

D) $\frac{x^{2m+7}-y^{m+2}}{x^3-y}$ E) $\frac{x^{10}+y^5}{x^{m+1}+y^m}$

6. Determine el grado absoluto del término en mención de los cocientes notables originados al dividir.

A) $\frac{x^7+y^7}{x+y}$ ¿T_4?

B) $\frac{x^8-y^4}{x^2-y}$ ¿T_3?

C) $\frac{x^{10}+y^{20}}{x^2+y^4}$ ¿T_5?

D) $\frac{x^{15}-y^{25}}{x^3-y^5}$ ¿T_4?

E) $\frac{x^{12}-y^{18}}{x^2+y^3}$ ¿T_3?

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Calcular "a + b + c" si $x^3 - 3x^2 - x + 3$ divide en forma exacta al polinomio:

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

Resolución: La división exacta es:

$$\frac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

Según el método de Horner tenemos:

1	1	−2	−6	a	b	c
3		3	1	−3		
1			3	1	−3	
−3				−6	−2	6
	1	1	−2	0	0	0

En la columna del residuo tenemos:

$$a - 3 + 1 - 6 = 0 \Rightarrow a = 8$$
$$b - 3 - 2 = 0 \Rightarrow b = 5$$
$$c + 6 = 0 \Rightarrow c = -6$$

$$\therefore \quad a + b + c = 7$$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 2 Si el polinomio:

$$P(x) \equiv ax^7 + bx^5 - 1$$

es divisible por el polinomio:

$$F(x) \equiv mx^5 + nx^4 + cx^3 - x - 1$$

Calcular: ab + mn + c

Resolución: Como la división es exacta los polinomios se podrán ordenar en forma creciente

$$P(x) \equiv -1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + ax^7$$

$$F(x) \equiv -1 - x + 0x^2 + cx^3 + nx^4 + mx^5$$

Ahora efectuando la división según el método de Horner:

−1	−1	0	0	0	0	b	0	a
1		1	0	−c	−n	−m		
0			−1	0	c	n	m	
−c				1	0	−c	−n	−m
−n								
−m								
	1	−1	1	0	0	0	0	0

team CALAPENSHKO

En la columna del residuo tenemos:

$$\begin{aligned} -c+1=0 &\Rightarrow c=1 \\ -n+c=0 &\Rightarrow n=1 \\ b-m+n-c &\Rightarrow b=m \\ m-n=0 &\Rightarrow m=n \\ & \quad m=1 \wedge b=1 \\ a-m=0 &\Rightarrow a=m \\ & \quad a=1 \end{aligned}$$

$\therefore\ ab+mn+c=3$

PROBLEMA 3 Encontrar un polinomio P(x) de 2° grado, que sea divisible en forma separada por (x – 2) y (x + 1) cuya suma de coeficiente sea –6.

Resolución: Del enunciado tenemos:

$P(1) = -6$: suma de coeficientes de P(x)
$P(x) \div (x-2) \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \div (x+1) \rightarrow R(x) \equiv 0$

Por teorema: $P(x) \div [(x-2)(x+1)] \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \equiv (x-2)(x+1)\,Q(x)$

Observar que Q(x) es un polinomio de grado cero (pues $[P]^\circ = 2$), luego $Q(x) = k$:

$P(x) \equiv (x-2)(x+1)\,k$

Para x = 1: $P(1) = -2k$
$-6 = -2k \Rightarrow k = 3$

Finalmente el polinomio P(x) será:

$P(x) = (x-2)(x+1)(3)$

$\therefore\ P(x) \equiv 3x^2 - 3x - 6$

PROBLEMA 4 Encontrar un polinomio P(x) de 3° grado que sea divisible en forma separada por (x + 2) y (x + 1), sabiendo además que la suma de sus coeficientes es 24 y que su término independiente es 2.

Resolución: Sea P(x) el polinomio buscado, luego los datos serán:

$P(1) = 24$: suma de coeficientes de P(x)
$P(0) = 2$: término independiente de x en P(x)
$P(x) \div (x+2) \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \div (x+1) \rightarrow R(x) \equiv 0$

Por teorema: $P(x) \div [(x+2)(x+1)] \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \equiv (x+2)(x+1)\,Q(x)$

Observar que Q(x) es un polinomio de 1° grado (pues $[P]^\circ = 3$), luego:

$Q(x) \equiv ax + b$
$P(x) \equiv (x+2)(x+1)(ax+b)$

Para $x = 0$: $P(0) = 2b$
$2 = 2b \Rightarrow b = 1$

Para $x = 1$: $P(1) = 6(a + 1)$
$24 = 6(a + 1)$
$4 = a + 1 \Rightarrow a = 3$

Finalmente el polinomio P(x) será:
$P(x) \equiv (x + 2)(x + 1)(3x + 1)$

$\therefore P(x) \equiv 3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$

PROBLEMA 5 Encontrar un polinomio P(x) de tercer grado sabiendo que al dividirlo separadamente por $(x + 3)$, $(x + 2)$ y $(x + 1)$ se obtiene el mismo residuo 8 y al dividirlo por $(x + 4)$ se obtiene como residuo 20.

Resolución: Del enunciado tenemos:
$P(x) \div (x + 3) \rightarrow R(x) \equiv 8$
$P(x) \div (x + 2) \rightarrow R(x) \equiv 8$
$P(x) \div (x + 1) \rightarrow R(x) \equiv 8$

Por teorema: $P(x) \div [(x + 3)(x + 2)(x + 1)] \rightarrow R(x) \equiv 8$
$P(x) \equiv (x + 3)(x + 2)(x + 1)\underbrace{Q(x)}_{\text{Grado cero}} + 8$
$P(x) \equiv (x + 3)(x + 2)(x + 1)\,k + 8$

Además: $P(x) \div (x + 4) \rightarrow R(x) \equiv 20$

de donde tenemos: $P(-4) = 20$
$P(x) \equiv (x + 3)(x + 2)(x + 1)\,k + 8$

Para $x = -4$: $P(-4) = -6k + 8$
$20 = -6k + 8$
$k = -2$

Finalmente el polinomio P(x) será:
$P(x) \equiv (x + 3)(x + 2)(x + 1)(-2) + 8$

$\therefore P(x) \equiv -2x^3 - 12x^2 - 22x - 4$

PROBLEMA 6 Un polinomio P(x) de cuarto grado es divisible separadamente por (x^2+1) y $(x^2 + 2x + 2)$ si se divide P(x) entre $(x^3 - 1)$ el residuo es $6x^2 + 6x + 8$, luego el término independiente de x en P(x) es:

Resolución: De acuerdo con el teorema de la divisibilidad se plantea:
$P(x) \div \left[(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)\right] \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \equiv (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)\underbrace{Q(x)}_{k}$ .... (1)

team CALAPENSHKO

Tengan en cuenta: $[P]^{\circ} = 4$

También: $P(x) \div (x^3 - 1) \rightarrow R(x) \equiv 6x^2 + 6x + 8$

$P(x) \equiv (x^3 - 1)\, Q'(x) + 6x^2 + 6x + 8 \quad \ldots. (2)$

En (1) Hagamos $x = 1$: $P(1) = 10\,k$

En (2) Hagamos $x = 1$: $P(1) = 20$

Igualando tenemos: $10\,k = 20$

$k = 2$

Ahora el polinomio en (1) será:

$$P(x) \equiv (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)\,k$$

$$P(x) \equiv (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)\,(2)$$

Se pide el término independiente de x en P(x), o sea P(0)

$$P(0) = (1)(2)(2)$$

$$\therefore\ P(0) = 4$$

PROBLEMA 7 Calcular m . n si la división:

$$\frac{x^{m-5} + y^{n+2}}{x^3 + y^2}$$

Origina un cociente notable de once términos

Resolución: Por propiedad se cumple:

$$\frac{m-5}{3} = \frac{n+2}{2} = 11$$

Ahora resolviendo por separado:

$$\frac{m-5}{3} = 11$$

$$m - 5 = 33 \rightarrow m = 38$$

$$\frac{n+2}{2} = 11$$

$$n + 2 = 22 \rightarrow n = 20$$

$$\therefore\ m \,.\, n = 760$$

PROBLEMA 8 Calcular "m" para que la división notable:

$$\frac{x^{4m+4} - y^{5m}}{x^{m+1} - y^{2m-3}}$$

Origine un cociente notable.

Resolución: Se cumple: $\#\text{ term} = \underbrace{\frac{4m+4}{m+1}} = \underbrace{\frac{5m}{2m-3}}$

$$\frac{4(m+1)}{m+1} = \frac{5m}{2m-3}$$

$$4 = \frac{5m}{2m-3};\ m \neq -1$$

$$8m - 12 = 5m$$

$$\therefore\ m = 4$$

PROBLEMA 9 Determinar el grado absoluto del sexto término del cociente notable al dividir:

$$\frac{x^{42} + y^{63}}{x^2 + y^3}$$

Resolución: Teniendo en cuenta la fórmula del término de lugar k (t_k):

$$\boxed{t_k = (\text{signo})\, x^{n-k} y^{k-1}}$$

Observar que: $n = \frac{42}{2} = \frac{63}{3} = 21$

$k = \text{lugar} = 6$

$$t_6 = (\text{signo})[x^2]^{21-6}[y^3]^5$$

$$t_6 = (-)[x^2]^{15}[y^3]^5$$

$$t_6 = -x^{30}y^{15}$$

$$\therefore\ [t_6]^\circ = 45$$

PROBLEMA 10 Si el cociente de dividir:

$$\frac{x^8 - 1}{x^m - 1}$$

es notable y de cuatro términos. Calcular:

$$K = m^9 + m^8 + m^7 + \ldots + m + 1$$

Resolución: El valor pedido es: $K = m^9 + m^8 + m^7 + \ldots + m + 1$

$$K = \frac{m^{10} - 1}{m - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Por propiedad: $\frac{8}{m} = 4 \rightarrow m = 2$ $\qquad \ldots\ldots\ldots(2)$

team CALAPENSHKO

Reemplazando (2) en (1):

$$K = \frac{2^{10}-1}{2-1}$$

$$K = \frac{1024-1}{1}$$

$$\therefore \quad K = 1023$$

PROBLEMA 11 Simplificar:

$$\left(\frac{x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\right)\left(\frac{x^{10}+x^9+....+x+1}{x^{50}+x^{45}+....+x^5+1}\right)$$

Resolución: Sea K la forma simplificada, luego con las divisiones notables se tendrá:

$$K = \left[\frac{\frac{x^{55}-1}{x^{11}-1}}{\frac{x^5-1}{x-1}}\right] \cdot \left[\frac{\frac{x^{11}-1}{x-1}}{\frac{x^{55}-1}{x^5-1}}\right]$$

$$K = \frac{(x^{55}-1)(x-1)(x^{11}-1)(x^5-1)}{(x^{11}-1)(x^5-1)(x-1)(x^{55}-1)}$$

$$\therefore \quad K = 1$$

PROBLEMA 12 Si: $x^{100}+ax+b$ es divisible por $(x-1)^2$.
Calcular el valor de: $a+b$

Resolución: Reconociendo datos: $D(x) = x^{100}+0x^{99}+0x^{98}+....+0x^2+ax+b$

$d(x) = x^2-2x+1$

$R(x) = 0$

Por el método de Horner:

99 números

1	1	0	0	0	0	.....	0	0	a	b
2		2	−1	−2	−3	.....			−98	−99
−1			4	6		.....			198	
	1	2	3				98	99	0	0

En la columna del residuo:

$$a-98+198=0 \quad \wedge \quad b-99=0$$

$$a=-100 \quad \wedge \quad b=99$$

$$\therefore \quad a+b=-1$$

Otro método de resolución

Como $x^{100} + ax + b$ es divisible por $(x-1)^2$, también será divisibles por $(x-1)$. Ahora la división:

$$\frac{x^{100} + ax + b}{x - 1}$$

Sera exacta y por el teorema del resto se tendrá:

$$(1)^{100} + a(1) + b = 0$$
$$1 + a + b = 0$$
$$\therefore \quad a + b = -1$$

PROBLEMA 13 Determine la suma de los coeficientes de aquel polinomio P(x) mónico de 3er grado que sea divisible separadamente por $(x + 5)$ y $(x - 2)$, cuyo término independiente sea 30.

Resolución:

Por condición tenemos: $P(x) \div (x+5) \rightarrow R(x) \equiv 0$
$P(x) \div (x-2) \rightarrow R(x) \equiv 0$

Ahora por teorema : $P(x) \div [(x+5)(x-2)] \rightarrow R(x) \equiv 0$

Por la identidad : $P(x) \equiv (x+5)(x-2)Q(x)$

Como P(x) es un polinomio de 3er grado fácilmente podemos notar que Q(x) es de 1er grado:

$$P(x) \equiv (x+5)(x-2)(ax+b)$$

Como P(x) es mónico, $a = 1$:

$$P(x) \equiv (x+5)(x-2)(x+b)$$

Por condición tenemos $P(0) = 30$:

$$P(0) = (5).(-2).(b)$$
$$30 = -10b \rightarrow -3 = b$$

Se pide calcular P(1), veamos:

$$P(x) \equiv (x+5)(x-2)(x-3)$$
$$P(1) = (6)(-1)(-2)$$
$$\therefore \quad P(1) = 12$$

PROBLEMA 14 Calcular el valor numérico del término central del cociente notable de dividir:

$$\frac{(x+y)^{100} - (x-y)^{100}}{8xy(x^2+y^2)}$$

Para $x = 3 \wedge y = 2\sqrt{2}$

Resolución:

Observar que tenemos: $8xy(x^2+y^2) = 4(xy)\left[2(x^2+y^2)\right]$

Por la equivalencia de Legendre:

$$8xy(x^2+y^2) = \left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right]$$

Por diferencia de cuadrados: $8xy(x^2+y^2) = (x+y)^4 - (x-y)^4$

team CALAPENSHKO

Ahora la división notable es: $\dfrac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{(x+y)^4-(x-y)^4}$

Hallemos el número de términos: $n=\dfrac{100}{4}\rightarrow n=25$

El término central ocupa el lugar: $LTC=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{26}{2}=13$

Por fórmula hallemos T_{13}: $T_{13}=(+)\left[(x+y)^4\right]^{25-13}.\left[(x-y)^4\right]^{13-1}$

$T_{13}=\left[(x+y)^4\right]^{12}.\left[(x-y)^4\right]^{12}$

Por diferencia de cuadrados: $T_{13}=(x+y)^{48}.(x-y)^{48}=\left[(x-y)(x-y)\right]^{48}$

$T_{13}=(x^2-y^2)^{48}$

Ahora hacemos $x=3\wedge y=2\sqrt{2}$: $VN=(9-8)^{48}=(1)^{48}$

$\therefore\ VN=1$

PROBLEMA 15 Si la división notable:

$$\frac{x^n-x^{-n}}{x-x^{-1}}$$

Origina un cociente notable que sólo tiene 15 términos enteros, determine la suma de los valores que asume "n".

Resolución:

Por condición tenemos:

t_{15} es entero

t_{16} no es entero (sólo son 15 enteros)

Ahora según la fórmula tenemos:

$t_{15}=x^{n-15}(x^{-1})^{14}=x^{n-29}$

de donde: $n-29\geq 0\ \Rightarrow\ n\geq 29$

$t_{16}=x^{n-16}(x^{-1})^{15}=x^{n-31}$

así mismo: $n-31<0\ \Rightarrow\ n<31$

Observar que: $n=29$ ó $n=30$

$\therefore\ \Sigma$ de valores $=59$

PROBLEMA 16 Determine la suma de los coeficientes del polinomio P(x) de tercer grado que es divisible por (x+1) y al dividirlo entre: (x – 1); (x – 2); (x – 4), presenta en cada caso el mismo residuo 10.

Resolución:

Por el teorema se cumple que:

$P(x)\div[(x-1)(x-2)(x-4)]\rightarrow R(x)=10$

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-4)Q(x)+10$

Se pide: P(1) = Suma de coeficientes de P(x), luego:

$P(1)=(0).(-1).(-3).Q(1)+10$

$$P(1) = 0 + 10$$
$$\therefore\ P(1) = 10$$

PROBLEMA 17 Si: $(x+1)^5 + a(x+1)^3 + bx + c$ es divisible por $(x-1)^3$
Calcular: $a + b + c$

Resolución: Tener en cuenta que:

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$
$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Ahora el dividendo será:

$$x^5 + 5x^4 + (a+10)x^3 + (3a+10)x^2 + (3a+5+b)x + (a+1+c)$$

Asimismo el divisor será:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Según el método de Horner tenemos:

1	1	5	(a+10)	(3a+10)	(3a+5+b)	(a+1+c)
3		3	−3	1		
−3			24	−24	8	
1				3a+93	−3a−93	a+31
	1	8	a+31	0	0	0

En las columnas del residuo:

$$3a + 10 + 1 - 24 + 3a + 93 = 0 \leftrightarrow 6a = -80$$
$$a = -\frac{40}{3}$$
$$3a + 5 + b + 8 - 3a - 93 = 0 \quad \leftrightarrow b = 80$$
$$a + 1 + c + a + 31 = 0 \quad \leftrightarrow c = -2a - 32$$
$$c = -2\left(-\frac{40}{3}\right) - 32$$
$$c = -\frac{16}{3}$$
$$\therefore a + b + c = \frac{184}{3}$$

PROBLEMA 18 Un polinomio P(x) de grado (n+1) mónico es divisible entre (x^n+2). Si los restos de dividirlo separadamente entre (x−1) y (x+2) son respectivamente 12 y 258 ¿Cuál es el valor de "n"?

Resolución: Por condición tenemos

$$P(x) \div (x^n+2) \rightarrow R(x) = 0$$

$$P(x) \equiv (x^n+2)\,.\,(x+b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Asimismo notamos que:

$$P(1) = 12 \wedge P(-2) = 258$$

En (1) hagamos que $x = 1$:

$$P(1) = 3(1+b) \leftrightarrow 12 = 3(1+b)$$
$$3 = b$$

En (1) hagamos que $x = -2$:

$$P(-2) = [(-2)^n+2](-2+3) \leftrightarrow 258 = (-2)^n + 2$$
$$256 = (-2)^n$$
$$\therefore \quad n = 8$$

PROBLEMA 19 Determine el valor de : $n^2 + n + 1$; si la división :

$$\frac{x^{2n+3} - y^{3n-3}}{x^{2n+1} - y^{3n-5}}$$

Origina un cociente notable.

Resolución: Por condición se cumple que:

$$\frac{2n+3}{2n+1} = \frac{3n-3}{3n-5} \quad \leftrightarrow \quad (2n+3)(3n-5) = (2n+1)(3n-3)$$

$$6n^2 - 10n + 9n - 15 = 6n^2 - 6n + 3n - 3$$

$$-n - 15 = -3n - 3 \leftrightarrow -2n = 12$$
$$n = 6$$
$$\therefore \; n^2 + n + 1 = 43$$

PROBLEMA 20 Determine el mínimo valor que asume "k" de tal manera que en el cociente notable originado al dividir:

$$\frac{x^{n^{n+1}} + y^{n^n}}{x^n + y}; \text{ "n" es impar}$$

El grado absoluto del término que ocupa el lugar "k"excede en $(4n-4)$al grado absoluto del término que ocupa el lugar "k" contado a partir de la derecha

Resolución: De acuerdo con las fórmulas hallemos $\overrightarrow{t_k}$ y $\overleftarrow{t_k}$:

$$\overrightarrow{t_k} = (\text{signo})(x^n)^{n^n-k}(y)^{k-1} = (\text{signo})x^{n(n^n-k)}y^{k-1}$$

$$\overleftarrow{t_k} = (\text{signo})(x^n)^{k-1}(y)^{n^n-k} = (\text{signo})x^{nk-n}y^{n^n-k}$$

Por condición debemos plantear:

$$n.n^n - nk + k - 1 - (nk - n + n^n - k) = 4n - 4$$

$$n.n^n - nk + k - 1 - nk + n - n^n + k = 4n - 4$$

$$n\,n^n - n^n - 2nk + 2k = 3n - 3$$

$$n^n.(n-1) - 2k(n-1) = 3(n-1)$$

Suponiendo que $n \neq 1$, podemos simplificar :

$$n^n - 2k = 3 \leftrightarrow k = \frac{n^n - 3}{2}$$

Observa que si "k" es mínimo, "n" también es mínimo; luego n=3:

$$k = \frac{3^3 - 3}{2} = \frac{24}{2}$$

$$\therefore\ k = 12$$

PROBLEMA 21 Determine la suma de los coeficientes de un polinomio P(x), cuadrático y mónico que sea divisible por (x−2) y que presente como término constante a 12.

Resolución:

Del enunciado:

$$P(x) \div (x-2) \rightarrow R(x) = 0$$

Por fórmula

$$P(x) \equiv (x-2)\,Q(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cómo $[P]^\circ = 2$ es necesario que $[Q]^\circ = 1$, luego $Q(x) \equiv ax + b$.

Ahora en (1) tenemos:

$$P(x) \equiv (x-2)\,(ax + b)$$

Pero P(x) es un polinomio mónico, luego es necesario que $a = 1$.

Por tanto se tendrá:

$$P(x) \equiv (x-2)\,(x + b)$$

Para el término constante, que es el término independiente de x, se hace $x = 0$:

$$P(0) = (-2)(b) \leftrightarrow 12 = -2b$$

$$6 = -b \leftrightarrow b = -6$$

El polinomio P(x) es:

$$P(x) \equiv (x-2)\,(x-6)$$

$$P(x) \equiv x^2 - 8x + 12$$

$$\therefore\ \Sigma \text{ coeficientes} = 5$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 22 Si $P(x) \equiv 2x^5 - mx^2 + 3x + 1$ es divisible por $x + 1$. ¿Cuál es el valor que asume m?

Resolución:

Por condición: $P(x) \div (x + 1) \rightarrow R(x) \equiv 0$, luego por el teorema del resto se cumple que $P(-1) = 0$.

El polinomio dado es:

$$P(x) \equiv 2x^5 - mx^2 + 3x + 1$$

Reemplazando $x = -1$:

$$P(-1) \equiv 2(-1)^5 - m(-1)^2 + 3(-1) + 1$$
$$0 = -2 - m - 3 + 1$$
$$\therefore m = -4$$

PROBLEMA 23 Un polinomio P(x) es divisible en forma separa por $(x^2 - x - 2)$ y $(x + 3)$. ¿Cuál es el residuo de dividir $P(x) \div (x^2 + x - 6)$?

Resolución:

Por condición:

$$P(x) \div (x^2 - x - 2) \rightarrow R(x) \equiv 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$P(x) \div (x + 3) \rightarrow R(x) \equiv 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Observa que $(x^2 - x - 2) \equiv (x - 2)(x + 1)$, luego de (1) podemos afirmar que:

$$P(x) \div (x - 2) \rightarrow R(x) \equiv 0 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$P(x) \div (x + 1) \rightarrow R(x) \equiv 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Por teorema de (2) y (3):

$$P(x) \div [(x + 3)(x - 2)] \rightarrow R(x) \equiv 0$$
$$\therefore P(x) \div (x^2 + x - 6) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

PROBLEMA 24 Si el sexto término del C – N de dividir:

$$\frac{(2x + 7)^{11} - (x + 1)^{11}}{x + 6}$$

Asume la forma $[(2x + a)(bx + 1)]^c$. Calcular: $a - b + c$

Resolución:

Dando forma de división notable a la división dada, tenemos:

$$\frac{(2x + 7)^{11} - (x + 1)^{11}}{(2x + 7) - (x + 1)}$$

Hallemos el sexto término, para lo cual $n = 11 \wedge k = 6$.

Por fórmula tenemos:

$$T_6 = (\text{signo})(2x+7)^{11-6}(x+1)^{6-1}$$

$$T_6 = (+)(2x+7)^5(x+1)^5$$

$$T_6 = [(2x+7)(x+1)]^5$$

Ahora reconocemos:

$$a = 7 \wedge b = 1 \wedge c = 5$$

$$\therefore a - b + c = 11$$

PROBLEMA 25 Determine el valor numérico cuando $x = 0$ del término central del cociente notable originado al dividir:

$$\frac{(x+2)^{13} + (x-2)^{13}}{2x}$$

Resolución: Dando forma de división notable:

$$\frac{(x+2)^{13} + (x-2)^{13}}{(x+2) + (x-2)}$$

Observa que el C – N admite 13 términos, siendo el término de lugar siete el que ocupa el lugar central.

Por fórmula tenemos:

$$T_7 = (\text{signo}).(x+2)^{13-7}(x-2)^{7-1}$$

$$T_7 = (+)(x+2)^6.(x-2)^6$$

$$T_7 = (x+2)^6.(x-2)^6$$

Hagamos $x = 0$, luego:

$$V.N = (2)^6.(-2)^6 = 2^6.2^6$$

$$V.N = 2^{6+6} = 2^{12}$$

$$\therefore V.N = 4096$$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 26 El polinomio $P(x) = x^{2010} + ax^3 + bx + c$ es divisible por $(x-1)^3$.
Calcular: $a + b + c$

Resolución: Por condición la división:

$$P(x) \div (x-1)^3 \text{ es exacta.}$$

Por propiedad tenemos:

$$P(x) \div (x-1) \text{ es exacta}$$

Por teorema del resto:

team CALAPENSHKO

$$P(1) = 0$$

Finalmente se tendrá:

$$1 + a + b + c = 0$$

$$\therefore\ a + b + c = -1$$

PROBLEMA 27 Un polinomio P(x) de 4° grado y mónico es divisible en forma separada por (x – 2), (x – 3) y (x – 4), además la suma de sus coeficientes es – 12. Determine el resto de dividir P(x) ÷ (x – 5)

Resolución:

Por condición:

$$P(x) \div (x-2) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

$$P(x) \div (x-3) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

$$P(x) \div (x-4) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Por teorema:

$$P(x) \div [(x-2)(x-3)(x-4)] \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Por identidad:

$$P(x) \equiv (x-2)(x-3)(x-4)Q(x)$$

Observa que $[Q]^\circ = 1$:

$$P(x) \equiv (x-2)(x-3)(x-4)(ax+b)$$

Como P(x) es mónico, necesariamente a = 1:

$$P(x) \equiv (x-2)(x-3)(x-4)(x+b) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Por condición:

$$P(1) = -12$$

En (1) hacemos x = 1:

$$P(1) = (-1)(-2)(-3)(1+b)$$

$$-12 = -6(1+b)$$

$$2 = 1 + b \leftrightarrow b = 1$$

Nuevamente en (1):

$$P(x) \equiv (x-2)(x-3)(x-4)(x+1)$$

Finalmente para x = 5:

$$P(5) = (3)(2)(1)(6)$$

$$\therefore\ P(5) = 36$$

PROBLEMA 28 Si P(x) es un polinomio de 5° grado divisible por $(2x^4 - 3)$. Que al dividirlo separadamente entre (x + 1) y (x – 2) origina restos 7 y 232 respectivamente. Determine el coeficiente del término lineal de P(x).

Resolución:

Por identidad:

$$P(x) \equiv (2x^4 - 3).(ax + b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por condición:

$$P(x) \div (x + 1) \rightarrow R(x) = 7$$

Teorema del resto:

$$P(-1) = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por condición:

$$P(x) \div (x - 2) \rightarrow R(x) = 232$$

Teorema del resto:

$$P(2) = 232 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Con (1) y (2) $x = -1$:

$$P(-1) = (2 - 3)(-a + b)$$

$$7 = (-1)(-a + b) \leftrightarrow a - b = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Con (1) y (3) $x = 2$:

$$P(2) = (32 - 3)(2a + b)$$

$$232 = 29(2a + b) \leftrightarrow 2a + b = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sumando (4) y (5):

$$3a = 15 \leftrightarrow a = 5$$

Asimismo en (4):

$$5 - b = 7 \leftrightarrow b = -2$$

Ahora en (1) tenemos:

$$P(x) \equiv (2x^4 - 3)(5x - 2)$$

$$P(x) \equiv 10x^5 - 4x^4 - 15x + 6$$

$\therefore$ Coeficiente del término lineal $= -15$.

PROBLEMA 29 Calcular el valor numérico de:

$$F(x) \equiv \frac{(x-1)^{39} - (x-1)^{38} + (x-1)^{37} - \ldots\ldots - (x-1)^2 + (x-1) - 1}{(x-1)^{35} - (x-1)^{30} + (x-1)^{25} - \ldots\ldots - (x-1)^{10} + (x-1)^5 - 1}$$

Para: $x = 3$.

Resolución:

Observa que cada término de F(x) es un cociente notable, luego expresando en función de sus divisiones notables tenemos:

$$F(x) \equiv \frac{\dfrac{(x-1)^{40} - 1}{(x-1) + 1}}{\dfrac{(x-1)^{40} - 1}{(x-1)^5 + 1}}$$

team CALAPENSHKO

$$F(x) = \frac{(x-1)^5+1}{(x-1)+1} = \frac{(x-1)^5+1}{x}$$

Finalmente para x = 3:

$$F(3) = \frac{2^5+1}{3} = \frac{33}{3}$$

$$\therefore F(3) = 11$$

PROBLEMA 30 A continuación se muestran dos términos consecutivos de un cociente notable:

$$\ldots\ldots - x^{63}y^{15} + x^{56}y^{18} - \ldots\ldots$$

¿Cuántos términos tiene el cociente notable?

Resolución: La condición dada es:

$$\ldots\ldots - x^{63}y^{15} + x^{56}y^{18} - \ldots\ldots$$

Reescribiendo así:

$$\ldots\ldots - (x^7)^9.(y^3)^5 + (x^7)^8.(y^3)^6 - \ldots\ldots$$

Recordemos que en:

$$\frac{a^n \pm b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots(\text{signo})b^{n-1}$$

El cociente notable presenta en cada uno de sus términos grado absoluto igual a "n – 1", donde "n" es el número de términos.

En el problema se cumple:

$$n - 1 = 9 + 5 \leftrightarrow n - 1 = 14$$

$$\therefore n = 15$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Para que la siguiente expresión:

$$x^4 - 5x^2 + 4x - m$$

Sea divisible por: $x + 1$, el valor de "m" debe ser:

A) -8 B) -4 C) -1
D) 1 E) 9

2. El valor de "n" para que el polinomio:

$$x^3 + mx^2 + nx - 6$$

sea divisible por $x^2 - 5x + 6$ es:

A) -7 B) 11 C) 6
D) -5 E) -11

3. Si: $P(x) \equiv x^7 - 5x^4 + ax^2 + bx + c$
es divisible por:

$$F(x) \equiv (x^2 - 1)(x - 3)$$

Calcular: $a + b + c$

A) 5 B) -5 C) 4
D) -4 E) 3

4. Si al dividir P(x) entre $(x + 1)$, $(x + 2)$ y $(x - 3)$ separadamente se obtuvo el mismo residuo 4. Indicar el residuo de dividir P(x) entre $(x^3 - 7x - 6)$

A) 12 B) 16 C) 2
D) 4 E) 0

5. Determine el valor de "m" para que la división:

$$\frac{x^{8m} - y^{40}}{x^8 - y^4}$$

origine un cociente notable.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

6. Determine "n" sabiendo que la división:

$$\frac{x^{210} - y^n}{x^3 - y^5}$$

origina un cociente notable.

A) 100 B) 150 C) 250
D) 350 E) 400

7. El desarrollo de la división notable:

$$\frac{x^m - y^n}{x^3 + y^4}$$

origina un cociente notable de 14 términos. Halle: $m - n$

A) 14 B) -14 C) 98
D) -98 E) 49

8. El desarrollo de la división notable:

$$\frac{x^{2m} - y^{3n}}{x^3 - y^2}$$

origina un C-N de 30 términos.
Halle: $m - n$

A) 15 B) 20 C) 25
D) 35 E) 30

9. Determine el tercer término del cociente notable originado por:

$$\frac{a^n - b^{5n-18}}{a^2 - b^9}$$

A) $a^{10}b^{16}$ B) $-a^{10}b^{18}$ C) $a^{30}b^{18}$
D) $a^{15}b^6$ E) $a^{32}b^{20}$

10. Con respecto al problema anterior. ¿Cuál es el número de términos del C-N?

A) 36 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

team CALAPENSHKO

11. Calcular el grado absoluto del 6to término del cociente notable originado por:

$$\frac{x^{n-2}+y^{18}}{x+y^2}$$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

12. ¿Cuál es el cuarto término del C-N de:

$$\frac{x^{4n+5}+y^{4n-6}}{x^{n-4}+y^{n-5}}\ ?$$

A) $x^{21}y^6$ B) $-x^{21}y^5$ C) $x^{22}y^6$
D) $-x^{10}y^6$ E) $-x^{21}y^6$

13. Calcular: "a . b" sabiendo que el tercer término del C-N de:

$$\frac{x^{a+b}-y^{a+b}}{x^{a-b}+y^{a-b}}$$

es: $x^{60}y^{40}$

A) 600 B) –2400 C) 4200
D) 35 E) 3500

14. Hallar el grado del décimo término del desarrollo de:

$$\frac{a^{4m+12}-x^{4m-3}}{a^{m-8}-x^{m-9}}$$

A) 32 B) 14 C) 47
D) 31 E) 20

15. Si la división:

$$\frac{x^{15m+50}-y^{15m-10}}{x^{m+1}-y^{m-2}}$$

genera un C-N. Indicar el lugar que ocupa el término de grado absoluto 85.

A) 10 B) 13 C) 15
D) 17 E) 20

16. Cuántos términos admite el C-N de:

$$\frac{x^{5n-10}-y^{20}}{x^5-y^2}$$

A) 12 B) 10 C) 8
D) 6 E) 14

17. Si: $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

es el desarrollo de:

$$\frac{x^a-1}{x^b-1}$$

Halle usted "a . b"

A) 45 B) 15 C) 30
D) 60 E) 75

18. Con el auxilio del problema anterior. Indicar la división notable que originó el siguiente C-N.

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+....+1$$

A) $\frac{x^8-1}{x+1}$ B) $\frac{x^7-1}{x-1}$ C) $\frac{x^{10}+1}{x^2+1}$
D) $\frac{x^{14}-1}{x^2-1}$ E) $\frac{x^{12}-1}{x^2-1}$

19. Cuántos términos tiene el cociente notable originado por:

$$\frac{x^n-y^n}{x^2-y^2}$$

Si el penúltimo término es: x^2y^{82}

A) 84 B) 42 C) 88
D) 44 E) 43

20. En el desarrollo de:

$$\frac{x^{45}+y^{27}}{x^{15}+y^9}$$

hay un término de grado 24, la diferencia de los exponentes de "x" e "y" en ese término es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

team CALAPENSHKO

21. Dado el C-N:

$$\frac{x^{120}-y^{180}}{x^a+y^b}$$

Calcular la suma de las cifras de "ab" sabiendo que los grados absolutos de los términos de su desarrollo aumentan de 3 en 3.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

22. En la división notable:

$$\frac{x^a-y^b}{x^5-y^7}$$

Calcular "a + b", si el quinto término de su cociente es: $x^m y^n$, además: $n - m = 3$

A) 120 B) 118 C) 124
D) 116 E) 128

23. Calcular el valor numérico del término central del C-N de dividir:

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2x} \; ; \; n = \text{impar}$$

para $x = 1$

A) 2^n B) 2^{n+1} C) 2^{n-1}
D) 0 E) 2^{n-2}

24. Determine el término de lugar 21 en el cociente notable de dividir:

$$\frac{2x-x^2}{1-\sqrt[20]{x-1}}$$

A) $x + 1$ B) $x^2 - 1$ C) $(x-1)^2$
D) $x - 1$ E) $(x+1)^2$

25. Cuántos términos fraccionarios tiene el C-N de dividir:

$$\frac{x^{45}-x^{-30}}{x^3-x^{-2}}$$

A) 10 B) 8 C) 7
D) 5 E) 6

26. Si el tercer término del cociente notable de:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(x+2)^m-x^m}{x+1}\right]$$

tiene como valor numérico 2^{12} para $x = 2$. Calcular "m".

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

27. Simplificar:

$$\frac{x^{6n-3}-x^{6n-6}+x^{6n-9}-\ldots+x^9-x^6+x^3-1}{x^{3n-3}-x^{3n-6}+x^{3n-9}-\ldots+x^9+x^6-x^3+1}$$

A) $x^{3n}+1$ B) $x^{3n}-1$ C) x^n+1
D) x^n-1 E) 1

28. En el siguiente cociente notable:

$$\frac{(x+1)^{999}+(x-1)^{999}}{x}$$

existe un término de forma: $a(x^2-1)^b$. Hallar: $(a + b)$

A) 490 B) 497 C) 498
D) 180 E) 200

29. Cuantifique al término central del C-N de dividir:

$$\frac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{8x(x^2+1)}$$

para $x = \sqrt{3}$

A) 16 B) 32 C) 64
D) 28 E) 256

30. ¿Cuál es la suma de los coeficientes de aquel polinomio P(x) mónico de tercer grado divisible separadamente por $(x + 2)$ y $(x + 1)$ que carece de término cuadrático?

A) 12 B) –15 C) –12
D) 18 E) –3

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

31. Un polinomio mónico P(x) de tercer grado es divisible separadamente por (x – 2) y (x – 1) y al dividirlo por (x – 3) origina un resto igual a 20. Determine su término independiente.

A) 7 B) 10 C) 12
D) 14 E) 20

32. Mostrar el polinomio de segundo grado P(x) tal que: P(0) = 1; que sea divisible por (x + 1) y que al dividirlo entre (2x + 1) el resto sea –1 .

A) $x^2 + x - 1$ B) $2x^2 - x - 1$
C) $2x^2 - 3x - 1$
D) $2x^2 + x - 1$ E) $6x^2 + 7x + 1$

33. Al dividir un polinomio P(x) entre (x – 5) se obtiene como resto 10 y un cociente cuya suma de coeficientes es 2. Encontrar el residuo de dividir dicho polinomio por (x – 1)

A) 2 B) 8 C) 10
D) 18 E) 12

34. El cociente de dividir un polinomio P(x) de tercer grado entre (2x – 1) es $(x^2 + 2x - 3)$ y el resto de dividirlo entre (2x + 1) es 1. Determinar el resto de dividir P(x) entre (2x – 1)

A) –7 B) –6,5 C) –7,5
D) –8 E) ED.

35. Calcular "ab" si la división:

$$\frac{x^8 + ax^2 + b}{(x^2 - 1)(x - 1)}$$

es exacta.

A) –6 B) –12 C) –5
D) –8 E) 6

36. El polinomio:

$P(x) \equiv ax^6 + bx^5 - 6x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 12x + c$

es divisible por $(x-1)^2 (x^2 - 4)$

entonces el valor de $(a^2 + b^2 + c^2)$ es:

A) 18 B) 17 C) 16
D) 15 E) 14

37. Un polinomio P(x) disminuido en 5 es divisible por (x + 5) y aumentado en 5 es divisible por (x – 5). Cuál es el residuo de dividir:

$$P(x) \div (x^2 - 25)$$

A) 0 B) x – 2 C) 3x
D) –x E) x

38. Si al dividir P(x) entre $(x^2 + 1)$ el residuo es (x + 3) indicar el residuo de dividir $P^2(x)$ entre $(x^2 + 1)$.

A) 3x + 4 B) 6x + 8 C) 3x – 4
D) x + 3 E) $x^2 + 3$

39. Calcular el valor de: 3(n + n + p), de tal manera que el polinomio:

$$(x + 1)^5 + m(x + 1)^3 + nx + p$$

sea divisible por $(x-1)^3$.

A) 120 B) 324 C) 184
D) 86 E) 132

40. Calcular la suma de los valores de "a" que hacen al polinomio:

$P(x) \equiv x^n - ax^{n-1} + ax - 1 \; ; \; a \in \mathbb{Z}^+$

sea divisible por $(x-1)^2$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

team CALAPENSHKO

41. Un polinomio P(x) de tercer grado es divisible por separado entre (x – 2); (x + 1) y (2x + 1). Si la suma de sus coeficientes es – 30, hallar el cociente de dividir P(x) entre el producto (x – 2)(x + 1)(2x + 1).

A) –4 B) x + 1 C) 5
D) –6 E) 6

42. ¿Qué lugar ocupa el término independiente en el desarrollo de C.N.?

$$\frac{x^{27} - x^{-9}}{x^3 - x^{-1}}$$

A) 6 B) 7
C) No tiene término independiente
D) 8 E) 9

43. En el siguiente cociente notable:

$$\frac{(a+b)^n + 32}{a^2 + 2b + b^2 + 2}$$

Determinar el valor numérico del tercer término contado a partir del extremo final para: $a = 3 \wedge b = -1$

A) 128 B) 32 C) 64
D) 256 E) 16

44. Siendo: $P(x) \equiv x^4 - x^3 + nx - n$ divisible separadamente entre los binomios (x – a), (x – b), (x – c), (x – d), señale el residuo de dividir P(x) entre:

$$(x - a^{-1} - b^{-1} - c^{-1} - d^{-1})$$

A) 2 B) 0 C) 1
D) –1 E) –2

45. Se tiene un polinomio de segundo grado que es divisible entre (x – 1). Se sabe además que su término independiente es –3 y que al dividirlo entre (x + 1) se obtuvo como resto 8. Hallar el resto que resulta de dividir el polinomio entre (x – 3).

A) 10 B) 22 C) 36
D) 48 E) 56

46. Un polinomio P(x) al ser dividido entre $(x^2 + 1)$, da como residuo (– x + 1). ¿Cuál será el residuo en?

$$\frac{[P(x)]^7}{x^2 + 1}$$

A) x – 1 B) 4(x + 1) C) 8(x + 1)
D) 8(x – 1) E) 4(x – 1)

47. Calcular el resto de dividir un polinomio P(x) del sétimo grado entre (x + 2), si se anula para: x = 3, x = 2, x = 1 y es divisible entre $(x^2 + 1)$ y (x + 5). Además el resto de dividirlo entre (x + 1) es 960 y su término independiente es 60.

A) 710 B) 7200 C) 2300
D) 1221 E) N.A.

48. Sea: $f(x) \equiv x^{1999} + x^{1998} + x^{1997} + ... + x + 1$
Calcular el resto que se obtiene al dividir $f(x^{2000})$ entre f(x).

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2000 E) –2000

49. Al dividir P(x) entre (x + a) el residuo es 4bc. Al dividir Q(x) entre (x + a) el residuo es b^2c^2. Determine el resto de dividir $[P^2(x) + Q(x)]$ entre (x + a), sabiendo que $P^2(x)$ es divisible por Q(x).

A) 4bc B) b^2c^2 C) 2bc
D) 16 E) 4

50. Calcular: a + b + c, sabiendo que a, b y c son 3 números reales y diferentes entre si que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} a^3 + ap + q = 0 & ..... (1) \\ b^3 + bp + q = 0 & ..... (2) \\ c^3 + cp + q = (c-a)(c-b) & ..... (3) \end{cases}$$

A) – 1 B) 2 C) – 4
D) – 2 E) 1

team CALAPENSHKO

Capítulo 6

Factorización en $\mathbb{Z}$

CAPACIDADES:

- Transformar un polinomio como multiplicación de otros polinomios.
- Reconocer factores primos en $\mathbb{Z}$.
- Conocer los diversos métodos para factorizar a un polinomio.

$$P(x) \equiv \boxed{x^2-4} \begin{cases} x+2 \\ x-2 \\ x^2-4 \\ 1 \end{cases}$$

PIERRE FERMAT

SIGUE SIENDO UN MISTERIO, Los matemáticos, desde que Euclides demostró que existen infinitos números primos, han estado buscando una prueba para determinar si un número dado es primo o no. Dicha comprobación todavía no ha sido hallada.

No obstante, matemáticos del siglo XVII como Merseune y Fermat poseían un método para reconocer los números primos que nos es totalmente desconocido.

Dichos matemáticos poseían un misterioso sistema para determinar los valores de p, para los cuales:

$$2^p - 1 = \text{número primo}$$

Cierta vez le preguntaron a Fermat si el número:

100.895.598.169 era primo.

Contestó, sin una vacilación que era el producto de:

898.423 × 112.303 siendo éstos números primos.

Con los métodos de cálculo existentes en aquella época y sin una fórmula general, se hubiera tardado años en encontrar esta respuesta.

team CALAPENSHKO

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIO EN $\mathbb{Z}$

DEFINICIÓN

Es el proceso mediante el cual un polinomio de coeficientes enteros se representa como la multiplicación de otros dos o más polinomios también de coeficientes enteros.

Ejemplo: Para el polinomio:

$$P(x) \equiv 4x^2 - 9$$

Diferencia de cuadrados:

$$P(x) \equiv (2x)^2 - 3^2$$

Ahora ya está factorizado:

$$P(x) \equiv (2x+3)(2x-3)$$

$$\therefore \quad 4x^2 - 9 <> (2x+3)(2x-3)$$

FACTOR PRIMO EN $\mathbb{Z}$

Es cualquier polinomio de coeficientes enteros que no admite factorización en $\mathbb{Z}$, también se le llama polinomio irreducible, veamos algunos ejemplos:

- $P(x) \equiv x + 1$ es un factor primo en $\mathbb{Z}$
- $F(x) \equiv x^2 - 2$ es un factor primo en $\mathbb{Z}$, puesto que $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}), \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
- $M(x) \equiv 4x^2 - 1$ ¡No es un factor primo en $\mathbb{Z}$! ¿Por qué?, porque se le puede expresar así:

  $$M(x) \equiv (2x+1)(2x-1)$$

  Es decir acepta factorización en $\mathbb{Z}$.

FACTOR O DIVISOR

Dado un polinomio se dice que un factor o divisor de este es cualquier otro polinomio contenido en el:

- $P(x) \equiv x^2 - x - 2 <> (x-2)(x+1)$

  observar que $(x-2)$ es un factor de $P(x)$ pues está contenido en $(x^2 - x - 2)$

OBSERVACIÓN

Dado un polinomio, decimos que un factor algebraico de este es cualquier polinomio literal (Grado ≥ 1) contenido en él.

team CALAPENSHKO

TEOREMA

Si F es un factor de P, entonces la división $\frac{P}{F}$ es exacta.

- ¿Será (x + 1) factor del polinomio $P(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$?

  Si (x + 1) es factor de P(x), la división:

  $$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}$$

  deberá ser exacta.

  Por el teorema de resto: $x + 1 = 0$

  $$x = -1$$

  $$R(x) \equiv (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$
  $$R(x) \equiv -1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow R(x) \equiv 0$$

  Como el residuo es nulo se puede afirmar que la división es exacta

  $$\therefore (x + 1) \text{ es un factor de } P(x)$$

- ¿Será (x – 2) factor del polinomio $F(x) \equiv x^4 - 2x^3 + x - 10$?

  Veamos si la división:

  $$\frac{x^4 - 2x^3 + x - 10}{x - 2}$$

  es exacta

  Por el teorema del resto: $x - 2 = 0$

  $$x = 2$$

  $$R(x) \equiv (2)^4 - 2(2)^3 + 2 - 10$$
  $$R(x) \equiv 16 - 16 + 2 - 10 \rightarrow R(x) \equiv -8$$

  Como el residuo es no nulo, la división no es exacta.

  $$\therefore (x - 2) \text{ no es un factor de } F(x)$$

PROPIEDADES

1) Un polinomio factorizado completamente, es aquel que se ha descompuesto como la multiplicación de sus factores primos.

2) Los factores primos podrán ser simples (si su exponente es la unidad) o múltiples (si su exponente es mayor que la unidad).

3) Todo factor primo es un factor, pero cualquier factor no es factor primo.

4) La unidad es factor de cualquier polinomio.

5) Todo polinomio primitivo de primer grado es primo.

- $P(x) \equiv (x^3+1)(x-2)^3$

  Aún no está factorizado completamente, ¿por qué?, falta descomponer x^3+1

  Ya que $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, entonces: $P(x) \equiv (x+1)(x^2-x+1)(x-2)^3$ se se encuentra factorizado completamente.

  Observar que $(x+1)$ y (x^2-x+1) son factores primos simples.

  Así mismo observar que $(x-2)$ es un factor primo múltiple (su multiplicidad es tres, se repite tres veces)

NÚMERO DE FACTORES PRIMOS Y NÚMERO DE FACTORES DE UN POLINOMIO

Sea P un polinomio factorizado, de modo que:

$$P \equiv A^{\alpha} . B^{\beta} . C^{\theta}$$

1) Número de factores primos = N° de f. p.
   N° de f. p. = 3 ¡Cantidad de bases!
2) Número de factores = N° fact.
   N° de fact = $(\alpha+1) . (\beta+1) . (\theta+1)$

- Para $P(x) \equiv (x-1)^2(x+4)$
  Tenemos: N° de f. p. = 2
  N° de fact. = $(2+1) . (1+1) = (3) . (2) = 6$

  Observa que entre los seis polinomios está contenido el polinomio constante uno, si no lo consideramos, luego los factores algebraicos del polinomio son cinco.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

I. FACTOR COMÚN: Se busca el factor repetido en toda la expresión, las variables de dicho término se deberán extraer con su menor exponente.

- Factorizar $P(x) \equiv x^4+5x^3+x^2$ extrayendo x^2 tenemos:
  $P(x) \equiv x^2.(x^2+5x+1)$

- Factorizar $R(x; y) \equiv x^4y^3-x^3y^4+x^2y^5$ extrayendo $x^2 \wedge y^3$ tenemos:
  $R(x; y) \equiv x^2 . y^3 . (x^2-xy+y^2)$

II. AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS: Se agrupan convenientemente los términos de la expresión con la finalidad de obtener alguna estructura repetida.

- Factorizar $P(x; y) \equiv x^2+xy-x-y$
  Agrupando dos o dos según:

$$P(x; y) \equiv (x^2+xy)+(-x-y)$$
$$P(x; y) \equiv \underbrace{x(x+y)}-\underbrace{(x+y)}$$

estructura repetida

$$P(x; y) \equiv (x+y) . (x-1)$$

team CALAPENSHKO

III. USO DE EQUIVALENCIAS: Consiste en la aplicación de los productos notables:

- Factorizar

$$P(x; y) = 4x^2 - y^2$$

Por diferencias de cuadrados:

$$P(x; y) = (2x)^2 - y^2$$

$$\therefore \quad P(x; y) = (2x + y).(2x - y)$$

IV. ASPAS:

1) Aspa simple: Para factorizar algunos trinomios de grado par cuya forma general sea:

$$\boxed{P(x; y) = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}}$$

Esquema:

$$ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

$$a_1x^m \quad c_1y^n$$

$$a_2x^m \quad c_2y^n$$

Donde: $a_1c_2x^m y^n + a_2c_1x^m y^n = bx^m y^n$

$$\therefore \quad P(x; y) = (a_1x^m + c_1y^n).(a_2x^m + c_2y^n)$$

Observación: A veces luego de aplicar el aspa simple para culminar la factorización se recurre a cierta equivalencia.

- Factorizar:

$$P(x) = 2x^2 + 7x + 3$$

Según el esquema tenemos:

$$P(x) = 2x^2 + 7x + 3$$

$$2x \quad 1$$

$$x \quad 3$$

Donde $(2x) \cdot 3 + (x) \cdot 1 = 6x + x = 7x$

$$\therefore \quad P(x) = (2x + 1) \cdot (x + 3)$$

- Factorizar

$$P(x; y) \equiv x^{12} + x^6y^2 - 2y^4$$

Según el esquema tenemos:

$$P(x; y) \equiv x^{12} + x^6y^2 - 2y^4$$

$$x^6 \quad 2y^2$$

$$x^6 \quad -y^2$$

Donde $(x^6)(-y^2) + (x^6)(2y^2) \equiv -x^6y^2 + 2x^6y^2 \equiv x^6y^2$

$$P(x; y) \equiv (x^6 + 2y^2) \cdot (\underbrace{x^6 - y^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}})$$

$$\therefore \quad P(x; y) \equiv (x^6 + 2y^2)(x^3 + y)(x^3 - y)$$

2) Aspa doble: Para factorizar algunos polinomios de seis términos cuyo grado sea par, veamos su forma general:

$$P(x; y) \equiv \underset{*}{ax^{2m}} + bx^my^n + \underset{*}{cy^{2n}} + dx^m + ey^n + \underset{*}{f}$$

* = términos fijos, con cada dos de ellos se ejecuta un aspa simple.

Esquema:

$$ax^{2m} + bx^my^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$$

$$a_1x^m \quad c_1y^n \quad f_1$$

$$a_2x^m \quad c_2y^n \quad f_2$$

$$\therefore \quad P(x; y) \equiv (a_1x^m + c_1y^n + f_1)(a_2x^m + c_2y^n + f_2)$$

- Factorizar

$$P(x; y) \equiv 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x - 17y + 4$$

Según el esquema tenemos:

$$P(x; y) \equiv 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x - 17y + 4$$

$$3x \quad 5y \quad -4$$

$$2x \quad 3y \quad -1$$

$$\therefore \quad P(x; y) \equiv (3x + 5y - 4)(2x + 3y - 1)$$

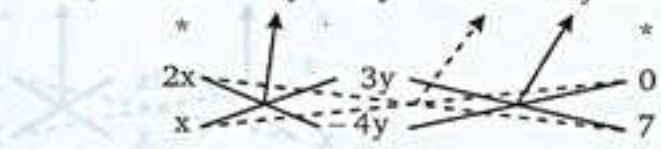
team CALAPENSHKO

- Factorizar:

$$F(x; y) = 2x^2 - 5xy - 12y^2 + 14x + 21y$$

Completando al polinomio según el esquema tenemos:

$$F(x; y) = 2x^2 - 5xy - 12y^2 + 14x + 21y + 0$$



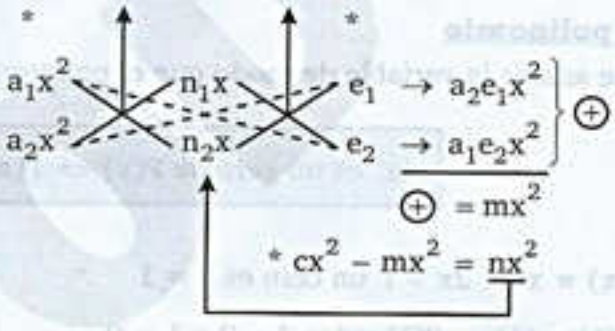
$$\therefore F(x; y) = (2x + 3y)(x - 4y + 7)$$

3) Aspa doble especial: Para factorizar algunos polinomios de cuarto grado, completos y ordenados

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Esquema:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$



$$\therefore P(x) = (a_1x^2 + n_1x + e_1)(a_2x^2 + n_2x + e_2)$$

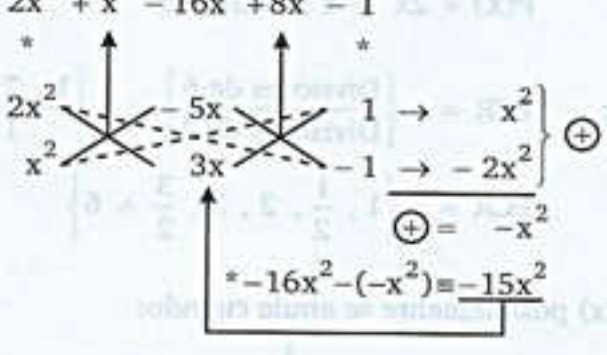
Observación: A veces para culminar la factorización se utiliza un aspa simple en cada factor obtenido.

- Factorizar

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 8x - 1$$

Según el esquema tenemos:

$$2x^4 + x^3 - 16x^2 + 8x - 1$$

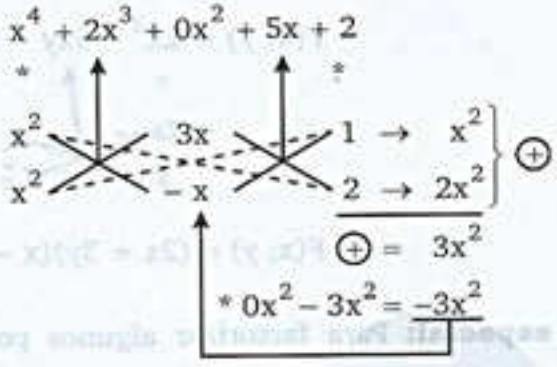


$$\therefore P(x) = (2x^2 - 5x + 1)(x^2 + 3x - 1)$$

- Factorizar:

$$F(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 5x + 2$$

Según el esquema tenemos:



$$\therefore F(x) \equiv (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 2)$$

V. DIVISORES BINÓMICOS: Se utiliza para factorizar polinomios de grado $n \geq 2$ que admiten por lo menos un factor lineal (primer grado)

Cero de un polinomio

Es el valor que asume la variable de modo que el polinomio se anule, es decir:

$$\boxed{\text{"a" es un cero de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

- Para $P(x) \equiv x^7 - 2x + 1$ un cero es $x = 1$

  pues: $P(1) = (1)^7 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Posibles ceros racionales (PCR)

Es el conjunto de valores racionales que podrá asumir la variable "x" y que posiblemente anulen al polinomio, dichos valores se obtienen por combinación a partir del esquema.

$$\boxed{PCR = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores del término independiente en } P(x)}{\text{Divisores del coeficiente principal en } P(x)} \right\}}$$

- Para $P(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

  Tenemos: $PCR = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores de } 6}{\text{Divisores de } 2} \right\} = \pm \left\{ \frac{1, 2, 3 \wedge 6}{1 \wedge 2} \right\}$

  $$PCR = \pm \left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{3}{2} \wedge 6 \right\}$$

Luego P(x) posiblemente se anule cuando:

$$x = \pm 1, \; x = \pm \frac{1}{2}, \; x = \pm 2, \; x = \pm 3, \; x = \pm \frac{3}{2}, \; x = \pm 6$$

team CALAPENSHKO

TEOREMA DEL FACTOR

Si x = a es un cero del polinomio P(x)

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \text{ es un factor de } P(x)$$

REGLAS PARA FACTORIZAR SEGÚN DIVISORES BINÓMICOS

Dado un polinomio P(x)

1) Se determina un cero de P(x): x = a

2) Por el teorema del factor (x – a) es un factor de P(x), luego P(x) se podrá expresar así:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Donde Q(x) es el cociente de dividir $\frac{P(x)}{x - a}$, dicha división se ejecuta según la regla de Paolo Ruffini

- Factorizar:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

$$PCR = \pm\left\{\frac{1, 2, 3, 6}{1, 2}\right\}$$

Evaluando para x = 2

Según la regla de Ruffini, tenemos:

	2	1	– 13	6
2	↓	4	10	– 6
	2	5	– 3	0

Como la división es exacta x = 2 es un cero de P(x), luego (x – 2) es un factor de P(x) siendo el otro factor el cociente de la división.

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Notar que el trinomio admite factorización, luego por aspa simple tenemos:

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$$

$$2x \times -1$$
$$x \times 3$$

$$\therefore \quad P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Factoriza cada uno de los siguientes polinomios

A) $P(x;y) = x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$

B) $P(x;y) = 4x^7y - 8x^6y^2 + 6x^5y^3$

C) $P(x;y) = 25x^2 - 4y^2$

D) $P(x;y) = (x+1)^2 - (y-1)^2$

E) $P(x) = (x+1)x^2 - 2(x+1)x + (x+1)$

2. Con respecto al polinomio:

$P(x;y) = x^2y^3(x-y)(x+y)$

Marcar Verdadero (V) o Falso (F)

I. Tiene 3 factores primos .....( )

II. Tiene 2 factores primos lineales .....( )

III. La suma de FP es $3x+y$ .....( )

3. Coloca un visto (√) en cada recuadro que corresponde a un polinomio que acepta factorización por el método del aspa simple.

A) $P(x) = x^2 - 20x + 91$ ☐

B) $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ☐

C) $P(x;y) = x^{10} - 2x^5y^3 - 8y^6$ ☐

D) $P(x) = x^4 - x - 6$ ☐

E) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ ☐

4. Determina la suma de los factores primos de cada uno de los siguientes polinomios.

A) $P(x) = x^2 + 5x + 6$

B) $P(x) = 3x^2 + 10x + 3$

C) $P(x) = x^3 + x^2$

D) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

E) $P(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$

5. Calcular "m" en cada caso.

A) Si $(x+1)$ es un factor de $x^3 + x^2 + mx + 1$

B) Si $(x-2)$ es un factor de $x^2 - m$

C) Si x es un factor de $x^3 - 2x^2 + m - 4$

D) Si $(x+3)$ es un factor de $x^2 + 7x + m - 2$

E) Si (x^2+x+1) es un factor de $x^4 + (2m-1)x^2 + 1$

6. Completa las filas de la tabla adjunta si:

NFP = Número de factores primos

NFLP = Números de factores primos lineales

NFPC = Números de factores primos cuadráticos

POLINOMIO	N.F.P.	N.F.P.L.	N.F.C.P.
$x^3y^2 - 2x^2y^3 + xy^4$			
$x^2 + xy - x - y$			
$x^3 + x^2 - x - 1$			
$x^4 - x^2 - 4x - 4$			
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$			

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 ¿Cuántos factores primos presenta el siguiente polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^3y^5 - xy^7 \ ?$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x; y) \equiv x^3y^5 - xy^7$$

Por factor común tenemos:

$$P(x; y) \equiv x \cdot y^5 \cdot \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$P(x; y) \equiv x \cdot y^5 \cdot (x + y) \cdot (x - y)$$

Luego los factores primos son : $x,\ y,\ x + y,\ x - y$

$\therefore$ Nº de f. p. $= 4$

PROBLEMA 2 Factorizar:

$$P(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1$$

Resolución: Procedemos a realizar agrupaciones convenientes.

$$P(x) \equiv x^3 + x^2 + (-x - 1)$$

$$P(x) \equiv x^2(x + 1) - (x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x + 1) \cdot \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$P(x) \equiv (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$\therefore$ $P(x) \equiv (x + 1)^2 \cdot (x - 1)$

PROBLEMA 3 ¿Cuántos factores primos presenta la expresión:

$$P(x; y) \equiv x(x^2 + xy - 1) - y(y^2 + xy - 1)\ ?$$

Resolución: La expresión dada será:

$$P(x; y) \equiv x^3 + x^2y - x - y^3 - xy^2 + y$$

Agrupando convenientemente tenemos:

$$P(x; y) \equiv x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 - x + y$$

$$P(x; y) \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y) - (x - y)$$

$$P(x; y) \equiv (x - y)[(x^2 + xy + y^2) + xy - 1]$$

$$P(x; y) \equiv (x-y)[x^2+2xy+y^2-1]$$
$$P(x; y) \equiv (x-y)[(x+y)^2-1]$$

Observar que: $(x+y)^2-1 = (x+y+1)(x+y-1)$

$$P(x; y) \equiv (x-y)(x+y+1)(x+y-1)$$

Luego los factores primos son: $x-y,\ x+y+1,\ x+y-1$

$\therefore$ N° de f. p. = 3

PROBLEMA 4 Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv xy(x-y) - xz(x-z) + yz(y-z)$$

Indicar la cantidad de factores que presenta.

Resolución: Al efectuar en los dos últimos se tiene:

$$P(x;y;z) \equiv xy(x-y) - x^2z + xz^2 + y^2z - yz^2$$

Agrupando convenientemente según lo indicado tenemos:

$$P(x;y;z) \equiv xy(x-y) - z(x^2-y^2) + z^2(x-y)$$

Observar que: $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

$$P(x;y;z) \equiv xy(x-y) - z(x+y)(x-y) + z^2(x-y)$$
$$P(x;y;z) \equiv (x-y)[xy - z(x+y) + z^2]$$
$$P(x;y;z) \equiv (x-y)[xy - zx - zy + z^2]$$
$$P(x;y;z) \equiv (x-y)[x(y-z) - z(y-z)]$$
$$P(x;y;z) \equiv (x-y)(y-z)(x-z)$$

$\therefore$ N° de factores = $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$

PROBLEMA 5 ¿Cuántos factores lineales presenta el polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^6y^2 - y^2 + x^6y - y\ ?$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x; y) \equiv y[x^6y - y + x^6 - 1]$$
$$P(x; y) \equiv y[y(x^6-1) + (x^6-1)]$$
$$P(x; y) \equiv y\ .\ (x^6-1)\ .\ (y+1)$$

Observar que: $x^6 - 1 = (x^3)^2 - (1)^2 = (x^3+1)(x^3-1)$

$$P(x; y) \equiv y\ .\ (x^3+1)\ .\ (x^3-1)\ .\ (y+1)$$

team CALAPENSHKO

Finalmente por suma y diferencia de cubos en: $x^3 + 1$, $x^3 - 1$

$$P(x; y) \equiv y(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)(y+1)$$

Los factores primos lineales (de primer grado) son:

$$y\ ;\ x+1\ ;\ x-1\ ;\ y+1$$

$\therefore$ Nº de f. p. l = 4

PROBLEMA 6 ¿Cuántos factores primos cuadráticos tiene el polinomio:

$$P(x) \equiv 8x^6 - 63x^3 - 8\ ?$$

Resolución: Teniendo en cuenta el criterio del aspa simple:

$$P(x) \equiv 8x^6 - 63x^3 - 8$$

$8x^3$ — 1

x^3 — -8

$$P(x) \equiv (8x^3 + 1)\,.\,(x^3 - 8)$$

$$P(x) \equiv [(2x)^3 + 1^3]\,.\,[x^3 - 2^3]$$

$$P(x) \equiv (2x+1)(4x^2 - 2x + 1).(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

primos cuadráticos

$\therefore$ Nº de f. p. c = 2

PROBLEMA 7 Factorizar:

$$P(x) \equiv a^2x^2 - 8acx + 16c^2 - 25b^2$$

Resolución: Observar que : $16c^2 - 25b^2 = (4c)^2 - (5b)^2 = (4c + 5b)\,(4c - 5b)$

Ahora tenemos : $P(x) \equiv a^2x^2 - 8acx + (4c + 5b)\,.\,(4c - 5b)$

Por aspa simple : $P(x) \equiv a^2x^2 - 8acx + (4c+5b)\,.\,(4c-5b)$

ax — $-(4c+5b)$

ax — $-(4c-5b)$

$$P(x) \equiv [ax - (4c + 5b)]\,.\,[ax - (4c - 5b)]$$

$\therefore$ $P(x) \equiv (ax - 4c - 5b)\,.\,(ax - 4c + 5b)$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 8 ¿Cuántos factores primos tiene el polinomio:

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x + 6\ ?$$

Resolución: De acuerdo con el criterio de los divisores binómicos escogemos $x = 1$

	1	4	0	−10	−1	6
1	↓	1	5	5	−5	−6
	1	5	5	−5	−6	0

$$P(x) = (x-1)\underbrace{(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6)}_{\text{Por aspa doble especial}}$$

$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$

x^2 $5x$ $6 \rightarrow 6x^2$ ⊕

x^2 $0x$ $-1 \rightarrow -x^2$

⊕ $= 5x^2$

$* \ 5x^2 - 5x^2 = \underline{0x^2}$

$$P(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 + 5x + 6)}_{\text{Aspa simple}}(x^2 - 1)$$

$$P(x) = (x-1)(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+3)(x+2)(x+1)$$

$\therefore$ N° de f. p = 4

PROBLEMA 9 Factorizar:

$$P(x; y) = 2x^2 - 15y^2 + 7xy + 22y - 6x - 8$$

Resolución: De acuerdo con el criterio del aspa doble ordenamos al polinomio dado de la manera siguiente:

$$P(x; y) = 2x^2 + 7xy - 15y^2 - 6x + 22y - 8$$

$2x$ $-3y$ 2

x $5y$ -4

$\therefore$ $P(x; y) = (2x - 3y + 2)\,.\,(x + 5y - 4)$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 10 Si uno de los factores primos cuadráticos del polinomio:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x + 2$$

es de la forma: $x^2 + ax + b$; con $a, b \in Z^+$

Calcular: $a + b$

Resolución: De acuerdo con el método del aspa doble especial procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 5x + 2$$

$$\begin{array}{lll} x^2 & 3x & 1 \rightarrow x^2 \\ x^2 & -x & 2 \rightarrow 2x^2 \end{array} \Big\} +$$

$$+ = 3x^2$$

$$0x^2 - 3x^2 = -3x^2$$

$$P(x) = (x^2 + 3x + 1)\,.\,(x^2 - x + 2)$$

De la Condición: $x^2 + 3x + 1 = x^2 + ax + b$

De donde: $a = 3\,,\ b = 1$

$$\therefore\ a + b = 4$$

PROBLEMA 11 Factorizar:

$$P(x) = x^6 + 4x^5 - 21x^4 - 20x^2 - 4$$

Resolución: Ordenamos convenientemente los términos de P(x) para aplicar luego un aspa doble:

$$P(x) = x^6 + 4x^5 - 21x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 4$$

$$\begin{array}{lll} x^3 & 7x^2 & 2 \\ x^3 & -3x^2 & -2 \end{array}$$

$$\therefore\quad P(x) = (x^3 + 7x^2 + 2)(x^3 - 3x^2 - 2)$$

PROBLEMA 12 ¿Cuántos factores primos presenta el siguiente polinomio:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 + 10x^2 + 8x + 9?$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

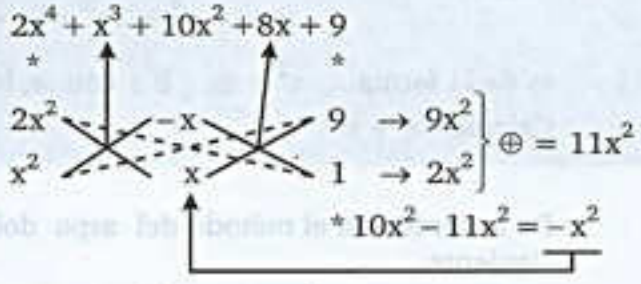
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

Resolución: De acuerdo con el método del aspa doble especial, el polinomio se factoriza de la manera siguiente



Ahora tenemos:

$$P(x) \equiv (2x^2 - x + 9)(x^2 + x + 1)$$

$\therefore$ Nº de factores primos = 2

PROBLEMA 13 Determine la suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv 24x^3 - 10x^2 - 3x + 1$$

Resolución: De acuerdo con el método de los divisores binómicos procedemos a factorizar el polinomio dado, para lo cual escogemos: $x = \frac{1}{2}$

	24	−10	−3	1
$\frac{1}{2}$	↓	12	1	−1
	24	2	−2	0
÷ 2:	12	1	−1	

Ahora tenemos: $P(x) \equiv (2x - 1)\underbrace{(12x^2 + x - 1)}_{\text{Aspa simple}}$

$$P(x) \equiv (2x - 1)(4x - 1)(3x + 1)$$

Finalmente:

$$\Sigma \text{ f. p} = 2x - 1 + 4x - 1 + 3x + 1$$

$\therefore \Sigma \text{ f. p} = 9x - 1$

PROBLEMA 14 Si: $P(x; y) \equiv x + ay + c^2; c \in \mathbb{Z}$ es un factor del polinomio: $F(x) \equiv x(x + y + 4) + 3(y + 1)$. Calcular: $P(200; -190)$

Resolución: El polinomio dado es:

$$F(x) \equiv x(x + y + 4) + 3(y + 1)$$

$$F(x) \equiv x^2 + xy + 4x + 3y + 3$$

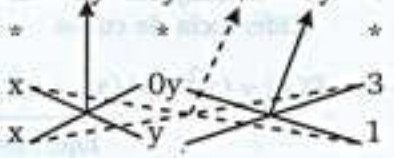
Reescribiendo así:

$$F(x) \equiv x^2 + xy + 0y^2 + 4x + 3y + 3$$

team CALAPENSHKO

Por aspa doble tenemos:

$$F(x) = x^2 + xy + 0y^2 + 4x + 3y + 3$$



$$F(x) = (x + 3)(x + y + 1)$$

Por condición:

$$x + ay + c^2 = x + y + 1$$

Ahora tenemos:

$$P(x; y) = x + y + 1$$

Finalmente:

$$P(200; -190) = 200 - 190 + 1$$

$$\therefore P(200; -190) = 11$$

PROBLEMA 15 Factorizar:

$$P(x;y;z) = x^2yz - 3x^3z + 2yz - 6xz - 6x^2 - 3x^2z^2 + 2xy + xyz^2$$

Resolución: Agrupando de 2 en 2 tenemos:

$$P(x;y;z) = (x^2yz - 3x^3z) + (2yz - 6xz) + (-6x^2 + 2xy) + (-3x^2z^2 + xyz^2)$$

Ahora por factor común en cada grupo:

$$P(x;y;z) = x^2z \,.\, (y - 3x) + 2z(y - 3x) + 2x(y - 3x) + xz^2(y - 3x)$$

Extrayendo el factor común $y - 3x$:

$$P(x;y;z) = (y - 3x) \,.\, (x^2z + 2z + 2x + xz^2)$$

Agrupamos en el segundo factor:

$$P(x;y;z) = (y - 3x) \,.\, \left[(x^2z + xz^2) + (2x + 2z)\right]$$

$$P(x;y;z) = (y - 3x) \,.\, \left[xz(x + z) + 2(x + z)\right]$$

$$\therefore \quad P(x;y;z) = (y - 3x) \,.\, (x + z) \,.\, (xz + 2)$$

PROBLEMA 16 Factorizar:

$$P(x) = (x^6 - 1)(x^4 - x^2 + 1) - 3x^2(x^3 + x^2)(x - 1)$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x) \equiv \underbrace{(x^6-1)}_{\text{Diferencia de cubos}}(x^4-x^2+1) - 3x^2\underbrace{(x^3+x^2)}_{\text{Factor común}}(x-1)$$

$$P(x) \equiv (x^2-1)\underbrace{(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)}_{\text{Equivalencia de Argan't d}} - 3x^2.x^2.\underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$P(x) \equiv (x^2-1).(x^8+x^4+1) - 3x^4.(x^2-1)$$

Por factor común binomio

$$P(x) \equiv (x^2-1).(x^8+x^4+1-3x^4)$$

$$P(x) \equiv (x^2-1).(x^8-2x^4+1)$$

$$P(x) \equiv (x^2-1).(x^4-1)^2 \equiv (x^2-1).\left[(x^2-1)(x^2+1)\right]^2$$

$$P(x) \equiv (x^2-1).(x^2-1)^2.(x^2+1)^2 \equiv (x^2-1)^3.(x^2+1)^2$$

Por diferencia de cuadrados

$$P(x) \equiv \left[(x+1).(x-1)\right]^3.(x^2+1)^2$$

$$\therefore \quad P(x) \equiv (x+1)^3.(x-1)^3.(x^2+1)^2$$

PROBLEMA 17 Determine el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x;y) = (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)^2 - x^4y^4$$

Resolución: Por diferencia de cuadrados, el polinomio dado será:

$$P(x;y) \equiv (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+x^2y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4-x^2y^2)$$

Reacomodando y reduciendo tenemos:

$$P(x;y) \equiv \underbrace{(x^4+x^3y+x^2y^2}+x^2y^2+xy^3+y^4)\underbrace{(x^4+x^3y}+xy^3+y^4)$$

Extrayendo factor común según las agrupaciones:

$$P(x;y) = \left[x^2.\underbrace{(x^2+xy+y^2)} + y^2.\underbrace{(x^2+xy+y^2)}\right]\left[x^3.\underbrace{(x+y)} + y^3.\underbrace{(x+y)}\right]$$

$$P(x;y) \equiv (x^2+xy+y^2).(x^2+y^2).(x+y).\underbrace{(x^3+y^3)}_{\text{Suma de cubos}}$$

$$P(x;y) \equiv (x^2+xy+y^2).(x^2+y^2).\underbrace{(x+y).(x+y)}.(x^2-xy+y^2)$$

$$P(x;y) \equiv (x^2+xy+y^2).(x^2+y^2).(x+y)^2.(x^2-xy+y^2)$$

$$\therefore \quad N^\circ \text{ de f. p} = 4$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Factorizar:

$$P(x) = x^5 + x + 1$$

Resolución: Sumando y restando x^2 con la finalidad de agrupar convenientemente:

$$P(x) = x^5 + x + 1 + x^2 - x^2$$

$$P(x) = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) = x^2\underbrace{(x^3 - 1)}_{\text{Diferencia de cubos}} + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) = (x^2 + x + 1).[x^2(x-1) + 1]$$

$$\therefore \quad P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

PROBLEMA 19 Factorizar:

$$P(x;y) = \left(x^{24} + y^{24} + \left(x^6 + y^6\right)^4\right)^4$$

Resolución: Hagamos que $x^6 = m$; $y^6 = n$, ahora en la base de la potencia P(x;y) tenemos:

$$P = m^4 + n^4 + (m+n)^4$$

$$P = m^4 + n^4 + m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$$

$$P = 2m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + 2n^4$$

$$P = 2\underbrace{(m^4 + 2m^3n + 3m^2n^2 + 2mn^3 + n^4)}_{\textbf{ASPA DOBLE ESPECIAL}}$$

$$P = 2(m^2 + mn + n^2).(m^2 + mn + n^2) = 2(m^2 + mn + n^2)^2$$

Reponiendo las variables tenemos:

$$P(x;y) = \left[2\left(x^{12} + x^6y^6 + y^{12}\right)^2\right]^4 = 16\left(x^{12} + x^6y^6 + y^{12}\right)^8$$

Por la equivalencia de Argand:

$$P(x;y) = 16\left[\left(x^6 + x^3y^3 + y^6\right).\left(x^6 - x^3y^3 + y^6\right)\right]^8$$

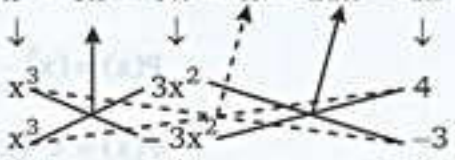
$$\therefore \quad P(x;y) = 16\left(x^6 + x^3y^3 + y^6\right)^8.\left(x^6 - x^3y^3 + y^6\right)^8$$

PROBLEMA 20 Determine el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) = x^6 - 9x^4 + x^3 - 21x^2 - 12$$

Resolución: Reacomodando al polinomio para aplicar un aspa doble tenemos:

$$P(x) = x^6 + 0x^5 - 9x^4 + x^3 - 21x^2 - 12$$



$$P(x) = (x^3 + 3x^2 + 4)(x^3 - 3x^2 - 3)$$

$\therefore$ N° de f. p = 2

PROBLEMA 21 Factorizar:

$$P(x) = x^{10} - x^7 - 7x^5 - 12x^4 + 7x^2 + 12$$

Resolución: Agrupando en forma conveniente para aplicar un aspa simple:

$$P(x) = x^{10} - (x^7 + 7x^5) - (12x^4 - 7x^2 - 12)$$

$$P(x) = x^{10} - (x^7 + 7x^5) - (3x^2 - 4)(4x^2 + 3)$$

$\therefore$ $P(x) = (x^5 + 3x^2 - 4)(x^5 - 4x^2 - 3)$

PROBLEMA 22 Determine el número de factores que presenta el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x + 1$$

Resolución: Reacomodando los términos del polinomio dado:

$$P(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^3 + x + x + 1$$

Sumando y restando x^2 de un modo conveniente:

$$P(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + x - x^2 + x + 1$$

Agrupando cada tres términos tenemos:

$$P(x) = x^3(x^2 - x - 1) - x(x^2 - x - 1) - (x^2 - x - 1)$$

$$P(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 - x - 1)$$

$\therefore$ N° de factores = (2).(2) = 4

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Factorizar:

$$P(x) = x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1$$

Resolución: Sumando y restando x^3 de modo conveniente:

$$P(x) = x^7 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 + \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3}$$

Reacomodando con la finalidad de aplicar un aspa simple:

$$P(x) = x^7 + (-2x^5 + 3x^4 - x^3) + (x-1).(x-1)^2$$

x^4 — $-(x^2 - 2x + 1)$

x^3 — $-(x-1)$

$$P(x) = [x^4 - (x^2 - 2x + 1)](x^3 - x + 1)$$

$$P(x) = \underbrace{[x^4 - (x-1)^2]}_{\text{diferencia de cuadrados}}(x^3 - x + 1)$$

$$\therefore \quad P(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - x + 1)$$

PROBLEMA 24 Determine la suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) = (x + 3)(x + 5)(x + 7) + (x + 5)(x + 6) + x^2 + 5x$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x) = (x + 3)(x + 5)(x + 7) + (x + 5)(x + 6) + x(x + 5)$$

Extrayendo factor común:

$$P(x) = (x + 5)[(x + 3)(x + 7) + (x + 6) + x]$$
$$P(x) = (x + 5)[(x + 3)(x + 7) + 2x + 6]$$
$$P(x) = (x + 5)[(x + 3)(x + 7) + 2(x + 3)]$$

Extrayendo factor común:

$$P(x) = (x + 5)(x + 3)[(x + 7) + 2]$$
$$P(x) = (x + 5)(x + 3)(x + 9)$$

Finalmente tenemos:

$$\Sigma \text{ f. p} = x + 5 + x + 3 + x + 9$$
$$\therefore \Sigma \text{ f. p} = 3x + 17$$

PROBLEMA 25 Factorizar:

$$P(x) = ab(x^2 + 1) + (a^2 + b^2)x$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$$

Dando uso del aspa simple:

$$P(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$$

ax — b

bx — a

$$\therefore \quad P(x) = (ax + b)(bx + a)$$

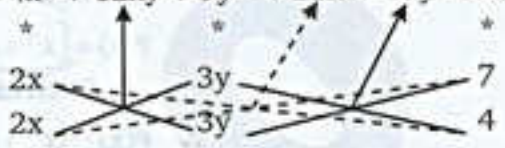
PROBLEMA 26 El polinomio $P(x;y) = 4x^2 + 9y^2 + 12xy + 22x + 33y + 28$ se puede descomponer como la multiplicación de dos factores primos, uno de los cuales acepta siempre mayor valor numérico respecto del otro $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Determine el término constante de dicho factor.

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x;y) = 4x^2 + 9y^2 + 12xy + 22x + 33y + 28$$

Dando uso del aspa simple:

$$P(x;y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 22x + 33y + 28$$



$$P(x;y) = (2x + 3y + 7)(2x + 3y + 4)$$

Fácilmente podemos reconocer que el factor primo que siempre asume mayor valor numérico es: $2x + 3y + 7$

$\therefore$ Término constante $= 7$

PROBLEMA 27 Factorizar:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 1$$

Resolución: Sumando y restando x^2:

$$P(x) = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

Agrupando términos:

$$P(x) = x^2(x^3 - 1) + x^4 + x^2 + 1$$

Por productos notables:

$$P(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Extrayendo al factor común:

$$P(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x-1) + (x^2 - x + 1)]$$

$$\therefore P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

PROBLEMA 28 Factorizar:

$$P(x) = x^7 + 2x^4 + 1$$

Resolución: El polinomio dado es:

$$P(x) = x^7 + x^4 + x^4 + 1$$

Sumando y restando x^5:

team CALAPENSHKO

$$P(x) = x^7 - x^5 + x^4 + x^5 + x^4 + 1$$
$$P(x) = x^4(x^3 - x - 1) + \underbrace{x^5 + x^4 + 1}$$

Por el problema anterior:

$$P(x) = x^4(x^3 - x - 1) + (x^2 + x + 1)(x^3 - x - 1)$$

Extrayendo al factor común:

$$P(x) = (x^3 - x + 1)[x^4 + (x^2 + x + 1)]$$
$$\therefore P(x) = (x^3 - x + 1)(x^4 + x^2 + x + 1)$$

PROBLEMA 29 Si $f(x) = x^2 + ax + 1$ es un factor primo del siguiente polinomio $F(x) = x^3 - 4x(x-1) - 1$ ¿Cuál es el valor de "a"?

Resolución:

El polinomio dado es:

$$F(x) = x^3 - 4x(x - 1) - 1$$

Agrupando tenemos:

$$F(x) = x^3 - 1 - 4x(x - 1)$$

Por factor común:

$$F(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4x(x - 1)$$
$$F(x) = (x - 1)[(x^2 + x + 1) - 4x]$$
$$F(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1)$$

Por condición tenemos:

$$x^2 + ax + 1) = x^2 - 3x + 1$$
$$\therefore a = -3$$

PROBLEMA 30 ¿Cuántos factores algebraicos presenta el polinomio: $P(x) = (2x-1)^3 + (2-x)^3 - (x+1)^3$?

Resolución:

El polinomio dado es:

$$P(x) = (2x-1)^3 + (2-x)^3[-(x+1)]^3$$
$$P(x) = (2x-1)^3 + (2-x)^3(-x-1)^3$$

Observa lo siguiente:

$$(2x - 1) + (2 - x) + (-x - 1) = 0$$

Por propiedad se cumple:

$$(2x-1)^3 + (2-x)^3(-x-1)^3 = 3(2x-1)(2-x)(-x-1)$$
$$P(x) = 3(2x-1)(2-x)(-x-1)$$

Cambiando el signo:

$$P(x) = 3(2x-1)(x-2)(x+1)$$

Hallemos el número de factores:

$$N^o \text{ de factores} = (2)(2)(2)(2)$$
$$N^o \text{ de factores} = 16$$

Observa que entre los 16 factores están contenidos los polinomios constantes 1 y 3, que no son factores algebraicos.

$$\therefore N^o \text{ de factores algebraicos} = 14$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Reconocer un factor del polinomio

$$P(x; y) = x^2y^3 - xy^4$$

A) x^2 B) y^4 C) x^2y^3
D) $x^2 - y$ E) $x - y$

2. Determine la suma de los factores primos del polinomio:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

A) $3x$ B) $3x + 5$ C) $3x - 3$
D) $3x - 1$ E) $3x + 1$

3. ¿Cuántos factores primos tiene

$$P(x) = x^2(x + 5) - x - 5\ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. No es factor del polinomio

$$P(x) = x^4 + x^2 - 2$$

A) $x^2 + 2$ B) $x + 1$ C) $x - 1$
D) $x^2 - 2$ E) 1

5. Un factor de:

$P(x;y) = 10x^4 - 17x^2y - 20y^2 + 13x^2 + 17y - 3$

es:

A) $5x^2 - xy + 1$
B) $5x^2 - 4y + 3$
C) $x^2 - y - 3$
D) $5x^2 + 4y - 1$
E) $2x^2 - 4y - 1$

6. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x;y) = (x + 1)(x + 4) - 9y(y - 1)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. ¿Cuántos factores primos tiene el polinomio:

$$P(x) = x^4 - 13x^3 + 60x^2 - 116x + 80\ ?$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 6

8. Determinar el número de factores del polinomio:

$$P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$$

A) 2 B) 4 C) 3
D) 16 E) 15

9. El cociente de los términos independientes de los factores primos de:

$$P(x;y) = 3(x - 2y - 5)^2 - 2(x - 2y) + 5$$

es:

A) 20 B) 5 C) 4
D) 8 E) N.A.

10. La suma de los factores primos del polinomio:

$$P(x) = (x - 1)^3 - 21x + 41$$

es:

A) $3x - 1$ B) $3(x - 1)$
C) $3(x + 1)$
D) x E) $3x - 2$

team CALAPENSHKO

11. Calcular el número de factores primos del polinomio:

$$P(x;y;z) \equiv (x^2-y^2)(z^3-x^3) - (z^2-x^2)(x^3-y^3)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12. Luego de factorizar el polinomio:

$$P(x;y;z) \equiv 6x^3y^4z + 15x^2y^4z^2 - 4x^2y^3z + 5xy^3z^2 - 2xy^2z$$

Dar el valor de verdad de las proposiciones:

I. Tiene 6 factores
II. Un factor es: $2xy + 5yz - 2$
III. Sólo tiene 3 factores
IV. Un factor es: $3xy - 1$

A) FFVV B) VVFV C) VFVF
D) FVFF E) VVFF

13. Proporcionar un factor primo de:

$$P(x;y) \equiv a + bx^2 + cy^2 + dy + exy + 3x$$

siendo a, b, c, d y e enteros consecutivos cuya suma es 15.

A) $x + 2y + 1$ B) $2x + 3y + 1$
C) $2x + y + 1$
D) $x + 3y + 2$ E) $x + y + 2$

14. Un factor cuadrático de:

$$P(x) \equiv (x+1)^2(x^2+2x+2)+1$$

es:

A) $x^2 - 2x - 1$ B) $x^2 - x + 1$
C) $x^2 + 3x + 3$
D) $x^2 + 2x - 1$ E) $x^2 + x - 1$

15. Mostrar un factor de:

$$P(x;y;z) \equiv x^4yz + xy^4z + xyz^4 - y^3z^3 - x^3z^3 - x^3y^3$$

A) xyz^2 B) $y^2 - x^2z^2$
C) $x^2 - y^2z$
D) $x^2 - yz$ E) $z^2 - xy$

16. Indicar un factor de:

$$P(x) \equiv 2x^6 + x^5 - 6x^4 + 7x^2 - 2$$

A) $(x^2+1)^2$
B) $x - 1$
C) $x^2 + x + 1$
D) $x^2 - x - 1$
E) $2x^3 - 3x^2 + 2$

17. Factorizar:

$$(a-b)^2(c-d)^2 + 2ab(c-d)^2 + 2cd(a^2+b^2)$$

e indicar la suma de los factores.

A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
B) $a + 2b + c + 2d$
C) $a + b^2 + c + d$
D) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$
E) $a^2 - b + c - d$

18. Factorizar:

$$A(x;y;z) \equiv (x-2y)^3 + (y-3z)^3 + (3z+y-x)^3$$

Indique el número de factores primos obtenidos.

A) 2 B) 4 C) 1
D) 3 E) 5

19. Reconocer un factor de:

$$P(x;y;z) \equiv 4x^2z + 4xy^2 + 4yz^2 + 2x^2y + 2y^2z + 2xz^2 + 9xyz$$

A) $2x + y$ B) $2y + z$
C) $2x + z$
D) $2z + x$ E) $x + y + z$

20. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^{12} - 17x^6 - 36x^3 - 20$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

team CALAPENSHKO

21. Luego de factorizar, la suma de los factores primos del polinomio:

$$P(x;y) \equiv (ax+by)(ay+bx) - (ax+by-ay-bx) - 1$$

es:

A) $a+b+x$ B) $a+b$ C) $a+x$
D) $b+y$ E) $x-y$

22. Un factor de:

$$P(x) \equiv (1+x+x^2+x^3)^2 - x^3$$

es:

A) x^2+x-1
B) x^2-x+1
C) $x^4+x^3+x^2+x+1$
D) x^3+x^2+1
E) x^3+x+1

23. Mostrar un factor de:

$$P(x;y;z) \equiv (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2$$

A) $a^2+b^2+c^2$ B) $ax-by$
C) a^2x+b^2y
D) $ax-cy$ E) $a+b+c$

24. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv (x^2+1)(x^2-4) - x(1-x^2) + 6$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Determine el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Indicar el valor numérico de uno de los factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^{72} - x^{40} + 4x^{36} + 4$$

para $x = 1$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

27. Indicar el número de factores del polinomio:

$$P(x) \equiv x^6(x^4+2) + x^2 - 1$$

A) 16 B) 12 C) 10
D) 8 E) 6

28. Mostrar un factor de:

$$P(x) \equiv (x^2+x-1)^2 + (2x+1)^2 + x^6 + 1$$

A) $x+1$ B) x^4+x+3
C) x^2+2
D) x^2+2x+3 E) x^4+2x+3

29. Proporcionar un factor de la suma de los factores primos de:

$$P(x) \equiv x^5+x^4+2x^3-1$$

A) x^2+x+1 B) x^2-x+1
C) x
D) $x-1$ E) $x+1$

30. Indicar un factor de:

$$P(x;y;z) \equiv (x+y+z)^4 + x^4 + y^4 + z^4 - (x+y)^4 - (x+z)^4 - (y+z)^4$$

A) $x-y+z$ B) $x+y+z$
C) $x^2+y^2+z^2$
D) $x+2y+z$ E) $x^2-y^2+z^2$

team CALAPENSHKO

31. Determinar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x;y) \equiv (x+y)^2(x^2+3xy+y^2) - 6xy[(x+y)^2 - xy]$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. Calcular el número de factores del polinomio:

$$P(x;y) \equiv (x^8+y^4)^4 + x^{32} + y^{16}$$

A) 3 B) 6 C) 18
D) 27 E) 54

33. Un factor de:

$$2x^2 + 1 - (4x^3 + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

es:

A) $1-2xy-y^2$ B) x^2+y^2+1
C) $x^2-2xy+1$
D) $1+2xy+2y^2$ E) $2xy-2y^2-1$

34. Reconocer un factor de:

$$P(x;y) \equiv (a+b)^2x^2 + (a-b)^2y^2 + 2(a^2+b^2)xy$$

A) $(a+b)x + (a-b)y$
B) $(a+b)x - (a-b)y$
C) $x - y$
D) $(a+b)^2x + (a-b)^2y$
E) $ax + by$

35. Si: $P(x) \equiv x(x+a-3) + a(x+a)$ es factorizable en Q. Indique la suma de factores primos obtenidos, si:

$$a \in \mathbb{Z} \wedge -9 \le a \le -1$$

A) $2x-5$ B) $2x-19$ C) $2x-11$
D) $12-15$ E) $2x-25$

36. Indique la suma de coeficientes de un factor primo de:

$$A(x) \equiv x^6(x^2+1) - (x^4 + 5x^2 - 4)$$

A) 16 B) 10 C) 2
D) 20 E) 8

37. Indique un divisor de:

$$R(x) \equiv x^{10} - 1 + x^2(2x^4+1)$$

A) x^2-x-1 B) x^3-x^2+1
C) x^2-x+2
D) x^2+x+2 E) x^3+x^2-1

38. Dar la suma de los coeficientes del factor primo de menor grado en:

$$(x^2+1)^7 + 2(x^2+1) + x^4$$

A) 71 B) 7 C) 8
D) 17 E) Más de una es correcta

39. Si se factoriza en el campo real el siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv 9(x+2)^3(2x+3) + 1$$

Se obtiene un factor que toma la forma:

$$F(x) \equiv 2mx^2 + 3nx + 31 \; ; \; m \wedge n \in \mathbb{Z}^+$$

Calcular el factor lineal de:

$$R(x) \equiv x^m - nx + 8$$

A) $x+1$ B) $x-1$ C) $3x+1$
D) $x-2$ E) $x+2$

40. Factorizar:

$$R(x;y) \equiv x^4 + 3y^2(x^2+y^2) + y^4$$

Indique la suma de factores primos.

A) $2(2x+3)$ B) $3(x+2)$
C) $2(2x+1)$
D) $3(2x+1)$ E) $2(x+1)$

team CALAPENSHKO

41. Factorice en el campo de los números reales:

$$P(a) \equiv 32(a^2-5)^5 - (a^2-9)^5 - (a^2-1)^5$$

Señale el número de factores primos:

A) 10 B) 12 C) 8
D) 6 E) 7

42. Factorizar e indicar el número de factores primos racionales:

$$P(x) \equiv x^{10} + 2x^5 - x^2 + 1$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. Luego de factorizar:

$$(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9) + 32(x^2+1)^2$$

Indique la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 8 B) –4 C) 2
D) 5 E) 10

44. Luego de factorizar:

$$x^{20}[x^{27} + x^{20} + 1] + x^7(x^{20} + 1) + 1$$

Indicar el número de factores primos.

A) 6 B) 4 C) 8
D) 9 E) 10

45. Luego de factorizar en Q, el polinomio:

$$P(x) \equiv x^{83} + x^{46} + x^{21} + 1$$

Indicar la suma de coeficientes del factor primo de menor grado.

A) 2 B) 4 C) 22
D) 10 E) 12

46. Luego de factorizar el polinomio:

$$4(x^2 + ax + a^2)^3 - 27(x + a)^2a^2x^2$$

Afirmamos:

A) Sólo tiene tres factores primos
B) Sólo tiene dos factores primos
C) Sólo un factor primo se repite dos veces
D) Todos los factores primos se repiten dos veces
E) Hay dos correctas

47. Luego de factorizar el polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 - 2x^3 - x - 1$$

Indicar la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

48. Señale el número de factores del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$$

A) 25 B) 24 C) 14
D) 2 E) 8

49. Determine el valor numérico de uno de los factores primos de $P(x) \equiv x^5 + (x^2 + 1)^2$ para $x = -1$

A) – 2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 2

50. Determine el número de términos de un factor primo en Q de:

$$F(x) \equiv x^7 + x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 - 1$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

Capítulo 7

MCD y MCM de Polinomios Fracción Algebraica

CAPACIDADES:

- Determinar el MCD y/o MCD de dos o más polinomios.
- Identificar fracciones algebraicas.
- Efectuar operaciones con fracciones.

$$\exists\ x_0 \in \left\langle \frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right\rangle \ \mid\ x_0 = \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$$

ARQUÍMEDES

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287 – 212 a. C.), fue uno de los más grandes pensadores de la antigüedad y uno de los matemáticos más originales de todos los tiempos. Es conocido por muchos inventos tales como los engranajes con ruedas dentadas, el uso de las palancas en catapultas militares, el tornillo sin fin, el principio de Arquímedes referente a los cuerpos flotantes, los espejos parabólicos gigantes cuya idea se ha vuelto a utilizar hoy, 2 100 años después, en las centrales heliotérmicas, y muchos más. Se cuenta que cuando descubrió su famoso principio, estaba en su tina y salió desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡EUREKA, EUREKA! (¡lo encontré!).

Murió a los 75 años, cuando las tropas romanas invadieron Siracusa. Se cuenta que Armímedes estaba concentrado en el estudio de una figura geométrica dibujada en la arena; un soldado romano se le acercó y le ordenó varias veces que lo acompañara, Arquímedes siguió absorto en su problema y el soldado enfurecido lo mató.

Entre tantos teoremas que nos dejó Arquímedes podemos destacar el siguiente "Entre dos números fraccionarios existe otro número fraccionario cuyo valor es igual a la semisuma de aquellos".

team CALAPENSHKO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

DEFINICIÓN

El MCD de dos o más polinomios es otro polinomio de mayor grado posible que tiene la propiedad de dividir en forma exacta a cada uno de los polinomios dados.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

DEFINICIÓN

El MCM de dos o más polinomios es otro polinomio de menor grado posible que tiene la propiedad de ser divisible por cada uno de los polinomios dados .

REGLAS PARA DETERMINAR EL MCD Y EL MCM

1) Se factoriza completamente a cada una de los polinomios dados.

2) El MCD estará representado por la multiplicación de todos los factores primos comunes considerados con su menor exponente.

3) El MCM estará representado por la multiplicación de todos los factores primos comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

Ejemplo: Determinar el MCD y el MCM de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1 \ \wedge \ Q(x) \equiv x^3 - x^2 - 2x$$

Luego de factorizar se tiene:

- $P(x) \equiv (x+1)^2 . (x-1)$
- $Q(x) \equiv x . (x-2) . (x+1)$

Finalmente tenemos:

$$MCD(P, Q) \equiv x + 1$$

$$\therefore \ MCM(P, Q) \equiv (x+1)^2 . (x-1) . x . (x-2)$$

TEOREMA

Para dos polinomios A y B el producto de ellos será idéntico al producto de su MCD por su MCM.

$$A \, . \, B \equiv MCD(A, B) \, . \, MCM(A, B)$$

team CALAPENSHKO

FRACCIÓN ALGEBRAICA

DEFINICIÓN

Es toda expresión de la forma $\frac{A}{B}$, donde A es llamado numerador y B denominador, siendo ambos polinomios tal que $A \neq 0 \wedge [B]^{\circ} \geq 1$, veamos algunos ejemplos:

- Son fracciones algebraicas:

$$\frac{x+1}{x^2};\ \frac{2}{x}\ \text{y}\ \frac{x^3+1}{x-2}$$

- No son fracciones algebraicas:

$$\frac{2}{7}\ \text{y}\ \frac{x+7}{4}$$

SIGNO DE UNA FRACCIÓN

Dada la fracción F de términos A y B, es decir: $F = \frac{A}{B}$

1) Si sus términos son de igual signo, la fracción es positiva.

$$F = \frac{+A}{+B} = \frac{-A}{-B} = +\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$$

2) Si sus términos son de signo diferentes la fracción es negativa.

$$F = \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}$$

CLASES DE FRACCIONES

1) **FRACCIÓN PROPIA:** Es aquella fracción donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador, en cualquier otro caso la fracción se llama impropia.

- Son fracciones propias:

$$\frac{x}{x^4-1},\ \frac{2}{x}\ \text{y}\ \frac{x^7+2x+1}{x^{10}-4x}$$

- Son fracciones impropias:

$$\frac{x^7+1}{x^2-1},\ \frac{x^8-x}{x^4}\ \text{y}\ \frac{x+1}{x-4}$$

2) **FRACCIÓN IRREDUCTIBLE:** Es aquella fracción donde sus términos son PESI (primos entre sí).

- $\frac{x^2+7}{x-1}$ es irreductible
- $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ no es irreductible, puesto que (x – 1) es factor común en sus términos

team CALAPENSHKO

3) FRACCIÓN DE VALOR CONSTANTE: Es aquella fracción que asume igual valor numérico para cualquier conjunto de valores admisibles para sus variables.

- $\frac{2x+4}{x+2}$ es de valor constante igual a 2 para todo valor de x distinto de –2

Observación: Los valores admisibles de una variable en una fracción vienen a ser todos aquellos números que no anulan al denominador

Propiedad: Si la fracción:

$$F(x;y) \equiv \frac{ax + bxy + cy}{a_1x + b_1xy + c_1y}$$

es de valor constante se verifica lo siguiente:

$$\text{valor constante} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

4) FRACCIÓN COMPLEJA: Es aquella fracción donde el numerador y/o denominador es una expresión fraccionaria, veamos algunos ejemplos:

- $\frac{x+1}{1-\frac{1}{x}}$, $\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}$ y $\frac{1}{2+\frac{x}{x-1}}$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS FRACCIONES

1) FRACCIONES HOMOGÉNEAS: Dos o más fracciones son homogéneas si presentan el mismo denominador, de no suceder esto las fracciones se llamarán heterogéneas.

- Son fracciones homogéneas:

$$\frac{2x+7}{x^4-1} \text{ y } \frac{x^3-2}{x^4-1}$$

- Son fracciones heterogéneas:

$$\frac{x+1}{x^3-2} \text{ y } \frac{x^2+7}{x+1}$$

2) FRACCIONES EQUIVALENTES: Dos o más fracciones son equivalentes si asumen igual valor numérico para todo valor admisible de sus variables, veamos un ejemplo:

- $\frac{x^2-x-2}{x^2+x} <> \frac{x^2-2x}{x^2}$; $\forall x \neq 0 \wedge x \neq -1$

Propiedad: Dadas las fracciones equivalentes. $\frac{A}{B} \wedge \frac{C}{D}$, tenemos:

$$\text{Si: } \frac{A}{B} <> \frac{C}{D} \Rightarrow A \,.\, D \equiv B \,.\, C$$

team CALAPENSHKO

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Es el proceso mediante el cual se obtiene una expresión equivalente a la fracción dada. Para simplificar a una fracción se consideran los siguientes pasos:

1) Se factoriza completamente a los términos de la fracción.

2) Se simplifican los factores comunes en los términos de la fracción.

Ejemplo: Simplificar

$$F(x) \equiv \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

Resolución: Factorizamos cada término según el método del aspa simple

$$x^2 - x - 12 <> (x-4)(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 3 <> (x+1)(x+3)$$

$$F(x) \equiv \frac{(x-4)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \quad ; \quad x \neq -3 \quad ; \quad x \neq -1$$

Finalmente cancelando factores comunes tenemos:

$$F(x) \equiv \frac{x-4}{x+1}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

1) ADICIÓN Y/O SUSTRACCIÓN

- Para fracciones homogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{a-b}{x}$$

- Para fracciones heterogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay + bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{ay - bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = \frac{ayz + bxz - cxy}{xyz}$$

2) MULTIPLICACIÓN

- $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} = \frac{a \cdot b}{x \cdot x} = \frac{a \cdot b}{x^2}$

- $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{a \cdot b}{x \cdot y}$

3) DIVISIÓN

- $\frac{a}{x} \div \frac{b}{y} <> \frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x}$

"Producto de extremos entre producto de medios"

team CALAPENSHKO

DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES

Es el proceso que consiste en transformar una fracción dada como la adición de dos o más fracciones simples.

CASOS DE DESCOMPOSICIÓN:

I. Si el denominador tiene únicamente factores diferentes de primer grado, por cada denominador de la forma: $ax + b$, le corresponderá una fracción simple de la forma:

$$\frac{a_1}{ax+b} \quad ; \quad a_1 = \text{constante}$$

II. Si el denominador presenta factores repetidos de primer grado de la forma: $(ax + b)^n$, por cada uno de estos factores le corresponderán "n" fracciones simples de la forma:

$$\frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \frac{a_3}{(ax+b)^3} + ... + \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$

III. Si el denominador presenta únicamente factores cuadráticos primos de la forma: $ax^2 + bx + c$, por cada uno de estos factores le corresponderá una fracción simple de la forma:

$$\frac{a_1x + b_1}{ax^2 + bx + c}$$

IV. Si el denominador presenta factores primos cuadráticos repetidos de la forma: $(ax^2 + bx + c)^n$, por cada uno de estos factores le corresponderán "n" fracciones simples de la forma:

$$\frac{a_1x + b_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{a_2x + b_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{a_3 + b_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + ... + \frac{a_nx + b_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Determine el MCM de los polinomios propuestos en cada caso

A) $P(x) \equiv x^2 - x - 2$
$Q(x) \equiv x^2 + 5x + 6$

B) $P(x) \equiv x^3 - 25x$
$Q(x) \equiv x^2 + 3x + 2$

C) $P(x) \equiv x^3 - x^2$
$Q(x) \equiv x^2 + 3x + 2$

2. Determine el MCD de los polinomios propuestos en cada caso

A) $P(x) \equiv x^7 - 4x^5$
$Q(x) \equiv x^4 - 16$

B) $P(x) \equiv x^2 - x - 12$
$Q(x) \equiv x^2 + 4x + 3$

C) $P(x) \equiv x^2 - 2x - 8$
$Q(x) \equiv x^3 - 4x$

3. Marcar Verdadero (V) o Falso (F)

I. Si "A" es el MCD de M y N, las divisiones $\frac{M}{A}$ y $\frac{N}{A}$ son exactas...( )

II. Si "A" es el MCM de M y N, las divisiones $\frac{A}{M}$ y $\frac{A}{N}$ son exactas...( )

III. Si "A" y "B" son P. E. SI, entonces su MCD es la unidad .....( )

4. Coloca un visto (√) en cada recuadro que corresponde a una fracción algebraica.

A) $\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$ ☐

B) $\frac{7}{x^2 - x + 10}$ ☐

C) $\frac{x^4 - x + 1}{10}$ ☐

D) $\frac{5x}{x}$ ☐

E) $\frac{2008}{2009}$ ☐

5. Coloca en cada paréntesis FP (fracción propia) o FI (fracción impropia) según corresponda.

A) $\frac{x^7}{x^2 - x + 1}$ ( )

B) $\frac{x^{2009}}{x^{2009} - x + 1}$ ( )

C) $\frac{x^4 + 1}{x^{10} - x + 10}$ ( )

D) $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ ( )

E) $\frac{x}{x^3 - x + 1}$ ( )

6. Determina el conjunto de valores admisibles (C. V. A.) al cual pertenece la variable de cada fracción:

A) $F(x) = \frac{x}{x - 2}$

B) $F(x) = \frac{x + 10}{1 - x^2}$

C) $F(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

D) $F(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2}$

E) $F(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 9x}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Reducir:

$$\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$$

Resolución: Sea L el equivalente reducido, luego:

$$L=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$$

$$L=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{-b(b-a)}{a(b-a)}$$

$$L=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{-b}{a}$$

$$L=\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b}{a}$$

$$L=\frac{a^2-b^2+b^2}{ab}$$

$$L=\frac{a^2}{ab}$$

$$\therefore\ L=\frac{a}{b}$$

PROBLEMA 2 Determinar el equivalente de:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}-\frac{2ab+a(1+ab)+1}{1+(a+1)b}$$

Resolución: Llamando K al equivalente y transformando la primera fracción tenemos:

$$K=\frac{1}{1+\dfrac{b}{ab+1}}-\frac{2ab+a(1+ab)+1}{1+(a+1)b}$$

$$K=\frac{ab+1}{ab+1+b}-\frac{2ab+a+a^2b+1}{1+ab+b}$$

$$K=\frac{ab+1-2ab-a-a^2b-1}{ab+b+1}$$

team CALAPENSHKO

$$K = \frac{-a^2b - ab - a}{ab + b + 1}$$

$$K = \frac{-a(ab + b + 1)}{ab + b + 1}$$

$$\therefore\ K = -a$$

PROBLEMA 3 Simplificar:

$$F = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Resolución: Factorizando cada término de la fracción:

Con el numerador: $N \equiv x^3 + x^2 - x - 1$

$$N \equiv x^2(x + 1) - (x + 1)$$

$$N \equiv (x + 1) \,.\, (x^2 - 1)$$

$$N \equiv (x + 1) \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 1)$$

$$N \equiv (x + 1)^2 \,.\, (x - 1)$$

Con el denominador:

$$D \equiv x^3 - x^2 - x + 1 \equiv x^2(x - 1) - (x - 1)$$

$$D \equiv (x - 1) \,.\, (x^2 - 1) \equiv (x - 1) \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 1)$$

$$D \equiv (x - 1)^2 \,.\, (x + 1)$$

Ahora:

$$F = \frac{(x + 1)^2 \,.\, (x - 1)}{(x - 1)^2 \,.\, (x + 1)}$$

$$\therefore\ F = \frac{x + 1}{x - 1}$$

PROBLEMA 4 Reducir:

$$\frac{1}{x^2 - 3 + 2x} + \frac{1}{1 - 3x^2 + 2x} - \frac{2}{3x^2 + 10x + 3}$$

Resolución: Llamando E a la expresión y extrayendo el signo (–) del término central tenemos:

$$E = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} - \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} - \frac{2}{3x^2 + 10x + 3}$$

Factorizando cada denominador según el criterio del aspa simple tenemos:

$$E=\frac{1}{(x+3)(x-1)}-\frac{1}{(3x+1)(x-1)}-\frac{2}{(3x+1)(x+3)}$$

$$E=\frac{3x+1-(x+3)-2(x-1)}{(x+3)(x-1)(3x+1)}$$

$$E=\frac{3x+1-x-3-2x+2}{(x+3)(x-1)(3x+1)}=\frac{0}{(x+3)(x-1)(3x+1)}$$

$$\therefore\ E=0$$

PROBLEMA 5 Si: $dx^{a-1}y^{b+1}z^{c-1}$ es el MCD de los siguientes monomios:

$$P(x;y;z)=ax^2y^3z^4,\ Q(x;y;z)=bx^5y^2z^6\ \wedge\ R(x;y;z)=cxy^4z^3$$

Calcular: $ab+ac+bc$

Resolución:

De acuerdo con la teoría: MCD $(P, Q, R)=dxy^2z^3$, donde "d" es el máximo común divisor de a, b y c.

Por condición:

$$a-1=1\ \wedge\ b+1=2\ \wedge\ c-1=3$$

$$a=2\ \wedge\ b=1\ \wedge\ c=4$$

Finalmente tenemos:

$$K=ab+ac+bc$$

$$K=(2)(1)+(2)(4)+(1)(4)=2+8+4$$

$$\therefore\ K=14$$

PROBLEMA 6 Si: $ax^{b+1}y^{c+2}z^{d+3}$ es el MCM de los siguientes monomios:

$$P(x;y;z)=2x^4y^3z^5\ \wedge\ Q(x;y;z)=3x^2y^6z^3$$

Calcular: $a-b+c-d$

Resolución:

De acuerdo con la teoría:

$$MCM(P,Q)=6x^4y^6z^5$$

Por condición tenemos:

$$a=6\ \wedge\ b+1=4\ \wedge\ c+2=6\ \wedge\ d+3=5$$

$$a=6\ \wedge\ b=3\ \wedge\ c=4\ \wedge\ d=2$$

$$\therefore\ a-b+c-d=5$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 7 Dadas las expresiones:

$$P(x) = (x+2)^7(x-4)^5(x+1)^{10}$$

$$Q(x) = (x-4)^3(x-1)^6(x+2)^8$$

Calcular la suma entre los grados de su MCD y su MCM

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$MCD(P;Q) = (x+2)^7(x-4)^3$$

$$[MCD]^\circ = 7+3 = 10$$

De acuerdo con la teoría:

$$MCM(P;Q) = (x+2)^8(x-4)^5(x+1)^{10}(x-1)^6$$

$$[MCD]^\circ = 8+5+10+6 = 29$$

Finalmente tenemos:

$$[MCD]^\circ + [MCM]^\circ = 10+29$$

$$\therefore\ [MCD]^\circ + [MCM]^\circ = 39$$

PROBLEMA 8 Si:

$$F_1(x) = \frac{mx}{ax+4} \quad y \quad F_2(x) = \frac{ax+m}{3x+m-1}$$

Son fracciones homogéneas. Efectuar $F_1(x) + F_2(x)$

Resolución: De acuerdo con la teoría, si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son homogéneas se cumple que:

$$ax+4 = 3x+m-1$$

De donde tenemos:

$$a = 3 \ \wedge\ m-1 = 4$$

$$a = 3 \ \wedge\ m = 5$$

Ahora se tendrá:

$$F_1(x) = \frac{5x}{3x+4} \quad y \quad F_2(x) = \frac{3x+5}{3x+4}$$

$$\therefore\ F_1(x) + F_2(x) = \frac{8x+5}{3x+4}$$

PROBLEMA 9 Si: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Reducir:

$$E = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{x^2+z^2}{xz} + \frac{y^2+z^2}{yz}$$

Resolución: Se pide reducir:

$$E=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{x^2+z^2}{xz}+\frac{y^2+z^2}{yz}$$

Separando términos:

$$E=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$$

Agrupando convenientemente tenemos:

$$E=\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)$$

$$E=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Por condición:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{y} \end{cases}$$

Reemplazando tenemos:

$$E=x\left(-\frac{1}{x}\right)+y\left(-\frac{1}{y}\right)+z\left(-\frac{1}{z}\right)$$

$$E=-1-1-1$$

$$\therefore E=-3$$

PROBLEMA 10 ¿Cuántos factores primos tiene el MCM de los polinomios:

$$P(x)=x^5-x^3+x^2-1 \quad \text{y} \quad Q(x)=x^6-1?$$

Resolución: Factorizando al primer polinomio:

$$P(x)=x^5-x^3+x^2-1$$

$$P(x)=x^3(x^2-1)+(x^2-1)$$

$$P(x)=(x^2-1)(x^3+1)$$

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$P(x)=(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$$

team CALAPENSHKO

Factorizando el segundo polinomio:

$$Q(x) = x^6 - 1$$

$$Q(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$$

$$Q(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

De acuerdo con la teoría tenemos:

$$MCM(P; Q) = (x+1)^2 (x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$\therefore$ Nº de factores primos = 4

PROBLEMA 11 Determine la suma de los coeficientes del MCD de los polinomios:

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad y \quad Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

Resolución: Factorizando al primer polinomio:

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$P(x) = x^2 (x+1) + (x+1)$$

$$P(x) = (x+1) \cdot (x^2 + 1)$$

Factorizando el segundo polinomio:

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x + 2$$

$$Q(x) = (x+1)^3 + 2(x+1)$$

$$Q(x) = (x+1)[(x+1)^2 + 2]$$

$$Q(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 3)$$

De acuerdo con la teoría tenemos:

$$MCD(P; Q) = x + 1$$

$\therefore$ Σ de coeficientes = 2

PROBLEMA 12 Reducir:

$$F(x;y) = \frac{x+y+2}{2y} + \frac{x-y+2}{y(y-2)} + \frac{x+y-2}{2(2-y)}$$

Resolución: Haciendo un cambio de signo en la tercera fracción, la expresión propuesta se puede reescribir así:

$$F(x;y) = \frac{x+y+2}{2y} + \frac{x-y+2}{y(y-2)} - \frac{x+y-2}{2(y-2)}$$

Dando común denominador:

$$F(x;y) \equiv \frac{(x+y+2)(y-2)+2(x-y+2)-y(x+y-2)}{2y(y-2)}$$

Efectuando operaciones:

$$F(x;y) \equiv \frac{\overset{\wedge\wedge}{xy}-\overline{2x}+\overline{y^2}-4+\overline{2x}-\widehat{2y}+4-\overset{\wedge\wedge}{xy}-\overline{y^2}+\widehat{2y}}{2y(y-2)}$$

$$F(x;y) \equiv \frac{-4+4}{2y(y-2)} = \frac{0}{2y(y-2)}$$

$$\therefore F(x;y) \equiv 0$$

PROBLEMA 13 Si se verifica que:

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{2a}{1+a^2}-\frac{4a^3}{1+a^4}-\frac{8a^7}{1+a^8}$$

es equivalente a: $\dfrac{ma^n}{1-a^{16}}$

Calcular el valor de "m + n"

Resolución: Sea K el primer miembro de la equivalencia, es decir:

$$K <> \frac{ma^n}{1-a^{16}} \quad .....(\alpha)$$

Donde:

$$K = \underbrace{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}}-\frac{2a}{1+a^2}-\frac{4a^3}{1+a^4}-\frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \underbrace{\frac{2a}{1-a^2}-\frac{2a}{1+a^2}}-\frac{4a^3}{1+a^4}-\frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \underbrace{\frac{4a^3}{1-a^4}-\frac{4a^3}{1+a^4}}-\frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \frac{8a^7}{1-a^8}-\frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$$

De la equivalencia (α) se tiene:

$$m = 16 \wedge n = 15$$

$$\therefore m + n = 31$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 14 Calcular: $2m + n$, si:

$$\frac{5x+7}{x^2-x-2} <> \frac{m}{x-2} + \frac{n}{x+1} \; ; \; x \neq 2 \; ; \; x \neq -1$$

Resolución: La equivalencia dada es:

$$\frac{5x+7}{x^2-x-2} \diamond \frac{m\,.(x+1)+n\,.(x-2)}{(x-2)\,.(x+1)}$$

$$\frac{5x+7}{x^2-x-2} \diamond \frac{(m+n)x+(m-2n)}{x^2-x-2}$$

Luego tenemos: $5x + 7 \equiv (m+n)x + (m-2n)$

De donde podemos notar que:

$$m + n = 5 \quad \wedge \quad m - 2n = 7$$

Resolviendo tenemos:

$$m = \frac{17}{3}, \quad n = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad 2m + n = \frac{32}{3}$$

PROBLEMA 15 Calcular "a + b", si $M(x) = x - 1$ es el máximo común divisor de los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + a$$
$$Q(x) = x^2 - 2bx + 1$$

Resolución: De acuerdo con la definición del MCD, podemos afirmar que $x - 1$ divide exactamente a $P(x)$ y $Q(x)$, luego:

1° $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x + a}{x - 1}$

Por el teorema del resto:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Ahora en el dividendo:

$$(1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) + a = 0$$
$$1 - 6 + 11 + a = 0$$
$$a = -6$$

2° $\dfrac{x^2 - 2bx + 1}{x - 1}$

Por el teorema del resto:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Ahora en el dividendo:

$$(1)^2 - 2b(1) + (1) = 0$$
$$1 - 2b + 1 = 0$$
$$b = 1$$

$$\therefore \quad a + b = -5$$

PROBLEMA 16 Si: $Q(x) \equiv x^3 - x^2 - 9x + 9$

es el MCM de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^2 + 2x - 3$$
$$F(x) \equiv x^2 + ax + 3$$

encontrar su MCD.

Resolución: Ya que Q(x) es el MCM(P, F) entonces P y F lo dividen en forma exacta, para hallar "a" consideremos:

$$\frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + ax + 3}$$

Según el método de Horner:

	1	−1	−9	9
−a		−a	−3	
−3			a + a²	3 + 3a
	1	(−1 − a)	0	0

En la columna del residuo se cumple:

$$9 + 3 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

Ahora tenemos: $F(x) \equiv x^2 - 4x + 3 \equiv (x - 3)(x - 1)$

Además: $P(x) \equiv x^2 + 2x - 3 \equiv (x + 3)(x - 1)$

$\therefore$ MCD(P; F) = x − 1

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 17 Si el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^4 + 3x^3 + ax^2 + 9x + b$$

$$Q(x) \equiv x^4 + cx^3 - 12x^2 + dx + 35$$

es: $F(x) \equiv x^2 + 3x - 5$

Calcular: $a + b + c - d$

Resolución: F(x) divide en forma exacta a P(x) y Q(x), luego:

1ª división exacta:

$$\frac{x^4 + 3x^3 + ax^2 + 9x + b}{x^2 + 3x - 5}$$

Según el método de Horner tenemos:

1	1	3	a	9	b
−3		−3	5		
5			0	0	
				−3a − 15	5a + 25
	1	0	(a + 5)	0	0

En la columna del residuo se cumple:

- $9 - 3a - 15 = 0$
  $a = -2$
- $b + 5a + 25 = 0$
  $b = -15$

2ª división exacta:

$$\frac{x^4 + cx^3 - 12x^2 + dx + 35}{x^2 + 3x - 5}$$

Según el método de Horner tenemos:

1	1	c	−12	d	35
−3		−3	5		
5			−3c + 9	5c − 15	
				−6 + 9c	10 − 15c
	1	(c − 3)	(2 − 3c)	0	0

En la columna del residuo se cumple:

$$35 + 10 - 15c = 0$$
$$c = 3$$

$$d + 5c - 15 - 6 + 9c = 0$$
$$d = -21$$

$$\therefore \quad a + b + c - d = 7$$

PROBLEMA 18 Encontrar el MCD de los polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$$
$$Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$$
$$R(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

Resolución: Factorizando a cada uno de los polinomios dados:

$$P(x) = 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$$
$$P(x) = 5x^2(x-1) + 2(x-1)$$
$$P(x) = (x-1)(5x^2 + 2)$$

$$Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 2(x^3 + x^2 - x - 1)$$
$$Q(x) = 2[(x^3 + x^2) + (-x - 1)] = 2[x^2(x+1) - (x+1)]$$
$$Q(x) = 2(x+1)[x^2 - 1] = 2(x+1)(x+1)(x-1)$$
$$Q(x) = 2(x+1)^2 . (x-1)$$

$$R(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x = x\underbrace{(x^3 + x^2 - x - 1)}_{\text{Parte de Q}}$$
$$R(x) = x(x+1)^2(x-1)$$

$$\therefore \text{MCD}(P; Q; R) = x - 1$$

PROBLEMA 19 Determinar el MCM de los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 + 4x + 3$$
$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$R(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$
$$F(x) = x^3 - 9x + x^2 - 9$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Factorizando a cada uno de los polinomios dados tenemos:

$$P(x) \equiv x^2 + 4x + 3 \equiv (x+3)(x+1)$$

$$Q(x) \equiv x^2 - 4x + 3 \equiv (x-3)(x-1)$$

$$R(x) \equiv x^4 - 10x^2 + 9 \equiv (x^2-9)(x^2-1)$$

$$R(x) \equiv (x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$$

$$F(x) \equiv x^3 + x^2 - 9x - 9 \equiv x^2(x+1) - 9(x+1)$$

$$F(x) \equiv (x+1)(x^2-9) \equiv (x+1)(x+3)(x-3)$$

$\therefore$ MCM(P; Q; R; F) $\equiv (x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

PROBLEMA 20 Si $M(x) \equiv x^2 + mx + n$; $m, n \in \mathbb{R}^+$ es el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R}^*$$

$$Q(x) \equiv x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \; ; \; a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}^*$$

¿Cuál es el grado de su M.C.M.?

Resolución: Por teorema tenemos:

$$MCD(P, Q) \cdot MCM(P, Q) \equiv P \cdot Q$$

Tomando grado m. a. m.:

$$[MCD(P, Q) \cdot MCM(P, Q)]^\circ = [P \cdot Q]^\circ$$

Por propiedad de grados:

$$[MCD(P, Q)]^\circ + [MCM(P, Q)]^\circ = [P]^\circ + [Q]^\circ$$

Por dato: $[MCD(P, Q)]^\circ = [M(x)]^\circ = 2$

$$2 + [MCM(P, Q)]^\circ = 3 + 4$$

$$2 + [MCM(P, Q)]^\circ = 7$$

$\therefore$ $[MCM(P, Q)]^\circ = 5$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21 Determine el producto de los numeradores de las fracciones simples en la que se transforma la siguiente fracción:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1}$$

Resolución: Observar que la fracción dada se puede representar de la manera siguiente:

$$\frac{x+3}{(x+1)^2}$$

De acuerdo con el caso (II) podemos plantear:

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} <> \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} \diamond \frac{a\,.\,(x+1)+b}{(x+1)^2}$$

Por propiedad de fracciones equivalentes:

$$x+3 \equiv a(x+1)+b$$

$$x+3 \equiv ax+(a+b)$$

De donde se cumple: $1=a \;\wedge\; 3=a+b$

$$a=1 \;\wedge\; b=2$$

$$\therefore \quad a\,.\,b=2$$

PROBLEMA 22 Descomponer en fracciones parciales a la siguiente fracción:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-1}$$

Resolución: Observar que la fracción dada, una vez factorizado su denominador se representa así:

$$\frac{2x^2+5x-1}{(x-1)\,.\,(x^2+x+1)}$$

Por combinación del caso (I) y el caso (III) tenemos:

$$\frac{2x^2+5x-1}{(x-1)\,.\,(x^2+x+1)} <> \frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{(x-1)\,.\,(x^2+x+1)} <> \frac{a\,.\,(x^2+x+1)+(x-1)\,.\,(bx+c)}{(x-1)\,.\,(x^2+x+1)}$$

Por propiedades de fracciones equivalentes, tenemos:

$$2x^2+5x-1 \equiv a(x^2+x+1)+(x-1)(bx+c) \quad .....(1)$$

team CALAPENSHKO

Hagamos $x = 1$: $\quad 2+5-1 = a(3)$

$$a = 2$$

Efectuando en (1): $2x^2+5x-1 \equiv (a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)$

Como sabemos $a = 2$:

$$a+b = 2 \rightarrow b = 0$$
$$a-c = -1 \rightarrow c = 3$$

$$\therefore \quad \frac{2x^2-5x+1}{x^3-1} <> \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x^2+x+1}$$

PROBLEMA 23 Dado:

$$P(x) \equiv \frac{mx+1}{x-4}$$

Calcular "m" si P(P(x)) es independiente de x.

Resolución: Hallemos P(P(x)) en P(x), para lo cual reemplazaremos x por P(x), veamos:

$$P(P(x)) \equiv \frac{mP(x)+1}{P(x)-4}$$

$$P(P(x)) \equiv \frac{m\left(\frac{mx+1}{x-4}\right)+1}{\frac{mx+1}{x-4}-4}$$

$$P(P(x)) \equiv \frac{m^2x+m+x-4}{mx+1-4x+16}$$

$$P(P(x)) \equiv \frac{(m^2+1)x+(m-4)}{(m-4)x+17}$$

Como P(P(x)) es independiente de su variable, se cumple:

$$\frac{m^2+1}{m-4} = \frac{m-4}{17}$$

$$17m^2+17 = m^2-8m+16$$

$$16m^2+8m+1 = 0$$

$$(4m+1)^2 = 0 \Rightarrow 4m+1 = 0$$

$$\therefore \quad m = -\frac{1}{4}$$

PROBLEMA 24 Determine el conjunto de valores admisibles (C. V. A.) de la fracción:

$$F(x) \equiv \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-6x}$$

Resolución: Se debe cumplir que:

$$x^3-x^2-6x \neq 0$$
$$x(x^2-x-6) \neq 0$$
$$x(x-3)(x+2) \neq 0$$

De donde podemos apreciar:

$$x \neq 0;\ x \neq 3;\ x \neq -2$$
$$\therefore \quad C.V.A. = \mathbb{R} - \{-2;0;3\}$$

PROBLEMA 25 Determine el mínimo común múltiplo:

$$P(x) \equiv x^4-x^3-3x^2+5x-2$$
$$Q(x) \equiv x^3-4x^2+5x-2$$

Resolución: Factorizando cada polinomio según el criterio de los divisores binómicos:

	1	−1	−3	5	−2
1	↓	1	0	−3	2
	1	0	−3	2	0
1	↓	1	1	−2	
	1	1	−2	0	
1	↓	1	2		
	1	2	0		

$$P(x) \equiv (x-1)^3(x+2)$$

	1	−4	5	−2
1	↓	1	−3	2
	1	−3	2	0
1	↓	1	−2	
	1	−2	0	

$$Q(x) \equiv (x-1)^2(x-2)$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore \quad M.C.M(P;Q) \equiv (x-1)^3(x+2)(x-2)$$

PROBLEMA 26 Si el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^4-9x^2+mx+n$$
$$Q(x) \equiv x^4+2x^3-7x^2+ax+b$$

es: $(x-2)(x-3)$.
Calcular: $am-bn$

Resolución: De acuerdo con la teoría podemos plantear dos divisiones exactas.

$$\text{I. } \frac{x^4 - 9x^2 + mx + n}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^4 - 9x^2 + mx + n}{x^2 - 5x + 6}$$

Según el método de Horner

1	1	0	−9	m	n
5		5	−6		
−6			25	−30	
				50	−60
	1	5	10	0	0

En las columnas del residuo:

$$m = -20 \ \wedge \ n = 60$$

$$\text{II. } \frac{x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6}$$

1	1	2	−7	a	b
5		5	−6		
−6			35	−42	
				110	−132
	1	7	22	0	0

En las columnas del residuo:

$$a = -68 \text{ y } b = 132$$

$$\therefore \ am - bn = -6560$$

PROBLEMA 27 Sabiendo que:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \ y = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}; \ z = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}$$

$$\frac{a^4 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^4 + c^4}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{a^4 + c^4}{(a^2 + c^2)^2} = 4$$

Calcular: $x^2 + y^2 + z^2$

Resolución: Por condición tenemos:

$$\frac{a^4 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^4 + c^4}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{a^4 + c^4}{(a^2 + c^2)^2} = 4$$

Multiplicando por 2:

$$\frac{2(a^4 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{2(b^4 + c^4)}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{2(a^4 + c^4)}{(a^2 + c^2)^2} = 8$$

Por la equivalencia de Lagrange:

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(b^2 + c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{(a^2 + c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2}{(a^2 + c^2)^2} = 8$$

Desdoblando en cada fracción obtenemos:

team CALAPENSHKO

$$1+\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}+1+\frac{(b^2-c^2)^2}{(b^2+c^2)^2}+1+\frac{(a^2-c^2)^2}{(a^2+c^2)^2}=8$$

$$1+x^2+1+y^2+1+z^2=8$$

$$x^2+y^2+z^2+3=8$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=5$$

PROBLEMA 28 Si:

$$x=2^{16}-2^{15}-2^{14}$$
$$y=2^{14}-2^{15}-2^{16}$$
$$z=2^{15}-2^{14}-2^{16}$$

Calcular el valor numérico de:

$$\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3}$$

Resolución: Una rápida inspección permite apreciar que:

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0;$$

Luego por una equivalencia condicional tenemos que:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

Asimismo se sabe que:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z)$$

Si "k" es el valor numérico, tenemos:

$$K=\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3}$$

$$K=\frac{3(x-y)(y-z)(z-x)}{-3(x+y)(y+z)(z+x)}=-\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\quad\ldots\ldots(1)$$

Por condición tenemos:

$$x-y=\ 2^{16}-2^{15}-2^{14}-2^{14}+2^{15}+2^{16}$$
$$x-y=\ 2.2^{16}-2.2^{14}=2^{17}-2^{15}=2^{15}(2^2-1)=2^{15}.3$$
$$x+y=\ 2^{16}-2^{15}-2^{14}+2^{14}-2^{15}-2^{16}=-2^{15}-2^{15}=-2.2^{15}$$
$$z+x=\ 2^{15}-2^{14}-2^{16}+2^{16}-2^{15}-2^{14}=-2^{14}-2^{14}=-2.2^{14}$$
$$z-x=\ 2^{15}-2^{14}-2^{16}-2^{16}+2^{15}+2^{14}$$
$$z-x=\ 2.2^{15}-2.2^{16}=2^{16}-2^{17}=2^{16}(1-2)=-2^{16}$$
$$y+z=\ 2^{14}-2^{15}-2^{16}+2^{15}-2^{14}-2^{16}=-2^{16}-2^{16}=-2.2^{16}$$
$$y-z=\ 2^{14}-2^{15}-2^{16}-2^{15}+2^{14}+2^{16}$$
$$y-z=\ 2.2^{14}-2.2^{15}=2^{15}-2^{16}=2^{15}(1-2)=-2^{15}$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$K=\frac{(2^{15}.3).(-2^{15}).(-2^{16})}{(-2.2^{15}).(-2.2^{16}).(-2.2^{14})}=\frac{(3)}{(-2)(2)}$$

$$\therefore\quad K=-\frac{3}{4}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 29 Determine el valor constante "K" que asume la siguiente fracción:

$$F(x;y) = \frac{(a-2)x^4 - (a+7)xy + (2a-1)y^4}{4x^4 - (a+2)xy + (3a-14)y^4}$$

Resolución: Por propiedad se cumple:

$$K = \frac{a-2}{4} = \frac{a+7}{a+2} = \frac{2a-1}{3a-14} \quad \text{.....(1)}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{a-2}{4} = \frac{a+7}{a+2}$$

$$a^2 - 4 = 4a + 28$$

$$a^2 - 4a - 32 = 0$$

$$(a-8)(a+4) = 0$$

$$a = 8 \vee a = -4$$

Una rápida inspección permite observar que $a = -4$ no verifica simultáneamente la relación (1). Por tanto $a = 8$

Finalmente tenemos:

$$K = \frac{a-2}{4} = \frac{8-2}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore K = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA 30 Si: A, B, C y D son los numeradores de las fracciones parciales en que se puede descomponer a la fracción: $\dfrac{4x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2(x+1)^2}$

Calcular: $A + B + C + D$

Resolución: De acuerdo con la teoría podemos plantear la siguiente relación:

$$\frac{4x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{4x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2(x+1)^2} = \frac{Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2}{x^2(x+1)^2}$$

Ahora se cumple:

$$4x^3 - x^2 - 3x - 2 = Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2$$

twitter.com/calapenshko

Para $x = 0$:

$$-2 = B \leftrightarrow B = -2$$

Para $x = -1$:

$$-4 = D \leftrightarrow D = -4$$

Para $x = 1$:

$$-2 = 4A + 4B + 2C + D$$

$$-2 = 4A - 8 + 2C - 4$$

$$-2 = 4A + 2C - 12 \leftrightarrow 10 = 4A + 2C$$

De aquí obtenemos:

$$2A + C = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Para $x = -2$:

$$-32 = -2A + B - 4C + 4D$$

$$-32 = -2A - 2 - 4C - 16$$

$$-32 = -2A - 4C - 18 \leftrightarrow 2A + 4C = 14$$

De aquí obtenemos:

$$A + 2C = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Resolviendo (1) y (2):

$$C = 3 \wedge A = 1$$

$$\therefore A + B + C + D = -2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Reducir:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1}{x^2-\frac{1}{x}}-\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

A) –5 B) –4 C) –3
D) –2 E) –1

2. Efectuar:

$$\left[\frac{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2b^2-2a^2}}{\frac{1}{b-a}-\frac{1}{b+a}}\right]\cdot\left[\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}\right]$$

A) b B) a C) 1
D) a + b E) $\frac{a}{b}$

3. Calcular "$a^2 - b^2$" si la fracción:

$$P(x;y)\equiv\frac{(a+b)x+(a-b)y+1}{4x+2y+1}$$

tiene un valor constante.

A) 7 B) 12 C) 3
D) 5 E) 8

4. Si:

$$\frac{(p-2)x+(2p+3q-1)y+3q}{8x-4y+7}$$

Tiene un valor constante para todos los valores de "x" e "y", entonces este valor constante es:

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{7}$
D) $-\frac{1}{27}$ E) $-\frac{1}{9}$

5. La fracción:

$$\frac{7x-1}{1-5x+6x^2}$$

se obtuvo sumando las fracciones:

$$\frac{A}{1-3x}\ ;\ \frac{B}{1-2x}$$

Calcular: (A . B)

A) 20 B) –20 C) 4
D) –5 E) –4

6. Si se verifica la identidad:

$$\frac{2-x}{x^3-2x^2-3x}\equiv\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$$

para todo número real "x" distinto de –1, 0 y 3. Hallar el valor de a . b . c

A) $\frac{1}{6}$ B) $-\frac{1}{24}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $-\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{24}$

7. Calcular: "c – b", si:

$$\frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}<>\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-4}$$

A) 13 B) 9 C) 11
D) 14 E) 7

8. El numerador de una de las fracciones en las cuales se descompone la fracción:

$$\frac{2x^2-11x+5}{x^3-x^2-11x+15}$$

es:

A) 6 B) 2 C) 3x + 1
D) 3x E) 2x + 1

9. Simplificar:

$$\frac{(x-3)^4 - x(x-6)(x-4)(x-2) + 10x(6-x) + 9}{(x+1)(x-5)(x^2-9) - (x-1)^2(x^2-2x) + 19x(x-2)}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Simplificar:

$$\frac{(x+2)^4 + (x-2)^4 + (x^2+4x-4)^2 + (x^2-4x-4)^2}{(x^2+4)^2 + 8x^2}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

11. Si: P y Q son dos polinomios factorizables definidos por:

$$P(x) \equiv 6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + mx + n$$

$$Q(x) \equiv 2mx^3 + 2nx^2 + px - q$$

Tal que el $MCD(P; Q) \equiv 2x + 2x^2 + 1$
Entonces un factor del polinomio Q(x) es:

A) $x-2$ B) $3x-1$ C) $2x+1$
D) $x+2$ E) $3x+1$

12. Si: $P(x) \equiv (x+3)[x^2 + (a-2)x - 2a]$

$$Q(x) \equiv (x-2)[x^2 + (b+3)x + 3b]$$

y teniendo que: el T.I. del MCM es 120 y el coeficiente de "x" al efectuar: MCM ÷ MCD es 1. Calcular:

$$a^{-1} + b^{-1} \quad ; \quad a > b$$

A) 0,01 B) 0,05 C) –0,05
D) 0,20 E) –0,04

13. Dados los polinomios:

$$P(x) \equiv x^4 + 4x^3 + ax^2 + 11x + 6$$

$$Q(x) \equiv x^4 - x^3 + x^2 - bx - 4$$

Si el MCD de P y Q es de tercer grado. Hallar: a.b.x

A) 10 B) 12 C) 16
D) 18 E) 24

14. El producto de dos polinomios es: $(x^6 + 1)^2 - 4x^6$ y el cociente del MCM entre el MCD de ambas es: $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$. Determine el MCD de los polinomios.

A) $(x+1)(x^3-1)$
B) $(x-1)(x^3+1)$
C) $(x^2+x+1)(x+1)$
D) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
E) $(x^2+x-1)(x^2-1)$

15. Sabiendo que: P(x) y Q(x) son polinomios mónicos, de tercer grado y cuyo MCD es:

$$(x^2 - n^2); \quad n > 0$$

Además los datos:

$$P(0) = 2n^2; \quad Q(0) = 0; \quad Q(3) = -120$$

Calcular: MCM ÷ MCD

A) x^2-7x+6 B) x^2-14x C) x^2-7x
D) x^2+7x E) x^2+28x

16. Determinar el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 + 1$$

$$Q(x) \equiv (x+1)(x^4-1) + x^2(x-1)$$

A) x^2+x+1 B) x^2-x+1
C) x^3-x+1
D) x^3+x+1 E) x^3-x^2+1

17. Simplificar:

$$\frac{(1+x^2)^4 + (1+x^4)^2}{(1+x^2+x^4)^2 - x^4}$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{x^2+1}{x^4+1}$
D) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ E) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

team CALAPENSHKO

18. Reducir:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2(x^3-x)}{x^4+x^3-x-1}$$

A) 0 B) x C) 2x

D) 1 E) $\frac{3x}{x-1}$

19. Reduciendo a su mínima expresión:

$$\frac{a+(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{a-(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{a-(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{a+(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

resulta:

A) a^2-1 B) 1 C) $1+a^2$

D) $4a(a^2-1)^{\frac{1}{2}}$ E) 0

20. Si:

$$a+b+c=0$$

Simplificar:

$$\frac{a^9+b^9+c^9-3a^3b^3c^3}{9abc}$$

A) $(a^2-bc)^3$ B) $(a+b)^6$ C) $(b+c)^6$

D) $(a^2+bc)^3$ E) $(a+c)^6$

21. Siendo:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

Calcular:

$$(x+1)(y+1)$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

22. Simplificar.

$$\frac{(x^2+6x+4)(x+4)^2+(x+3)^2}{(x+3)^2(x^2+6x+4)+1}$$

A) x^2+x+1 B) x^2-x-1

C) x^2-x+1

D) x^2+x-1 E) x^2+1

23. Si:

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$$

Reducir:

$$\frac{2(ax+by+cz)(x+y+z)}{x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)}$$

A) a + b + c B) a + b − c

C) a − b + c

D) 1 E) b − a + c

24. Qué valor asume la expresión:

$$\frac{a^n}{2na^n-2nx}+\frac{b^n}{2nb^n-2nx}$$

si se sustituye "x" por:

$$\frac{a^n+b^n}{2}$$

A) 1 B) $\frac{n}{n+1}$ C) $\frac{n-1}{n+1}$

D) $\frac{n}{n-1}$ E) $\frac{1}{n}$

25. Calcular:

$$a+b+c$$

Si:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-x}<>\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) −1 E) 1

team CALAPENSHKO

26. Indicar la fracción simple de mayor numerador de las fracciones de:

$$\frac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$$

A) $\frac{3}{(x-1)^3}$ B) $\frac{5}{(x-1)^3}$ C) $-\frac{4}{(x-1)^2}$

D) $-\frac{7}{(x-1)^3}$ E) $\frac{5}{(x-1)^4}$

27. Si la fracción: $\frac{4x^2-2x+3}{2x^2-x-1}$ se transforma en otro equivalente a:

$$A+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{2x+1}$$

donde A, B, C son constantes reales. Calcular:

$$\left(\frac{A}{3}+B+C\right)$$

A) -1 B) 1 C) 3

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

28. Sabiendo que:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a+b+c}{n}$$

Simplificar:

$$E=\frac{ab+a+n}{b+1}+\frac{bc+b+n}{c+1}+\frac{ac+c+n}{a+1}$$

A) n B) 2n C) 3n

D) 4n E) 5n

29. Si: $abc = 1$

Reducir:

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

30. Calcular:

$$\frac{c+a}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$$

si:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b+a}=0$$

A) 0 B) 1 C) -1

D) 2 E) -2

31. Si $a + b + c = 0$, simplificar:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{\left[2a^3-(b^3+c^3)\right](a^2+b^2+c^2)}$$

A) 3a B) $\frac{1}{3a}$ C) $\frac{1}{b}$

D) $\frac{1}{2b}$ E) $\frac{1}{3c}$

32. Reducir:

$$\left(1+\frac{x}{x+y+z}\right)^2+\left(1+\frac{y}{x+y+z}\right)^2+\left(1+\frac{2}{x+y+z}\right)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

33. Reducir:

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\frac{a+y}{y(y-x)(y-z)}+\frac{a-z}{z(z-x)(z-y)}$$

A) 0 B) $\frac{1}{xyz}$ C) a

D) $\frac{a}{xyz}$ E) xyz

34. Simplificar:

$$\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

A) $x + y + z$ B) 0

C) x

D) $xy + xz + yz$ E) $x - y + z$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

35. Si:

$$x + y + z - 2 = x^3 + y^3 + z^3 - 8 = 1$$

Calcular:

$$\frac{1}{3x + yz} + \frac{1}{3y + xz} + \frac{1}{3z + xy}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 27

36. Reducir:

$$\frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{\frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \dfrac{1}{x^2 - \dfrac{\frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}}}$$

A) x B) x^2 C) $2x$
D) $2x^2$ E) $4x^2$

37. Efectuar:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{1 + \dfrac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}}}} \div \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{1 + \dfrac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

A) 2 B) $\dfrac{x-1}{x+1}$ C) $\dfrac{x+2}{x-1}$
D) $\dfrac{2x}{x+2}$ E) $\dfrac{2x-2}{x+2}$

38. Si la siguiente fracción:

$$\frac{(m + 2n)x^2 + (m^2 + 4mn)xy + (7m + 6)y^2}{x^2 + (m + n)xy + (2m + 1)y^2}$$

es independiente de "x" e "y". Calcular: $m - n$

A) 1 B) -1 C) 2
D) 3 E) 4

39. Si:

$$\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ac}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$$

Calcular:

$$\frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ac} + \frac{c}{c^2 - ab}$$

A) 1 B) 0 C) abc
D) $a + b + c$ E) $\dfrac{1}{abc}$

40. Sabiendo que:

$$a^{-2}(bc - a) + b^{-2}(ac - b) + c^{-2}(ab - c) = 0$$

Simplificar:

$$\frac{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3}{ab + bc + ac}$$

A) $a + b + c$ B) abc C) 1
D) $\dfrac{1}{a + b + c}$ E) $\dfrac{1}{abc}$

41. Determine el número de factores del MCM de los polinomios:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$
$$Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^7$$
$$R(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{11}$$

A) 6 B) 8 C) 15
D) 64 E) 32

42. Si el MCM de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es $x^{40} + x^{20} + 1$ y su MCD es $x^{30} + x^{20} - x - 10 + 2$. ¿Cuántos factores tiene el producto de dichos polinomios?

A) 6 B) 4 C) 24
D) 32 E) 16

team CALAPENSHKO

43. Si el MCD de los polinomios:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 18$$

$$Q(x) = x^3 + bx + 12$$

es de segundo grado, encontrar la suma de los factores no comunes.

A) $2x + 1$ B) $2x + 2$ C) $2x + 3$
D) $2x + 4$ E) $2x + 5$

44. Calcular el valor de "a" para que la fracción:

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2 + 19x - a - 4}{x^3 - (a+1)x^2 + 23x - a - 7}$$

admita simplificación.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 7 E) 15

45. Si:

$$\frac{(a^2+b^2)}{ab} + \frac{(b^2+c^2)}{bc} + \frac{(a^2+c^2)}{ac} = -2$$

Calcular:

$$P = \frac{(a+b+c)^6 - (a^6+b^6+c^6)}{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

46. Reducir:

$$E = \sum_{k=1}^{2000} \frac{2^{k-1}}{1 - x^{x^{k-1}}} - \frac{2^{2000}}{1 - x^{2^{2000}}}$$

Indicando: $E^{-1} + 1$

A) 1 B) -1 C) x
D) $-x$ E) x^{2000}

47. Reducir:

$$\cfrac{n}{n + \cfrac{n-1}{n-1 + \cfrac{n-2}{n-2 + \cfrac{n-3}{n-3 + \ddots \; 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

A) $\frac{n^2+1}{n^3+1}$ B) $\frac{n^2-1}{n}$ C) $\frac{n-1}{n}$
D) $\frac{n+1}{n+2}$ E) $\frac{n+2}{n-1}$

48. Simplificar:

$$\frac{\frac{1}{a-x} + \frac{x}{(a-x)^2} + \frac{x^2}{(a-x)^3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}{\frac{1}{a-x} - \frac{x}{(a-x)^2} + \frac{x^2}{(a-x)^3} - \ldots - \frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}$$

A) $\frac{a}{a-2x}$ B) $\frac{a}{2a-a}$ C) $\frac{a-2x}{a}$
D) $\frac{a}{a-x}$ E) $\frac{2x-a}{a}$

49. Si: $x \neq 1 ; y \neq 1 ; x \neq z$ y $\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y}$ entonces ambas fracciones son iguales a:

A) $xy + xz + yz$ B) xyz C) $x + y + z$
D) $\frac{x+y+z}{xyz}$ E) 1

50. Mostrar el equivalente de:

$$\cfrac{x}{x+1 - \cfrac{x}{x+1 - \cfrac{x}{x+1 - \cfrac{x}{\ddots}}}}$$

"n" veces

A) $\frac{x(x^n-1)}{x^{n+1}-1}$ B) $\frac{x(x^n+1)}{x^{n+1}-1}$ C) $\frac{x(x^{n+1}-1)}{x^n-1}$
D) $\frac{x^{n+1}-1}{x^n-1}$ E) $\frac{x(x^n+1)}{x^{n+1}+1}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 8

Potencia de un Binomio

CAPACIDADES:

- Desarrollar potencias de tipo $(x+y)^n$ con $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$.
- Determinar un término cualquiera del desarrollo de $(x+y)^n$ con $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$.
- Identificar series notables a partir de $(x+y)^n$ con $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$.

$$(x_1 + x_2)^n \equiv x_1^{\,n} + n x_1^{\,n-1} x_2 + \ldots + x_2^{\,n}$$

FEDERICO VILLAREAL

FEDERICO VILLARREAL, nació el 3 de agosto de 1 850 en Túcume, departamento de Lambayeque (Perú) (El departamento de Lambayeque tiene como capital departamental a la ciudad de Lambayeque). A los 14 años fue cajero en una empresa despepitadora de algodón, pero no dejó de lado sus estudios que lo llevarían hacer profesor y así fue: a los 20 años obtuvo el título de preceptor otorgado por la comisión departamental de Instrucción pública en Trujillo el cual le permitió dirigir la escuela oficial de Túcume de 1 870 a 1 874 entre 1 875 y 1 876 dirigió un colegio de instrucción media en la ciudad de Lambayeque, enseño allí matemáticas y ocupó en él el cargo de vicerrector. Entre 1 876 y 1 877 tuvo bajo su cargo una escuela primaria de Lambayeque.

La experiencia de Villarreal como maestro elemental señaló sólo una primera etapa. Su vocación de matemático bullía desbordando su enseñanza humilde. Ya en 1 873 cuando contaba con tan sólo 23 años descubrió un método para elevar un polinomio cualquiera a un exponente natural cualquiera.

Entre 1 877 y 1 880 estudió en la sección de ciencias matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) graduándose como bachiller en 1 879 con la tesis: "Fórmulas y métodos que deben completarse en matemáticas puras" y como licenciado con la tesis: "Efectos de Refracción sobre el Disco de los Astros" (1 880). En 1 881 se graduó de doctor de ciencias matemáticas mediante la tesis: "Clasificación de curvas de Tercer Grado" destacando por su originalidad y conclusiones lo cual le mereció a Villarreal la medalla de oro, otorgada por la Facultad de Ciencias al primer doctor de su época, quien a la vez, se constituye en el primer matemático profesional del siglo XX en el Perú.

El sabio Federico Villarreal murió en Barranco el 3 de junio de 1 923, rindiéndosele honores póstumos correspondientes a la categoría de ministro de estado.

team CALAPENSHKO

FACTORIAL

DEFINICIÓN

Dado un número natural "n", el factorial del número "n" es una relación funcional que se denota así: $n! = \lfloor\underline{n} = \underline{n}\rfloor$ y se define de la manera siguiente:

$$\lfloor\underline{n} = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \vee n = 1 \\ 1.2.3. \ldots . n & ; n \geq 2 \end{cases}$$

- $\lfloor\underline{2} = 1.2 = 2$
- $\lfloor\underline{3} = 1.2.3 = 6$
- $\lfloor\underline{4} = 1.2.3.4 = 24$
- $\lfloor\underline{5} = 1.2.3.4.5 = 120$

TEOREMA $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$$\lfloor\underline{n} = n \,.\, \lfloor\underline{n-1}$$

- $\lfloor\underline{7} = 7\lfloor\underline{6} = 7.6\lfloor\underline{5}$
- $\lfloor\underline{18} = 18\lfloor\underline{17} = 18.17\lfloor\underline{16}$
- $\lfloor\underline{10} = 10\lfloor\underline{9} = 10.9.\lfloor\underline{8}$
- $\lfloor\underline{21} = 21\lfloor\underline{20} = 21.20.\lfloor\underline{19}$

OBSERVACIÓN

El teorema anterior es muy útil para efectuar operaciones de adición, sustracción o división entre factoriales, veamos algunas aplicaciones.

- $\lfloor\underline{12} + \lfloor\underline{13} = \lfloor\underline{12} + 13 \,.\, \lfloor\underline{12} = 14 \,.\, \lfloor\underline{12}$
- $\lfloor\underline{17} - \lfloor\underline{16} = 17\lfloor\underline{16} - \lfloor\underline{16} = 16\lfloor\underline{16}$
- $\dfrac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{9}} = \dfrac{10 \,.\, \lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{9}} = 10$

Debemos tener en cuenta que siempre se expresa el factorial mayor en función del menor.

PROPIEDAD $\forall\, x \wedge y \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$

$$\lfloor\underline{x} = \lfloor\underline{y} \rightarrow x = y$$

- $\lfloor\underline{x-4} = \lfloor\underline{7} \rightarrow x - 4 = 7$
  $\therefore\ x = 11$

team CALAPENSHKO

NÚMERO COMBINATORIO

DEFINICIÓN

Dados los naturales n ∧ k de modo que $0 \le k \le n$, el combinatorio de "n" en "k" denotado por C_k^n se define de la manera siguiente:

$$C_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k \,.\, \lfloor k}$$

- $C_2^4 = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \,.\, \lfloor 2} = \frac{4 \,.\, 3 \lfloor 2}{2 \,.\, \lfloor 2} = 2 \,.\, 3 = 6$
- $C_3^7 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 4 \,.\, \lfloor 3} = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \lfloor 4}{\lfloor 4 \,.\, 6} = 7 \,.\, 5 = 35$

TEOREMAS

1) Básicos:

$$C_0^n = 1 \; ; \; C_1^n = n \; ; \; C_n^n = 1$$

- $C_0^{10} = 1 \; ; \; C_1^8 = 8 \wedge C_7^7 = 1$

2) De Complemento:

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

- $C_{17}^{19} = C_{19-17}^{19} = C_2^{19}$

3) De Degradación:

$$C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

- $C_8^{17} = \frac{17}{8} C_7^{16}$

$$C_k^n = \left(\frac{n-k+1}{k}\right) C_{k-1}^n$$

- $C_5^{12} = \left(\frac{12-5+1}{5}\right) C_4^{12} = \left(\frac{8}{5}\right) C_4^{12}$

$$C_k^n = \left(\frac{n}{n-k}\right)C_k^{n-1}$$

- $C_4^7 = \left(\frac{7}{7-4}\right)C_4^6 = \left(\frac{7}{3}\right)C_4^6$

4) De Reducción:

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

- $C_5^9 + C_6^9 = C_6^{10}$

PROPIEDAD

$$C_k^n = C_r^n \rightarrow k = r \vee k + r = n$$

- $C_x^{10} = C_4^{10} \rightarrow x = 4 \vee x + 4 = 10$
  $\therefore x = 4 \vee x = 6$

COEFICIENTE BINOMIAL

DEFINICIÓN

Dados $m \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$, el coeficiente binomial de m en k denotado por $\binom{m}{k}$ se define de la manera siguiente:

$$\binom{m}{k} = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\ldots.\,[m-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\ldots.\,(k-1)\,.\,k}$$

Observe que el numerador presenta "k" factores.

- $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)\,.\,(-2-1)\,.\,(-2-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{(-2)\,.\,(-3)\,.\,(-4)}{1\,.\,2\,.\,3} = -4$
- $\binom{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,.\,(\sqrt{2}-1)}{1\,.\,2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

OBSERVACIÓN

El número combinatorio es un caso particular del coeficiente binomial, razón por el cual todos los teoremas vistos para el número combinatorio son válidos para el coeficiente binomial.

- $\binom{m}{0} = 1\,;\ \forall\, m \in \mathbb{R}$
- $\binom{m}{1} = m\,;\ \forall\, m \in \mathbb{R}$

team CALAPENSHKO

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE NATURAL

DEFINICIONES

1) $(x+y)^0 = 1$
2) $(x+y)^1 = x + 1$

TEOREMAS

1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
3) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

⋮

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n y^n \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- $(x+y)^2 = C_0^2 x^2 + C_1^2 xy + C_2^2 y^2 = 1 \,.\, x^2 + 2 \,.\, xy + 1 \,.\, y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

PROPIEDADES

1) El desarrollo de $(x+y)^n$ presenta $(n+1)$ términos.

2) La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de $(x+y)^n$ se obtiene Reemplazando cada variable de la base por la unidad.

- Para el desarrollo de $(3x^4 - y^3)^5$, N° de términos $= 5 + 1 = 6$

$$\sum \text{Coef} = (3 \,.\, 1^4 - 1^3)^5 = (3-1)^5 = (2)^5 = 32$$

3) Fórmula del término de lugar $(k+1)$ en el desarrollo de $(x+y)^n$

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} y^k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Donde:

t_{k+1} = término de lugar $k+1$
n = exponente del binomio
x = primer término del binomio
y = segundo término del binomio

Ejemplo: Determinar el cuarto término del desarrollo de $(2x^2 - y^3)^6$

Resolución: Se observa que $n = 6$, se pide t_4, es decir $k = 3$

$$t_4 = C_3^6 [2x^2]^{6-3} [-y^3]^3$$
$$t_4 = C_3^6 [2x^2]^3 [-y^3]^3$$
$$t_4 = 20 \,.\, 8x^6 \,.\, -y^9$$
$$\therefore \; t_4 = -160x^6y^9$$

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

Si en el desarrollo de $(x+y)^n$ se quiere determinar el término de lugar $(k+1)$ contado a partir del extremo final (derecha a izquierda) se tendrá en cuenta la relación:

$$\overleftarrow{t_{k+1}} = C_k^n y^{n-k} x^k$$

PROPIEDAD

Dada la potencia $(x+y)^n$ con "n" par, el desarrollo presenta término central cuyo lugar lo denotaremos así: LTC y se calcula según:

$$LTC = \frac{n+2}{2}$$

Ejemplo: Determinar el término central del desarrollo de $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^8$:

Resolución: Se observa que $LTC = \frac{8+2}{2} = 5$ luego por fórmula se debe hallar t_5, donde $n = 8 \wedge k = 4$.

$$t_5 = C_4^8\left(\frac{x}{2}\right)^{8-4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = C_4^8\left(\frac{x}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{16} \cdot \frac{16}{x^4}$$

$$\therefore \ t_5 = 70$$

TEOREMAS SOBRE SERIES $\forall\, n \in N \wedge x \in R$

1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n$

2) $C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + \ldots + \blacktriangle = 2^{n-1}$

3) $C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \ldots + \blacksquare = 2^{n-1}$

4) $\left[C_0^n\right]^2 + \left[C_1^n\right]^2 + \left[C_2^n\right]^2 + \left[C_3^n\right]^2 + \ldots\ldots + \left[C_n^n\right]^2 = C_n^{2n}$

5) $1 + xC_1^n + x^2C_2^n + x^3C_3^n + \ldots\ldots + x^nC_n^n = (1+x)^n$

team CALAPENSHKO

PROPIEDADES ADICIONALES

1) La suma de todos los exponentes de las variables de los términos del desarrollo de:

$$P(x; y) = (ax^{\alpha} + by^{\beta})^n$$

se obtiene según la relación:

$$\Sigma_{expon} = \frac{(\alpha + \beta)(n)(n+1)}{2}$$

2) Para obtener el término numéricamente más grande (término máximo) en el desarrollo de $(x + y)^n$ se deberá plantear la siguiente relación:

$$t_{k+1} > t_k$$

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE ENTERO NEGATIVO O FRACCIONARIO

Siendo "n" entero negativo o fraccionario, el desarrollo de $(x + y)^n$ admite infinitos términos y comúnmente recibe el nombre de serie binominal o binomio de Newton.

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots$$

- $$(1 + x)^{-\frac{1}{3}} = \binom{-\frac{1}{3}}{0}[1]^{-\frac{1}{3}} + \binom{-\frac{1}{3}}{1}[1]^{-\frac{1}{3}-1}.x + \binom{-\frac{1}{3}}{2}[1]^{-\frac{1}{3}-2}.x^2 + \ldots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{3}} = (1)[1] + \left(-\frac{1}{3}\right)[1]x + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}[1]x^2 + \ldots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \ldots$$

La fórmula que permite determinar al término que ocupa la posición $k + 1$ en el desarrollo de la potencia es:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k \quad , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

APROXIMACIÓN LINEAL

Si $m \in Q \wedge |x| < 1$: $\quad (1+x)^m = 1 + mx$

La relación anterior es muy útil para aproximar raíces, sólo debemos tener en cuenta que el valor de x es muy pequeño, prácticamente cero.

Ejemplo: Calcular aproximadamente la raíz cúbica de 221.

Resolución: Se pide: $E = \sqrt[3]{221}$. Ahora buscamos un número cercano (por izquierda o derecha) a 221 que admita raíz cúbica

$$221 = 216 + 5 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[3]{221} = \sqrt[3]{216+5}$$

$$E = \sqrt[3]{216\left(1+\frac{5}{216}\right)} = \sqrt[3]{216}\,.\,\sqrt[3]{1+\frac{5}{216}}$$

$$E = 6.\left(1+\frac{5}{216}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{"Por la aproximación"}$$

$$E = 6\left(1+\frac{1}{3}.\frac{5}{216}\right) = 6+\frac{10}{216} = \frac{653}{108} \qquad \therefore E = \sqrt[3]{221} = 6{,}046$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO CON EXPONENTE NATURAL

Consideremos un polinomio de "k" términos ($k \in \mathbb{N} / k \geq 3$), el cual se eleva al exponente natural "n" ($n \geq 2$)

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k).(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)\ldots(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)}_{\text{"n" factores}}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)^n = x_1^{\,n} + \ldots\ldots\ldots + x_k^{\,n}$$

Cualquier término del desarrollo adopta la forma:

$$\binom{n}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_k} x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}\ldots\ldots x_k^{\alpha_k}$$

Donde: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ y verifican la relación: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k = n$

OBSERVACIÓN

La expresión $\binom{n}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_k}$ recibe el nombre de **COEFICIENTE MULTINOMIAL** y se desarrolla así:

$$\binom{n}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_k} = \frac{\lfloor n}{\lfloor\alpha_1 \,.\, \lfloor\alpha_2 \,.\, \lfloor\alpha_3 \ldots\ldots \lfloor\alpha_k}$$

Por ejemplo : $\binom{5}{1;2;2} = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 1 \,.\, \lfloor 2 \,.\, \lfloor 2} = \frac{120}{1.2.2} = 30$

FÓRMULA DE LEIBNITZ

Es la relación matemática que permite abreviar el desarrollo de la potencia de un polinomio, veamos:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_k} x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}\ldots\ldots x_k^{\alpha_k}$$

Donde el símbolo "Σ" (sumatoria) se extiende a todas las soluciones en enteros no negativas de la ecuación:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k = n$$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Dando uso a la fórmula de Leibtnitz desarrollar la siguiente potencia:

$$(x + y + z)^2$$

Resolución: De acuerdo con la fórmula de Leibtnitz se plantea:

$$(x+y+z)^2 = \sum \binom{2}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3} x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2}.z^{\alpha_3}$$

Donde se cumple que: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

Ahora resolviendo en $\mathbb{N}$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

↓	↓	↓	
0	0	2	..... (I)
0	2	0	..... (II)
2	0	0	..... (III)
0	1	1	..... (IV)
1	0	1	..... (V)
1	1	0	..... (VI)

Con (I) el término será: $\binom{2}{0;0;2} x^0.y^0.z^2 = z^2$

Con (II) el término será: $\binom{2}{0;2;0} x^0.y^2.z^0 = y^2$

Con (III) el término será: $\binom{2}{2;0;0} x^2.y^0.z^0 = x^2$

Con (IV) el término será: $\binom{2}{0;1;1} x^0.y^1.z^1 = 2yz$

Con (V) el término será: $\binom{2}{1;0;1} x^1.y^0.z^1 = 2xz$

Con (VI) el término será: $\binom{2}{1;1;0} x^1.y^1.z^0 = 2xy$

Finalmente considerando al símbolo Σ se tendrá:

$$\therefore (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

PROPIEDAD

Siendo $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ términos con diferentes variables. El número de términos de la expansión de la potencia $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n$ se obtiene por: C_{k-1}^{n+k-1}

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Reducir cada uno de los siguientes casos:

A) $1! + 2! + 3!$

B) $2! - 3! + 0!$

C) $10! - 9! - 9.9!$

D) $\frac{6!}{5!} + \frac{10!}{9!} - \frac{7!}{6!}$

E) $(3!)0! + (0!)2! - (2!)1!$

2. Calcular x en cada caso:

A) $|\underline{2x-1} = 1$

B) $|\underline{3x+2} = 2$

C) $|\underline{x^2-4} = 6$

D) $|\underline{1-4x} = 24$

E) $|\underline{5x+1} = |\underline{x+25}$

3. Reducir cada caso siguiente:

A) $C_0^{10} - C_1^5 + C_5^6$

B) $C_4^4 + C_2^5 - C_2^3$

C) $C_0^3 + C_1^3 + C_2^3$

D) $\frac{C_2^5 + C_3^5}{C_3^6}$

E) $\frac{C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10}}{C_6^{10} + C_7^{10} + C_8^{10}}$

4. Calcular x en cada caso:

A) $C_1^x = 2x - 10$

B) $C_{x-1}^x = 3x - 40$

C) $C_2^x = 3$

D) $C_2^{x-1} = 10$

E) $C_1^x + C_2^x = 36$

5. Determina el término solicitado en el desarrollo de cada una de las siguientes potencias.

A) $P(x;y) = (x+y)^6$ ¿T_4?

B) $P(x;y) = (2x-y)^{10}$ ¿T_5?

C) $P(x;y) = (3x^2 + y^4)^8$ ¿T_3?

D) $P(x;y) = (5x^4 - y^3)^7$ ¿T_4?

E) $P(x;y) = (1-2x^5)^{10}$ ¿T_6?

6. Muestra los tres primeros términos del desarrollo de las siguientes potencias:

A) $P(x) = (1-x)^{-1}$

B) $P(x) = (1+x)^{-2}$

C) $P(x) = (1-2x)^{-1}$

D) $P(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

E) $P(x) = (1-x)^{-3}$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Calcular "x" en:

$$\frac{\lfloor x+2+\lfloor x+1+\lfloor x}{\lfloor x+2-\lfloor x+1-\lfloor x}=1{,}1$$

Resolución: Expresando cada factorial en función de $\lfloor x$ tenemos:

$$\frac{(x+2)(x+1)\lfloor x+(x+1)\lfloor x+\lfloor x}{(x+2)(x+1)\lfloor x-(x+1)\lfloor x-\lfloor x}=\frac{11}{10}$$

$$\frac{\lfloor x\,[(x+2)(x+1)+\overbrace{(x+1)+1}]}{\lfloor x\,[(x+2)(x+1)-\underbrace{(x+1)-1}]}=\frac{11}{10}$$

Simplificando $\lfloor x$ y reduciendo:

$$\frac{(x+2)(x+1)+(x+2)}{(x+2)(x+1)-(x+2)}=\frac{11}{10}$$

$$\frac{(x+2)\big[(x+1)+1\big]}{(x+2)\big[(x+1)-1\big]}=\frac{11}{10}$$

$$\frac{x+2}{x}=\frac{11}{10}\quad\Leftrightarrow 10x+20=11x$$

$$\therefore\ x=20$$

PROBLEMA 2 Calcular "n" en:

$$\frac{\lfloor n+1\,.\,\lfloor n}{\lfloor n+1-\lfloor n}=99\lfloor n-2$$

Resolución: Expresando en función de $\lfloor n$ el primer miembro será:

$$\frac{(n+1)\lfloor n\,.\,\lfloor n}{(n+1)\lfloor n-\lfloor n}=99\lfloor n-2$$

$$\frac{(n+1)\lfloor n\,.\,\lfloor n}{[(n+1)-1]\lfloor n}=99\lfloor n-2$$

Simplificando $\lfloor n$ y operando en el denominador tenemos:

$$\frac{(n+1)\lfloor n}{n}=99\lfloor n-2$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\underline{|n-2}}{n} = 99\underline{|n-2}$$

$$(n+1)(n-1)\underline{|n-2} = 99\underline{|n-2}$$

$$(n+1)(n-1) = 99$$

$$n^2 - 1 = 99 \quad \Rightarrow n^2 = 100$$

$$\therefore \quad n = 10$$

PROBLEMA 3 Para qué valor de "n" se verifica la igualdad:

$$5C_5^n = nC_3^{n-1}$$

Resolución: Degradando en el primer miembro tenemos:

$$5.\frac{n}{5}C_4^{n-1} = nC_3^{n-1}$$

$$n.C_4^{n-1} = nC_3^{n-1}$$

$$C_4^{n-1} = C_3^{n-1}$$

De donde se cumple: $4 + 3 = n - 1$

$$\therefore \quad n = 8$$

PROBLEMA 4 Calcular "x" en:

$$\frac{\left[C_{x+1}^{n+1} - C_x^n\right] \cdot C_{x-1}^{n-1}}{\left[C_x^n\right]^2 - C_{x+1}^{n+1} \cdot C_{x-1}^{n-1}} = 2x - 8$$

Resolución: Degradando a C_{x+1}^{n+1} tenemos:

$$\frac{\left[\frac{n+1}{x+1}C_x^n - C_x^n\right] \cdot C_{x-1}^{n-1}}{\left[C_x^n\right]^2 - \frac{n+1}{x+1} \cdot C_x^n \cdot C_{x-1}^{n-1}} = 2x - 8$$

$$\frac{C_x^n \cdot \left[\frac{n+1}{x+1} - 1\right] \cdot C_{x-1}^{n-1}}{C_x^n\left[C_x^n - \frac{n+1}{x+1} \cdot C_{x-1}^{n-1}\right]} = 2x - 8$$

team CALAPENSHKO

Simplificando C_x^n y operando en el numerador tenemos:

$$\frac{\left[\frac{n-x}{x+1}\right]\cdot C_{x-1}^{n-1}}{C_x^n-\frac{n+1}{x+1}\cdot C_{x-1}^{n-1}}=2x-8$$

$$\frac{\left[\frac{n-x}{x+1}\right]\cdot C_{x-1}^{n-1}}{\frac{n}{x}\cdot C_{x-1}^{n-1}-\frac{n+1}{x+1}\cdot C_{x-1}^{n-1}}=2x-8$$

$$\frac{\left[\frac{n-x}{x+1}\right]\cdot C_{x-1}^{n-1}}{C_{x-1}^{n-1}\cdot\left[\frac{n}{x}-\frac{n+1}{x+1}\right]}=2x-8$$

Simplificando C_{x-1}^{n-1} y operando en el denominador tenemos:

$$\frac{\left[\frac{n-x}{x+1}\right]}{\frac{n-x}{x(x+1)}}=2x-8 \rightarrow x=2x-8$$

$$\therefore \quad x=8$$

PROBLEMA 5 Reducir:

$$\binom{-20}{1}+\binom{-19}{2}+\binom{-18}{3}+\ldots+\binom{-1}{20}$$

Resolución: Se sabe que:

$$\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1};\ \forall\, n\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}}$$

Ahora en el problema:

$$k=\binom{-20}{1}+\binom{-19}{2}+\binom{-18}{3}+\ldots+\binom{-1}{20}$$

Sumando a ambos miembros $\binom{-20}{0}$

$$k+\binom{-20}{0}=\underbrace{\binom{-20}{0}+\binom{-20}{1}}_{\binom{-19}{1}}+\binom{-19}{2}+\ldots+\underbrace{\binom{-18}{2}\ldots\ldots}_{\binom{0}{20}}\binom{-1}{20}$$

team CALAPENSHKO

$$k+\begin{pmatrix}-20\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix} \Leftrightarrow k+1=0$$

$$\therefore\ k=-1$$

PROBLEMA 6 Determinar el valor de "n" para que el cuarto término del desarrollo de la potencia $P(x;y)=(x^2-y)^n$ presente a "x" con grado relativo diez.

Resolución: Hallemos t_4 por fórmula:

$$t_4=C_3^n\,(x^2)^{n-3}(-y)^3$$

$$t_4=-C_3^n\,x^{2n-6}\,y^3$$

Condición: $2n-6=10$

$$\therefore\ n=8$$

PROBLEMA 7 Determine el término independiente de "x" en el desarrollo de la potencia:

$$P(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$$

Resolución: La potencia dada es:

$$P(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}^{-1}\right)^9$$

Por fórmula general se tiene:

$$t_{k+1}=C_k^9\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\sqrt[4]{x}^{-1}\right)^k$$

$$t_{k+1}=C_k^9\,x^{\frac{9-k}{2}\ \frac{k}{4}}$$

Como t_{k+1} es independiente de x, se debe cumplir:

$$\frac{9-k}{2}-\frac{k}{4}=0 \Rightarrow k=6$$

Ahora el término independiente es:

$$T.I=t_{k+1}=t_7=C_k^9=C_6^9$$

$$T.I=C_6^9=C_3^9=\frac{9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\therefore\ T.I=84$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 8 Encontrar el coeficiente del término que admite a x^{20} como parte literal en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

Resolución: La potencia dada es:

$$P(x) = (x^3 + x^{-1})^{12}$$

Según la fórmula del término de lugar k + 1 (t_{k+1}) tenemos:

$$\boxed{t_{k+1} = C_k^n [x]^{n-k} [y]^k}$$

$$t_{k+1} = C_k^{12} (x^3)^{12-k} (x^{-1})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{12} x^{36-3k} x^{-k}$$

$$t_{k+1} = C_k^{12} x^{36-4k}$$

Por condición: $36 - 4k = 20$

$$k = 4$$

Observar que: $\text{Coef} = C_k^{12} = C_4^{12}$

$$\text{Coef} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\therefore \text{Coef} = 495$$

PROBLEMA 9 Calcular "x" de:

$$\frac{m^x}{3x C_m^{m+x}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{m}\right)\cdot\ldots\cdot}_{\text{"x" factores}} = 1680$$

Resolución: La igualdad mostrada es:

$$\frac{m^x}{3x C_m^{m+x}} \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{x}{m}\right) = 1680$$

$$\frac{m^x}{3x C_m^{m+x}} \cdot \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\cdot(m+x)}{\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{"x" factores}}} = 1680$$

team CALAPENSHKO

$$\frac{m^x \cdot (m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+x)}{3x\,C_m^{m+x} \cdot m^x} = 1680$$

Simplificando m^x y desarrollando el combinatorio tenemos:

$$\frac{\lfloor m \cdot \lfloor x \cdot (m+1)(m+2)\ldots.(m+x)}{3x \lfloor m+x} = 1680$$

$$\frac{\lfloor x}{3x} \cdot \frac{\lfloor m \cdot (m+1)(m+2)\ldots.(m+x)}{\lfloor m+x} = 1680$$

$$\frac{\lfloor x}{3x} = 1680 \Leftrightarrow \frac{x \lfloor x-1}{3x} = 1680$$

$$\lfloor x-1 = 5040 \Leftrightarrow \lfloor x-1 = \lfloor 7$$

$$\therefore\ x = 8$$

PROBLEMA 10 Calcular "n" de:

$$C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \ldots + nC_n^n = 192$$

Resolución: Degradando a cada uno de los términos del primer miembro tenemos:

$$nC_0^{n-1} + nC_1^{n-1} + nC_2^{n-1} + \ldots + nC_{n-1}^{n-1} = 192$$

$$\underbrace{n\left[C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right]}_{\text{Teorema}} = 192$$

$$n \cdot 2^{n-1} = 192 = 6 \cdot 2^5$$

$$\therefore\ n = 6$$

PROBLEMA 11 Determine el grado absoluto del sexto término de la expansión de:

$$P(x; y) = (5x^3 - 2y^2)^{10}$$

Resolución: Se pide $[t_6]^\circ$, observar que $n = 10 \wedge k = 5$

Ahora por fórmula: $t_6 = C_5^{10}(5x^3)^{10-5}(-2y^2)^5$

$$t_6 = C_5^{10}(5x^3)^5(-2y^2)^5$$

$$t_6 = (5)^5.(-2)^5.C_5^{10}.x^{15}.y^{10}$$

Finalmente: $[t_6]^\circ = 15 + 10$

$$\therefore\ [t_6]^\circ = 25$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Si en la expansión de la potencia $\left(\frac{x^p}{y^{n-10}}+\frac{y^{n+20}}{x}\right)^n$ el término central admite como como parte literal a $x^{60}y^{600}$. Calcular el valor de "n + p"

Resolución: De acuerdo con la teoría el lugar del término central será: $\frac{n+2}{2}=\frac{n}{2}+1$

ahora hallemos $t_{\frac{n}{2}+1}$ por fórmula

$$t_{\frac{n}{2}+1}=C_{\frac{n}{2}}^{n}\left(\frac{x^p}{y^{n-10}}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{y^{n+20}}{x}\right)^{\frac{n}{2}}=C_{\frac{n}{2}}^{n}\,x^{\frac{np-n}{2}}y^{15n}$$

Por condición: $15n = 600 \wedge \frac{np-n}{2}=60$

$$n = 40 \wedge 40p - 40 = 120 \leftrightarrow n = 40 \wedge p = 4$$

$$\therefore \quad n + p = 44$$

PROBLEMA 13 Al desarrollar $(x + y + z + w)^8$ se obtienen "n" términos en la cual uno de ellos toma la forma: $mx^3y^2zw^2$ de acuerdo a lo anterior calcular el valor de "m + n"

Resolución: Por condición: $(x + y + z + w)^8 = t_p + \ldots\ldots + mx^3y^2zw^2 + \ldots\ldots + t_U$

Por Leibnitz : $m=\binom{8}{3;2;1;2}=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 2 \cdot \lfloor 1 \cdot \lfloor 2} \rightarrow m = 1680$

También : n = N° de términos $= C_{4-1}^{8+4-1}=C_3^{11} \rightarrow n = 165$

$$\therefore \quad m + n = 1845$$

PROBLEMA 14 El valor de "x" es tan pequeño de tal manera que su cuadrado y demás potencias superiores pueden despreciarse, de acuerdo a esto señalar el equivalente reducido de:

$$N=\frac{\sqrt{9+x}}{1+x}$$

Resolución: La expresión es: $N = (9+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$

$$N=\left[9\left(1+\frac{x}{9}\right)\right]^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}=3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$$

team CALAPENSHKO

Por condición x es un valor muy pequeño, es decir: $x \to 0$.

Por Aproximación Binomial.

$$N = 3\left(1+\frac{x}{18}\right)(1-x) = 3\left(1+\frac{x}{18}-x-\frac{x^2}{18}\right)$$

Por condición x^2 se desprecia, o sea $x^2 = 0$, luego:

$$N = 3\left(1+\frac{x}{18}-x\right) = 3\left(1-\frac{17x}{18}\right)$$

$$\therefore \quad N = 3-\frac{17x}{6}$$

PROBLEMA 15 En el desarrollo de: $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{120}$ determinar el número de términos racionales e irracionales.

Resolución: Observar que: N° de términos Q + N° de términos Q' = 121 ..... (1)

Hallemos los términos racionales (Ter Q)

$$t_{k+1} = C_k^{120}\left(\sqrt[5]{x}\right)^{120-k}\cdot\left(\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^{k} = C_k^{120}\, x^{24-\frac{8k}{5}}$$

Si t_{k+1} es un término racional se cumple que:

$24-\frac{8k}{5}$ = Número entero, luego: $k = \overset{\circ}{15}$ (múltiplo de quince)

Por teoría: $0 \le k \le 120$

De donde: k = 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120 (9 valores).

"Para un valor de k existe un término racional"

En consecuencia existen 9 términos racionales (N° de términos Q = 9)

En (1): 9 + N° de términos Q' = 121 $\to$ Q' = 112

$\therefore$ N° de términos Q = 9 y N° de términos Q' = 112

PROBLEMA 16 Si el número de términos que se obtiene al desarrollar $(2 + 3x^2 + 4y^3 + 5z^4)^n$ es 84. Calcular "n".

team CALAPENSHKO

Resolución: De acuerdo con la propiedad se cumple que:

$$C_{4-1}^{n+4-1} = C_3^{n+3} = 84$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3} = 84$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 84$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 504$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Finalmente: $n+3 = 9$

$\therefore\ n = 6$

PROBLEMA 17 Hallar el término independiente de "x" en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(x + \sqrt[n]{x}^{-1}\right)^{3n} \ ;\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución: Hallemos el término general del desarrollo:

$$T_{k+1} = C_k^{3n}(x)^{3n-k}\left(\sqrt[n]{x}^{-1}\right)^k$$

$$T_{k+1} = C_k^{3n}.x^{3n-k}.x^{-\frac{k}{n}}$$

$$T_{k+1} = C_k^{3n}.x^{3n-k-\frac{k}{n}}$$

Por condición T_{k+1} debe ser independiente de x, luego:

$$3n - k - \frac{k}{n} = 0 \rightarrow 3n = k + \frac{k}{n}$$

$$k = \frac{3n^2}{n+1}$$

Según la teoría n y k son naturales, una rápida inspección permite apreciar que:

$$n = 2 \ ;\quad k = \frac{3(4)}{3} \quad \leftrightarrow \quad k = 4$$

Finalmente tenemos:

$$T_{k+1} = T_5 = C_4^6 = C_2^6$$

$\therefore\quad T_5 = 15$

PROBLEMA 18 Determine el valor natural que asume "n" si se sabe que en el desarrollo de:

$$P(x;y) = \left(\sqrt[n-1]{x^{-6}} + y^{n-2}\right)^{n+10}$$

Dos términos consecutivos tienen igual grado absoluto.

Resolución: De acuerdo con el enunciado P(x; y) es una expresión homogénea por lo tanto se debe cumplir que:

$$\frac{6}{n-1} = n-2$$

$$6 = n^2 - 3n + 2$$

$$0 = n^2 - 3n - 4$$

$$0 = (n-4).(n+1)$$

Como $n \in \mathbb{N}$, necesariamente:

$$n - 4 = 0$$

$$\therefore \quad n = 4$$

PROBLEMA 19 ¿Cuál es el coeficiente del término que ocupa la posición siete en el desarrollo de:

$$P(x) \equiv (1-x)^{-2}?$$

Resolución: Para utilizar la fórmula de Newton notamos que: $n = -2$ y $k = 6$

$$T_7 = \binom{-2}{6}.(1)^{-2-6}.(-x)^6$$

$$T_7 = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)}{1.2.3.4.5.6}.1.x^6$$

$$T_7 = 7x^6$$

$$\therefore \quad \text{Coeficiente} = 7$$

PROBLEMA 20 Reducir:

$$K = 7C_0^n + \frac{7^2 C_1^n}{2} + \frac{7^3 C_2^n}{3} + \frac{7^4 C_3^n}{4} + \ldots\ldots + \frac{7^{n+1} C_{n+1}^{n+1}}{n+1}$$

Resolución: Multiplicando a ambos miembros por (n + 1) y acomodando se tendrá:

$$(n+1).K = 7\left(\frac{n+1}{1}\right)C_0^n + 7^2\left(\frac{n+1}{2}\right)C_1^n + 7^3\left(\frac{n+1}{3}\right)C_2^n + \ldots\ldots + 7^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+1}\right)C_n^n$$

Ahora aplicamos el primer teorema de degradación:

$$(n+1).K = 7C_1^{n+1} + 7^2 C_2^{n+1} + 7^3 C_3^{n+1} + \ldots\ldots + 7C_{n+1}^{n+1}$$

Sumando uno a cada miembro tenemos:

team CALAPENSHKO

$$(n+1).K+1=1+7C_1^{n+1}+7^2C_2^{n+1}+7^3C_3^{n+1}+.....+7C_{n+1}^{n+1}$$

Por el último teorema sobre series, se tendrá:

$$(n+1).k+1=(1+7)^{n+1}$$

$$(n+1).k+1=8^{n+1} \quad \leftrightarrow \quad (n+1).k=8^{n+1}-1$$

$$\therefore \quad K=\frac{8^{n+1}-1}{n+1}$$

PROBLEMA 21 Reducir:

$$E=\frac{11!-10!}{9!}+\frac{10!-9!}{8!}+\frac{9!-8!}{7!}+.....+\frac{2!-1!}{0!}$$

Resolución: Nótese que cada uno de los sumandos presenta la siguiente forma general:

$$S_n=\frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!}=\frac{(n+2)(n+1)n!-(n+1)n!}{n!}$$

$$S_n=\frac{n![(n+2)(n+1)-(n+1)]}{n!}=(n+2)(n+1)-(n+1)$$

$$S_n=(n+1)[(n+2)-1]=(n+1).(n+1)=(n+1)^2$$

Ahora en nuestra expresión tenemos:

$$E=S_9+S_8+S_7+.....+S_0$$

$$E=10^2+9^2+8^2+.....+1^2$$

$$E=\frac{(10)(11)(21)}{6}=5.11.7$$

$$\therefore E=385$$

PROBLEMA 22 Simplificar:

$$K=\frac{C_8^{21}+C_{13}^{21}}{C_5^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}}$$

Resolución: Dando uso de la propiedad del complemento, nuestra expresión se puede reescribir de la manera siguiente:

$$K=\frac{C_8^{21}+C_{13}^{21}}{C_{13}^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_{12}^{20}}=\frac{2C_{13}^{21}}{C_{13}^{19}+C_{12}^{19}+C_{12}^{20}}$$

$$K=\frac{2C_{13}^{21}}{C_{13}^{20}+C_{12}^{20}}=\frac{2C_{13}^{21}}{C_{13}^{21}}$$

$$\therefore K=2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Reducir:

$$E = C_{199}^{200} + C_{198}^{199} + C_{197}^{198} + \ldots\ldots + C_{2}^{3} + C_{1}^{2} + C_{0}^{1}$$

Resolución: Dando uso a la propiedad del complemento, nuestra expresión se puede reescribir de la manera siguiente manera:

$$E = C_{1}^{200} + C_{1}^{199} + C_{1}^{198} + \ldots\ldots + C_{1}^{3} + C_{1}^{2} + C_{0}^{1}$$

$$E = 200 + 199 + 198 + \ldots\ldots + 2 + 1 = \frac{200.201}{2}$$

$$\therefore E = 20100$$

PROBLEMA 24 En la expansión de $(1 + x)^{43}$ los coeficientes de los términos de lugares $2r + 1$ y $r+2$ son iguales. Determine "$r^2 - 1$", sabiendo que: $r > 2$.

Resolución: Por fórmula se tendrá

$$T_{2r+1} = C_{2r}^{43} X^{2r}$$

$$T_{r+2} = C_{r+1}^{43} X^{r+1}$$

twitter.com/calapenshko

Por condición tenemos:

$$C_{2r}^{43} = C_{r+1}^{43}$$

De donde se plantea:

$$2r + r + 1 = 43 \vee 2r = r + 1$$

$$3r = 42 \vee r = 1$$

$$r = 14 \vee r = 1$$

Como $r > 2$, finalmente:

$$r = 14$$

$$\therefore r^2 - 1 = 195$$

PROBLEMA 25 Si en el desarrollo de $(ax^a + bx^b)^n$ los términos de lugares $a + 3$ y $b - 1$ equidistan de los extremos; además la suma de todos los coeficientes es 27. Determine la suma de todos los exponentes de la variable x.

team CALAPENSHKO

Resolución: Por fórmula de suma de coeficientes:

$$(a+b)^n = 27 \quad \text{.....(1)}$$

Por fórmula de términos equidistantes:

$$(a+3)+(b-1) = n+2$$

$$a+b = n \text{ .....(2)}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$n^n = 27 = 3^3$$

$$n = 3$$

Por fórmula de suma de exponentes:

$$\Sigma_{exp} = \frac{(a+b)(n)(n+1)}{2}$$

$$\Sigma_{exp} = \frac{(3)(3)(4)}{2}$$

$$\therefore \Sigma_{exp} = 18$$

PROBLEMA 26 En el desarrollo de $(x^4 + y^5)^{3n}$ los términos de lugares $(n+6)$ y $(n+8)$ equidistan de los extremos. ¿Cuál es el exponente de "x" en el término central del desarrollo?

Resolución: Por fórmula de términos equidistantes:

$$(n+6)+(n+8) = 3n+2$$

$$2n+14 = 3n+2$$

$$12 = n$$

Ahora con valor $n = 12$, la potencia será:

$$(x^4 + y^5)^{36}$$

Según la teoría $LTC = \frac{36+2}{2} = 19$, ahora:

$$T_{19} = C_{18}^{36}(x^4)^{18}(y^5)^{18}$$

$$T_{19} = C_{18}^{36}x^{72}y^{90}$$

$$\therefore \text{Exponente de } x = 72$$

PROBLEMA 27 Determine el coeficiente del término cuya parte literal es x^6 en el desarrollo de $(x^2-2x+1)^5$.

Resolución: La potencia dada es:

$$\left[(x-1)^2\right]^5 = (x-1)^{10}$$

Por fórmula tenemos:

$$T_{k+1} = C_k^{10}\, x^{10-k}(-1)^k$$

$$\text{Coef.} = (-1)^k.C_k^{10}$$

Por condición se plantea:

$$10-k=6 \leftrightarrow k=4$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Coef.} = (-1)^4.C_4^{10}$$

$$\text{Coef.} = (1).\frac{10.\,9.\,8.\,7}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$\therefore\ \text{Coef.} = 210$$

PROBLEMA 28 Determine el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^4$$

Resolución: De acuerdo con la fórmula de Leibnitz tenemos:

$$(x+1+x^{-1})^4 = \sum \binom{4}{\alpha_1;\,\alpha_2;\,\alpha_3} x^{\alpha_1}.(1)^{\alpha_2}.(x^{-1})^{\alpha_3}$$

$$(x+1+x^{-1})^4 = \sum \binom{4}{\alpha_1;\,\alpha_2;\,\alpha_3} x^{\alpha_1-\alpha_3}$$

Por propiedad y condición se plantea:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4 \ \wedge\ \alpha_1-\alpha_3=0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \wedge \alpha_1 = \alpha_3$$

↓	↓	↓	↓	↓
0	4	0	0	0
1	2	1	1	1
2	0	2	2	2

Finalmente el TI viene dado por

$$\text{Coef} = \binom{4}{0;4;0} + \binom{4}{1;2;1} + \binom{4}{2;0;2}$$

$$\text{Coef} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 0 . \lfloor 4 . \lfloor 0} + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 1 . \lfloor 2 . \lfloor 1} + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 . \lfloor 0 . \lfloor 2}$$

$$\text{Coef} = 1 + 12 + 6 = 19$$

$$\therefore \text{ TI de } x = 19$$

PROBLEMA 29 Determine el lugar del término máximo en el desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^{100} \quad \text{para } x = \frac{3}{2}$$

Resolución: La potencia dada se puede reescribir de la manera siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} . (1+x)^{100} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^{100}$$

Observa que todos los términos del desarrollo de $(1+x)^{100}$ estarán multiplicados por $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, luego bastará trabajar con $(1 + x)^{100}$

Por teoría debemos plantear

$$T_{k+1} > T_k$$

$$C_k^{100} x^k > C_{k-1}^{100} x^{k-1}$$

$$\frac{\lfloor 100}{\lfloor 100-k . \lfloor k} . x^k > \frac{\lfloor 100}{\lfloor 101-k . \lfloor k-1} . \frac{x^k}{x}$$

Simplificando conseguimos:

$$\frac{101-k}{k} > \frac{1}{x}$$

R eemplazando el valor $x = \frac{3}{2}$:

$$\frac{101-k}{k} > \frac{2}{3} \leftrightarrow 303 - 3k > 2k$$

$$303 > 5k \quad \leftrightarrow 5k < 303$$

$$k < 60{,}6 \quad \rightarrow k_{máx} = 60$$

$\therefore$ Lugar del término máximo = 61

PROBLEMA 30 Determine el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(1 + 2x - x^2)^5$.

Resolución: Por Leibnitz podemos plantear:

$$(1+2x-x^2)^5 = \sum \binom{5}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3} (1)^{\alpha_1}.(2x)^{\alpha_2}.(-x^2)^{\alpha_3}$$

$$(1+2x-x^2)^5 = \sum \binom{5}{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3} . 2^{\alpha_2}.(-1)^{\alpha_3} x^{\alpha_2+2\alpha_3}$$

Por propiedad y condición:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 \ \wedge \ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 6$$

↓	↓	↓		↓	↓
2	0	3		0	3
1	2	2		2	2
0	4	1		4	1

Finalmente tenemos:

$$\text{Coef} = -\binom{5}{2;0;3} + 4\binom{5}{1;2;2} - 16\binom{5}{0;4;1}$$

$$\text{Coef} = -\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2.\lfloor 0.\lfloor 3} + \frac{4.\lfloor 5}{\lfloor 1.\lfloor 2.\lfloor 2} - \frac{16.\lfloor 5}{\lfloor 0.\lfloor 4.\lfloor 1}$$

$$\text{Coef} = (-10) + 120 + (-80)$$

$\therefore$ Coef = 30

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular: a + b. Si:

$$\frac{(120!+1)! - ((5!)!)!}{(120!-1)!} <> ((a!)!)^b$$

A) 5 B) 3 C) 7
D) 8 E) 4

2. Si:

$$\frac{n!}{y!} = \frac{x!(n-x)!}{z!(y-z)!}$$

un valor de: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ es:

A) 1,2 B) 2,6 C) 3,5
D) 4,2 E) 4,5

3. Calcular "n" si:

$$\frac{C_2^n \cdot C_4^{n-2}}{C_3^{n-1}} = \frac{n}{4}$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

4. Calcular: n + k
Si:

$$\begin{cases} 7C_{2k}^{22} = 11C_{2k-1}^{21} & \text{..... (1)} \\ 3C_3^{4n} = 28C_2^{2n} & \text{..... (2)} \end{cases}$$

A) 10 B) 1 C) 5
D) 9 E) 7

5. Calcular "x" en:

$$\frac{16C_{x-4}^{x} C_{x-17}^{x-9}}{165C_{x-5}^{x-3} C_{11}^{x-7}} = \frac{7C_3^x}{(x-17)C_3^{x-6}}$$

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

6. Si la suma de los coeficientes del desarrollo de:

$$(7x^2 - 3y^3)^{4^{n+10}}$$

es igual a la suma de los coeficientes de la expansión de:

$$(3z^2 - w^3)^{8^n}$$

Calcular el número de términos de la expansión de la siguiente potencia:

$$(x^5 + 2y^3)^n$$

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

7. Si: $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+$. Calcular GR(y) del término independiente de "x" en el desarrollo de:

$$P(x;y) \equiv \left(x^m - \frac{\sqrt[m]{y}}{x^n}\right)^{m+n}$$

A) 7 B) 2 C) 5
D) 1 E) 4

8. Determine el coeficiente del término cuya parte literal es x^5 en el desarrollo de:

$$P(x) \equiv \left(\frac{x^3}{\sqrt[7]{13}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3x^2}}\right)^{15}$$

A) 25 B) 75 C) 55
D) 45 E) 65

9. Calcular "n" sabiendo que el séptimo término de la expansión de:

$$\left(a^n b^5 + \frac{c}{b^2}\right)^9$$

presenta a "c" con un exponente que es la media proporcional entre los exponentes de "a" y "b".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Si el décimo término del desarrollo de:

$$P(x) \equiv (x^a + x^b)^c$$

es x^{18}. Calcular el valor de "a" si la suma de los grados absolutos de todos los términos de la expansión es 360.

A) 11 B) 9 C) 10
D) 6 E) 12

11. ¿Cuántos términos posee el desarrollo de:

$$(x^3 + x^{-n})^n \ ?$$

sabiendo que dos términos consecutivos tienen como parte literal a "x^{11}" y "x" respectivamente.

A) 10 B) 2 C) 8
D) 9 E) 6

12. Reducir:

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(m+k)!}{k!}$$

A) $\dfrac{(m+k)!}{m.(k-1)!}$ B) $\dfrac{(m+k+1)!}{(m+1).k!}$

C) $\dfrac{(m-k)!}{k.(m+1)!}$

D) $\dfrac{(k+1).m!}{(m+k)!}$ E) $\dfrac{m!.(k+1)!}{m+k}$

13. Simplificar:

$$\sqrt[3]{\frac{1+7C_1^n+12C_2^n+6C_3^n}{C_1^n+6C_2^n+6C_3^n}}$$

A) $\dfrac{n}{n-1}$ B) $\dfrac{n+1}{n-1}$ C) $\dfrac{n+1}{n}$

D) $\dfrac{n-1}{n}$ E) $\dfrac{1}{n}$

14. Determinar la suma de los valores de "n" en:

$$P(x) \equiv (x^3 - x^{-5})^n$$

para los cuales el desarrollo admite solamente 8 términos racionales enteros.

A) 40 B) 60 C) 10
D) 30 E) 20

15. Indicar el lugar que ocupa el término máximo en el desarrollo de la potencia:

$$P(x) \equiv (5 + 3x)^{16}$$

cuando $x = \dfrac{1}{3}$.

A) Séptimo
B) Cuarto
C) Noveno
D) Tercero
E) Sexto

16. Determinar el coeficiente de aquel término del desarrollo de:

$$P(x;y;z) \equiv \left(2x^3 - \frac{y^4z^2}{4}\right)^{12}$$

en el cual los exponentes de x; y; z (en ese orden) forman una progresión aritmética.

A) 495 B) 201 C) 354
D) 520 E) 301

17. En el desarrollo de:

$$P(x) \equiv (2 + 3x^2)^n$$

el coeficiente de x^{24} es el cuádruplo del coeficiente de x^{22}. Indicar el número de términos del desarrollo de la potencia.

A) 20 B) 31 C) 17
D) 44 E) 38

team CALAPENSHKO

18. El coeficiente de x^n en el desarrollo de:

$$(1-x)^{3n}$$

es de la forma: $\frac{(an)!}{(bn)!(cn)!}$ si "n" es par.

Calcular: a + b + c.

A) 8 B) 2 C) 5
D) 10 E) 6

19. Si: A, B y C son los coeficientes de tres términos consecutivos del desarrollo de $(a + b)^n$, los cuales verifican:

$$A + 2B + C = C_{10}^{40}$$

¿Cuántos términos tiene la expansión de la potencial mostrada?

A) 39 B) 34 C) 40
D) 44 E) 35

20. Calcular el valor de "a" en la potencia:

$$P(x;y) = \left(\sqrt[a]{x} + y^{2-a}\right)^n$$

sabiendo que dos términos consecutivos del desarrollo son de igual grado.

A) 4 B) 0 C) 3
D) 1 E) 2

21. En la expansión de:

$$P(x) = \left(\sqrt[9(m-n)]{x^{2(m+n)}} + \sqrt[2(m+n)]{x^{m-n}}\right)^{36n}$$

el término cuyo coeficiente es: $2C_{18n-1}^{36n-1}$ presenta a "x" elevado al exponente 12n.

Calcular: $\frac{m}{n}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Calcular el valor de "k" en el desarrollo de:

$$(1+\sqrt{3})^{100}$$

de manera que el término genérico t_{k+1} sea al mismo tiempo mayor que los términos anteriores y posteriores.

A) 96 B) 84 C) 72
D) 64 E) 51

23. Determine el coeficiente máximo del desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$$

A) $\frac{40}{9}\left(\frac{2}{7}\right)^7$ B) $\frac{42}{5}\left(\frac{3}{7}\right)^5$ C) $\frac{20}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^7$

D) $\frac{22}{5}\left(\frac{7}{4}\right)^6$ E) $\frac{44}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^7$

24. Indicar la suma de los términos máximos del desarrollo de:

$$(a+b)^n$$

para: $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{2}$; $n = 6$.

A) $\frac{40}{27}$ B) $\frac{32}{21}$ C) $\frac{18}{25}$
D) $\frac{50}{19}$ E) $\frac{21}{32}$

25. Mostrar el equivalente de:

$$\left[n \cdot C_n^{n+1} \cdot C_{n+1}^{n+2} \cdot C_{n+2}^{n+3} \cdot \cdots \cdot C_{2n-1}^{2n}\right] \cdot \lfloor n-1 \rfloor$$

A) $\lfloor n$ B) $\lfloor n-1$ C) $\lfloor 2n-1$
D) $\lfloor 2n$ E) $\lfloor 2n+1$

26. Reducir:

$$\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{3}+\ldots+\binom{2n}{n+1}$$

A) $\binom{2n}{n}$ B) $\binom{2n-1}{n-1}+1$

C) $\binom{2n-1}{n}$

D) $\binom{2n+1}{n+1}-1$ E) $\binom{2n+1}{n-1}+1$

27. En la expansión de $(1 - 2xy^2 + x^4)^8$. Determine el coeficiente cuya parte literal es $x^{22}y^4$

A) 672 B) 512 C) 32
D) 384 E) 482

28. Si el desarrollo de $(1 + x + x^2)^3$ es:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m.$$

Calcular: $a_2 + a_5$

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

29. Determine el coeficiente de x^{23} en la expansión de $(1-2x+3x^2-x^4+x^5)^5$

A) 10 B) -10 C) 1
D) -1 E) 5

30. Determine el número de términos que se deben considerar en el desarrollo de $(1 - x)^{-2}$ de modo que la suma de sus coeficientes sea 820.

A) 41 B) 39 C) 38
D) 42 E) 40

31. Simplificar:

$$\frac{1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{n-1}}{C_1^n+C_2^nx+C_3^nx^2+C_4^nx^3+\ldots+C_n^nx^{n-1}}$$

A) 1 B) $\frac{x}{x+1}$ C) x
D) $\frac{x-1}{x}$ E) -1

32. Reducir:

$$C_0^mC_{100}^m+C_1^mC_{99}^{m-1}+C_2^mC_{98}^{m-2}+\ldots$$

....(101términos)

$\forall\, m > 100; m \in \mathbb{Z}^+$

A) $4^{100}C_{100}^{m-1}$ B) $2^{100}C_{100}^m$
C) $2^{101}C_{102}^{m+1}$
D) $4^{102}C_{102}^{m+1}$ E) $2^{99}C_{99}^m$

33. ¿Cuántos términos fraccionarios tiene la expansión de:

$$P(x) \equiv \left(x^6 - 4x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^{50} ?$$

A) 11 B) 2 C) 30
D) 17 E) 10

34. Si: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = (a+b)^n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Calcular: $2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

A) $2^{n+1}-n^2+n-2$
B) $2^{n+1}+n^2+n-2$
C) $2^{n-1}-n^2+n+2$
D) $2^{n+1}-n^2-n-2$
E) $2^{n+1}-n^2-n+2$

team CALAPENSHKO

35. Calcular: $(n+1)(n+2)\,S$

siendo:

$$S=\frac{C_0^n}{2}+\frac{C_1^n}{3}+\frac{C_2^n}{4}+\frac{C_3^n}{5}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+2}$$

A) $n\cdot 2^n-1$ B) $n\cdot 2^{n-1}$

C) $n\cdot 2^n+1$

D) $n\cdot 2^{n-1}-1$ E) $n\cdot 2^{n+1}+1$

36. El mínimo entero "m", tal que:

$$(xy-7x+9y-63)^m$$

tenga al menos 1 998 términos es:

A) 40 B) 41 C) 42

D) 43 E) 44

37. Si: $n\in\mathbb{Z}^+$, calcular:

$$\binom{n}{1}x(1-x)^{n-1}+2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots+k\binom{n}{k}x^x(1-x)^{n-k}+\ldots+n\binom{n}{n}x^n$$

A) $n+x$ B) n C) x

D) nx E) $n-x$

38. El desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$, posee 14 términos más que el desarrollo de $(a+b+c+d)^{n+1}$, calcular: C_{n-1}^{n+1}

A) 6 B) 10 C) 15

D) 21 E) 28

39. ¿Cuántos términos irracionales presenta el desarrollo de:

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{48}?$$

A) 44 B) 32 C) 34

D) 42 E) 26

40. En el desarrollo de:

$$(x^2+y-x)^8$$

determinar los coeficientes de los términos de la forma:

$$x^{10}y^m$$

donde "m" es par no nula

A) 28; 56 B) 420 C) -420

D) 1 E) 6

41. Indicar el coeficiente: x^{16} en la expansión de:

$$(1-3x+5x^2+x^4+x^5)^5$$

A) 1 230 B) 1 225 C) 1 200

D) 1 115 E) 1 125

42. Determinar el coeficiente de x^{100} en:

$$\frac{4-3x^2}{(1-x)^3}$$

A) 3 450 B) 5 754 C) $-4\,318$

D) 5 600 E) $-5\,724$

43. Reducir:

$$C_n^n+C_n^{n+1}+C_n^{n+2}+\ldots+C_n^{n+k}$$

A) C_n^{n+k} B) C_{n-1}^{n-k+1} C) C_k^n

D) C_{n+1}^{n+k+1} E) C_{k+1}^{n-k}

team CALAPENSHKO

44. Reducir:

$$C_0^n+\frac{C_1^n}{2}+\frac{C_2^n}{3}+\frac{C_3^n}{4}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}$$

A) $\frac{3^{n+1}-1}{n-1}$ B) $\frac{2^{n-1}+1}{n+1}$ C) $\frac{3^n+1}{n-1}$

D) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ E) $\frac{6^n+1}{n+1}$

45. Mostrar el equivalente de:

$$C_0^n+2C_1^n+3C_2^n+4C_3^n+\ldots+(n+1)C_n^n$$

A) $n.2^{n+1}$ B) $(n+2)2^{n-1}$

C) $(n-1).2^n$

D) $(n+1).2^{n-1}$ E) $n\,.\,2^n$

46. Efectuar:

$$2C_0^n+\frac{2^2C_1^n}{2}+\frac{2^3C_2^n}{3}+\ldots+\frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}$$

A) $\frac{2^{n-1}-1}{n+1}$ B) $\frac{3^{n1+}-1}{n+1}$ C) $\frac{4^n-1}{n+1}$

D) $\frac{5^{n+1}-1}{n-1}$ E) $\frac{6^{n-1}+1}{n-1}$

47. Reducir:

$$\underbrace{2C_1^n+8C_2^n+24C_3^n+64C_4^n+\ldots\ldots}_{\text{"n" veces}}$$

A) $\left(\frac{3n}{2}\right).2^n$ B) $\left(\frac{4n}{3}\right).2^n$ C) $\left(\frac{9n}{2}\right).3^n$

D) $\left(\frac{9n}{4}\right).6^n$ E) $\left(\frac{2n}{3}\right).3^n$

48. Reducir:

$$C_0^n-2C_1^n+3C_2^n-4C_3^n+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n(n+1)C_n^n$$

A) -1 B) o C) 1

D) $-n$ E) n

49 Determine el coeficiente del término de lugar $(k+1)$ en el desarrollo de $(1+x)^{0,5}$

A) $2^{-k}C_k^{2k}$ B) $(-1)^kC_k^{2k}$

C) $(-1)^{k-1}4^{-k}C_k^{2k}$

D) $2^{-k}C_k^{4k}$ E) C_k^{4k}

50. Reducir:

$$C_1^n-\frac{1}{3}C_3^n+\frac{1}{3^2}C_5^n-\ldots\ldots-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}C_{n-1}^n$$

A) $\left(\frac{4}{3}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^n sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

C) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

D) $\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

E) $\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

team CALAPENSHKO

Capítulo 9

Análisis Combinatorio Cálculo de Probabilidades

CAPACIDADES:

- Construir grupos de elementos según ley de formación u ordenación.
- Reconocer permutaciones, variaciones y combinaciones como grupos distinguibles.
- Determinar probabilidades de los eventos en espacios finitos.

$$C_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k \ \lfloor k}$$

BLAISE PASCAL

La combinatoria surgió en el siglo XVI en la vida de las capas privilegiadas de la sociedad de entonces, ocupaban un gran lugar los juegos de azar. Jugando a las cartas y a los dados se ganaban y se perdían oro y brillantes, palacios y estancias, caballos de raza y adornos costosos. Estaban los problemas combinatorios ligados fundamentalmente sobre los juegos de azar, tratando de averiguar de cuantas maneras se pueden obtener un número dado de tantos al arrojar dos o tres dados o de cuántas formas se puede obtener dos reyes en un juego de cartas. Estos y otros problemas de los juegos de azar fueron la fuerza motriz del progreso de la combinatoria.

El estudio teórico de los problemas combinatorios fue abordado en el siglo XVII por los científicos franceses PASCAL y FERMAT. El punto de partida de sus investigaciones también lo constituyeron problemas de los juegos de azar.

Un papel particularmente grande lo jugó aquí el problema sobre la división de la apuesta que fue propuesto a Pascal por su amigo, el caballero de Meré, un jugador apasionado. El problema consistía en lo siguiente: el "campeonato" de cara y cruz continuaría hasta que se ganasen seis partidos, pero se interrumpiría cuando un jugador ganase los cinco partidos y el otro cuatro, ¿cómo dividir la apuesta? Era evidente que la división en la razón 5: 4 no era justa aplicando los métodos de la combinatoria, Pascal resolvió el problema para el caso general cuando a un jugador le quedan "r" partidos hasta que gane y el otro "s".

team CALAPENSHKO

ANÁLISIS COMBINATORIO

DEFINICIÓN

Es aquella parte del álgebra analítica que se encarga del estudio de las distintas agrupaciones que se pueden realizar con una cantidad limitada de elementos, estas agrupaciones obedecen cierta ley de formación u ordenación.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

1. DE LA ADICIÓN

Este principio manifiesta que si un evento puede realizarse de "m" maneras y otro evento puede realizarse de "n" maneras, entonces el primero, el segundo o ambos (al menos uno) podrán realizarse de "m + n" maneras.

El principio anterior se aplica siempre y cuando los eventos no ocurran simultáneamente.

2. DE LA MULTIPLICACIÓN

Este principio manifiesta que si un evento puede realizarse de "m" maneras y otro evento distinto puede realizarse de "n" maneras, entonces ambos eventos se podrán realizarse de "m . n" maneras.

El principio anterior se aplica siempre y cuando los eventos ocurran en forma simultánea o dado la ocurrencia de uno inmediatamente ocurre el otro.

Ejemplo: Juan Carlos desea comprar una prenda de vestir pero esta indeciso, pues la vendedora le acaba de mostrar 3 camisas (diferentes) y 2 pantalones (diferentes) ¿De cuántas maneras diferentes podrá realizar su compra?

Resolución: De acuerdo con el enunciado podemos reconocer dos eventos, veamos:

1° Comprar 1 camisa de un total de 3: N° de maneras = 3

2° Comprar 1 pantalón de un total de 2: N° de maneras = 2

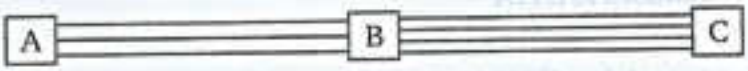
Observar que 1° y 2° no pueden ocurrir a la vez (pues sólo se debe comprar una prenda) luego por el principio fundamental de la adición tenemos:

$$\therefore \text{ N° de maneras totales} = 3 + 2 = 5$$

Ejemplo: Judith desea viajar de la ciudad A hasta la ciudad C pasando por la ciudad B, si de A hacia B conducen 3 caminos diferentes y de B a C conducen 4 caminos diferentes ¿De cuántas maneras diferentes podrá realizar su viaje?

team CALAPENSHKO

Resolución: Ilustrando el enunciado podemos reconocer dos eventos, veamos:



1° Viajar de A hasta B: N° de maneras = 3
2° Viajar de B hasta C: N° de maneras = 4

Observar que 1° y 2° son sucesivos (uno se da inmediatamente del otro) luego por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$\therefore \text{ N° de maneras totales} = 3 \cdot 4 = 12$$

LAS PERMUTACIONES

Son agrupaciones donde intervienen todos los elementos dados, aquí un grupo se considera distinto de otro si al menos un par de sus elementos cambian de posición (interesa el orden).

Las permutaciones de los elementos a, b y c son: abc, acb, bac, bca, cab y cba.

La permutación de "n" elementos se denota así P_n y se calcula según la fórmula:

$$P_n = \lfloor n$$

La cantidad de permutaciones de los elementos a, b y c será:

$$P_3 = \lfloor 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

OBSERVACIÓN:
A la definición dada anteriormente se le denomina permutación lineal.

1. PERMUTACIÓN CIRCULAR

Dados "n" objetos que se van a agrupar de "n" en "n" en el entorno de un círculo, la permutación circular de los "n" objetos se denota así P'_n y se calcula según la fórmula:

$$P'_n = \lfloor n-1$$

2. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Dados "n" elementos entre los cuales uno se repite α_1 veces, otro se repite α_2 veces y así sucesivamente hasta que el último se repite α_k veces. La cantidad de permutaciones de los "n" elementos se denota así: $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ y se calcula según la fórmula:

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \alpha_1 \cdot \lfloor \alpha_2 \cdots \cdots \lfloor \alpha_k}$$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Determinar el número de permutaciones que se pueden obtener con las letras de la palabra KATITA

Resolución: La palabra KATITA tiene 6 letras, luego n = 6.

Además la letra A se repite 2 veces, al igual que la letra T.

$$P_6^{2,2} = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \ \lfloor 2} = \frac{720}{4} = 180$$

LAS VARIACIONES

Son agrupaciones donde intervienen parte de los elementos dados, aquí un grupo se considera distinto de otro si al menos un par de elementos cambian de posición (interesa el orden).

Las variaciones binarias de los elementos a, b y c son: ab, ac, bc, ba, ca y cb.

La variación de "n" elementos tomados de "k" en "k" (k < n) se denota así V_k^n y se calcula según la formula:

$$V_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k}$$

La cantidad de variaciones binarias de los elementos a, b y c será:

$$V_2^3 = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 3-2} = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 1} = \frac{6}{1} = 6$$

LAS COMBINACIONES

Son agrupaciones donde pueden intervenir todos o parte de los elementos dados, aquí un grupo se considera distinto de otro si por lo menos difieren en un elemento (No interesa el orden).

Las combinaciones binarias de los elementos a, b y c son: ab, ac y bc la combinación de "n" elementos tomados de "k" en "k" ($k \leq n$) se denota así C_k^n y se calcula según la fórmula:

$$C_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k \ \lfloor k}$$

La cantidad de combinaciones binarias de los elementos a, b y c será:

$$C_2^3 = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 3-2 \cdot \lfloor 2} = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 1 \cdot \lfloor 2} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3$$

team CALAPENSHKO

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIMENTO ALEATORIO (ε)

También llamado **dato estadístico**, es cualquier experimento u operación cuyo resultado no puede predecirse con exactitud antes de que se realice el mencionado experimento.

Ejemplo: A continuación tenemos un experimento aleatorio.

ε: Lanzar un dado y observar el resultado que aparece en su cara superior.

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto cuyos elementos llamados **puntos de muestra o sucesos**, son todos los resultados posibles que puede tener el experimento aleatorio.

Ejemplo: Para el experimento aleatorio dado anteriormente.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

EVENTO (A, B, C, ...)

Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Para el experimento aleatorio dado anteriormente:

A: Lanzar un dado y que el resultado obtenido sea un número par

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A = \{2; 4; 6\}$

Fácilmente podemos notar que $A \subset \Omega$.

OBSERVACIÓN

Considerando que: n (A) = Nº de elementos del conjunto A, podemos distinguir tres clases de eventos:

1. **Evento Seguro:** Siempre ocurre, aquí $A = \Omega$ y $n(A) = n(\Omega)$.
2. **Evento Posible:** Tiene opción de ocurrir, aquí $A \subset \Omega$ y $n(A) \leq n(\Omega)$.
3. **Evento Imposible:** Nunca ocurre, aquí $A = \varnothing$ y $n(A) = 0$.

ÁLGEBRA DE EVENTOS

Dos o más eventos se pueden componer por las distintas operaciones existentes entre conjuntos y así dar origen a nuevos eventos:

1. **$A \cup B$:** Es el evento que ocurre si ocurre A, B o ambos, es decir al menos uno.
2. **$A \cap B$:** Es el evento que ocurre si A y B ocurren en forma simultánea.
3. **$A' = \overline{A} = A^C$:** Es el evento que ocurre si y sólo si el evento A no ocurre.

OBSERVACIÓN

Para la resolución de algunos problemas será necesario recordar algunas de las leyes de DE MORGAN, veamos:

1. $(A \cup B)' = A' \cap B' = \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $(A \cap B)' = A' \cup B' = \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES (E. M. E.)

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir a la vez (son disjuntos).
Simbólicamente tenemos: $A \cap B = \varnothing$.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

La probabilidad de que un evento A ocurra, P(A), se define como la razón entre el número de elementos de A, n(A), y el número de elementos de su espacio muestral, $n(\Omega)$, esto es:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

O también: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables al evento A}}{\text{Número total de casos posibles}}$

Ejemplo: Determine la probabilidad de que al lanzar un dado, el resultado obtenido sea un número primo.

Resolución: A: Lanzar un dado y obtener como resultado un número primo.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6.$

$A = \{2; 3; 5\} \rightarrow n(A) = 3.$

Por definición: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} \quad \therefore P(A) = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo: Si se lanzan dos monedas de diferente tamaño, ¿cuál es la probabilidad de obtener como resultado al menos una cara?

Resolución: Siendo C = cara, S = sello; tenemos que:

P(A) = Probabilidad de obtener al menos una cara en el lanzamiento de dos monedas.

$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$ $A = \{CC, CS, SC\}$

"Al menos una cara", indica que el resultado muestre una o dos caras, tal y como se observa en el evento.

Por definición: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{4} \quad \therefore P(A) = 0{,}75$

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

1. Para todo evento A: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Si $A = \Omega$, tenemos: $P(\Omega) = 1$

TEOREMAS DE PROBABILIDAD

1. A' evento contrario de A: $P(A') = 1 - P(A)$.
2. A y B eventos cualesquiera: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROPIEDADES DE PROBABILIDAD

1. Si A y B son E. M. E: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. Dado un espacio finito de probabilidad:
$\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$, se cumple que: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) = 1$.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea "B" un evento cualesquiera de un espacio muestral. La probabilidad de que un evento "A" ocurra una vez que el evento "B" haya ocurrido se obtiene según la relación:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) \neq 0$$

Donde P(A/B) es la probabilidad de ocurrencia del evento A dado la ocurrencia de B.

OBSERVACIÓN

Si "A" y "B" son eventos de modo que la ocurrencia de uno de ellos no cambia la probabilidad de la ocurrencia del otro, se dice que ellos son **Eventos Independientes** y verifican:

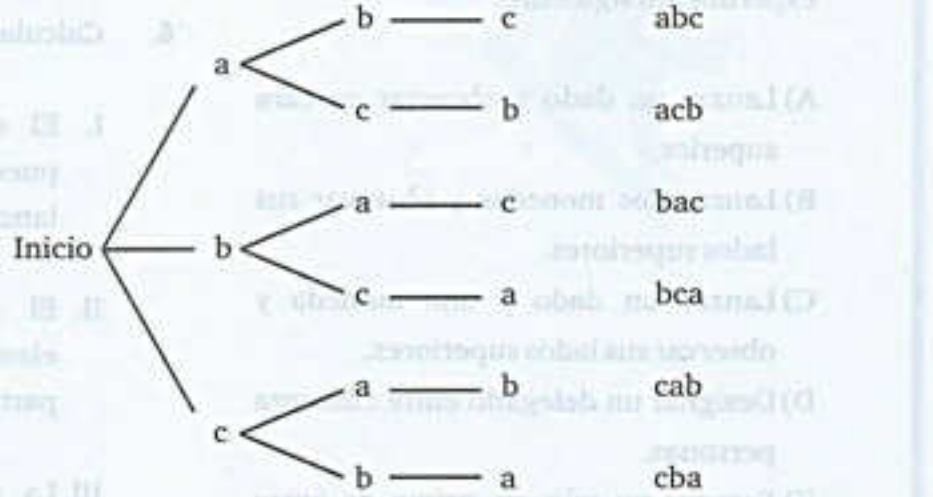
$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

DIAGRAMA DEL ÁRBOL

Es un recurso que se emplea para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de eventos, donde cada evento puede ocurrir de un número infinito de maneras.

Ejemplo: Construir el espacio muestral para el siguiente experimento aleatorio "se extraen tres bolas a, b y c de una urna".

Resolución: Dando uso del diagrama del árbol tenemos:



$\Rightarrow \Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

Observa que el árbol se construye de izquierda a derecha y que el número de ramas, en cada punto corresponde al número de maneras en que puede ocurrir el siguiente suceso.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Reducir cada uno de los siguientes casos:

   A) $\underline{|7} - \underline{|6} + \underline{|5}$

   B) $V_2^5 + V_1^4 + V_3^7$

   C) $C_2^5 + C_3^5 + C_4^5$

   D) $V_2^7 + P_5 + P_4^1$

   E) $P_4 - V_2^5 + C_3^4$

2. Calcular x en cada caso:

   A) $C_2^x = 21$

   B) $P_x = 24$

   C) $V_3^x = 60$

   D) $\underline{|x-1} = 1$

   E) $2P_x^1 = P_x$

3. Determine el espacio muestral para cada experimento siguiente:

   A) Lanzar un dado y observar su cara superior.
   B) Lanzar dos monedas y observar sus lados superiores.
   C) Lanzar un dado y una moneda y observar sus lados superiores.
   D) Designar un delegado entre cuarenta personas.
   E) Escoger un número primo de entre los cincuenta primeros números enteros positivos.

4. Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda a cada afirmación:

   I. La probabilidad de un evento seguro es uno .....( )

   II. La probabilidad de un evento imposible es cero. ..... ( )

   III. La probabilidad de un evento posible es positivo, pero no mayor que la unidad. ..... ( )

5. Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda a cada afirmación:

   I. En la permutación interesa el orden de los elementos. .....( )

   II. En la variación no interesa el orden de los elementos. ..... ( )

   III. En la combinación no intervienen todos los elementos. ..... ( )

6. Calcular:

   I. El número de maneras en que puede caer tres dados si son lanzados simultáneamente.

   II. El número de grupos de tres elementos que se pueden formar a partir de 5 elementos diferentes.

   III. La probabilidad de escoger una carta de espadas del mazo de 52 cartas.

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Mario, dueño de un club nocturno debe contratar a una cantante o una bailarina, si a la prueba de selección se presentan 6 cantantes y 4 bailarinas. ¿De cuántas maneras diferentes podrá Mario contratar a la persona indicada?

Resolución: Del enunciado podemos distinguir lo siguiente:

1°) Contratar una cantante de un total de seis. $\Rightarrow$ N° de maneras = 6.

2°) Contratar una bailarina de un total de cuatro. $\Rightarrow$ N° de maneras = 4.

Tenga en cuenta que Mario sólo debe contratar a una persona, luego la ocurrencia de un evento impide la ocurrencia del otro. Por lo tanto según el principio fundamental de la adición tenemos:

$\therefore$ N° de maneras totales = 6 + 4 = 10

PROBLEMA 2 ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar tres varones y dos mujeres en una banca que dispone de cinco asientos, de modo que varones y mujeres queden alternados?

Resolución: Por condición varones (V) y mujeres (M) se ubican alternados, esto se puede visualizar en el siguiente esquema:

V_1	M_1	V_2	M_2	V_3

Ahora podemos distinguir dos eventos:

1°) Ubicar a los varones (Formar grupos de tres elementos de un total de tres elementos). $\Rightarrow$ N° de maneras = $P_3 = \underline{3} = 6$

2°) Ubicar a las mujeres (Formar grupos de dos elementos de un total de dos elementos). $\Rightarrow$ N° de maneras = $P_2 = \underline{2} = 2$

Finalmente por el principio fundamental de la multiplicación se tendrá:

$\therefore$ N° de maneras totales = 6 . 2 = 12

PROBLEMA 3 Con respecto al problema anterior. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar si las mujeres siempre deben sentarse una al lado de la otra?

Resolución: De acuerdo con el enunciado podemos realizar un posible esquema:

M_1	M_2	V_1	V_2	V_3

Siempre juntas

Consideremos a los elementos señalados como un único elemento, teniendo en cuenta que ellos pueden permutar entre sí, en consecuencia un esquema equivalente al anterior será:

Ahora hallemos el número de maneras diferentes en la que se puede distribuir estos cuatro elementos en los cuatro casilleros:

$$\Rightarrow \text{N° de maneras} = P_4 = \lfloor\underline{4} = 24$$

Debemos notar que por cada una de las 24 maneras, el elemento fijo $\square$ pueden permutar de dos maneras (M_1M_2 o M_2M_1) razón por la cuál el número de maneras totales estará dado por:

$$\therefore \text{ N° de maneras totales} = 24 \,.\, 2 = 48$$

PROBLEMA 4 ¿De cuántas maneras se pueden ubicar seis personas alrededor de una mesa redonda si dos de ellas no desean estar juntas?

Resolución:

Del enunciado podemos plantear los siguientes casos:

1°) Las seis personas sin ninguna restricción se pueden ubicar de:

$$\lfloor\underline{6-1} = \lfloor\underline{5} = 120 \text{ maneras.}$$

2°) Si dos de ellas estuvieran juntas, el número de maneras se obtiene considerando las cuatro personas y a las otras que están juntas como un solo elemento, lo cuál hacen 5 elementos siendo su número de permutaciones:

$$\lfloor\underline{5-1} = \lfloor\underline{4} = 24.$$

Tenga en cuenta que las personas que permanecen juntas pueden permutar entre sí, siendo el número de permutaciones: $\lfloor\underline{2} = 2$

Luego existen $24 \,.\, 2 = 48$ maneras de ubicar 6 personas alrededor de la mesa redonda de tal modo que dos personas siempre están juntas.

3°) De las 120 maneras, en 48 de ellas, las dos personas están juntas.

Luego en $120 - 48 = 72$ maneras las mencionadas personas no están juntas.

$$\therefore \text{ N° de maneras totales} = 72$$

PROBLEMA 5 ¿Cuántas comisiones integradas por un niño y una niña pueden formarse con cinco niños y ocho niñas, si cierto niño rehúsa trabajar con dos de las niñas?

Resolución:

Hallemos el número de comisiones X que se pueden formar sin importar de que cierto niño rehúse trabajar con dos niñas.

De cinco niños escogemos 1:

$$C_1^5 = 5$$

De ocho niñas escogemos 1:

team CALAPENSHKO

$$C_1^8 = 8$$

Por el principio fundamental de la multiplicación:

$$5.8 = 40$$

Teniendo en cuenta que entre las 40 comisiones están incluidas aquellas que están formadas por el niño que rehúsa trabajar con las dos niñas.

Ahora hallemos el número de comisiones que pueden formar un niño y dos niñas.

$$\text{Número de comisiones} = C_1^1 . C_1^2 = 2$$

Estas dos comisiones no deben considerarse, por condición del problema, luego el número de comisiones solicitadas será:

$$\therefore\ X = 40 - 2 = 38$$

PROBLEMA 6 De 5 libros de álgebra, 3 de geometría y 7 de trigonometría se debe escoger un libro de cada uno. La cantidad de maneras de efectuar tal elección es:

Resolución:

El enunciado describe 3 eventos, los cuales son:

1° Escoger 1 libro de Álgebra de un total de 5:

$$N^o \text{ de maneras} = 5$$

2° Escoger 1 libro de Geometría de un total de 3:

$$N^o \text{ de maneras} = 3$$

3° Escoger 1 libro de Trigonometría de un total de 7:

$$N^o \text{ de maneras} = 7$$

Finalmente por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$\therefore\ N^o \text{ de maneras totales} = 5 . 3 . 7 = 105$$

PROBLEMA 7 A la cima de una montaña conducen 10 caminos, el número de maneras que puede trepar un alpinista a la montaña y descender de ella con la condición de que el ascenso y el descenso tienen lugar por caminos diferentes es:

Resolución:

El enunciado describe dos eventos, los cuales son:

1° Ascenso: N^o de maneras = 10

2° Descenso: N^o de maneras = 9

OBSERVACIÓN

Como el alpinista al efectuar el ascenso utilizó uno de los diez caminos, en su descenso sólo pudo utilizar uno de los nueve caminos que no utilizó en su ascenso (por condición el alpinista no puede ascender y descender por el mismo camino).

Finalmente por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$\therefore\ N^o \text{ de maneras totales} = 10 . 9 = 90$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 8 ¿De cuántas formas diferentes se puede confeccionar una bandera de franjas de 3 colores si se tiene tela de cinco colores distintos?

Resolución: De acuerdo con el enunciado del problema podemos notar que estamos en presencia de un caso de variación; en consecuencia el número de formas diferentes en que se puede confeccionar la menciona bandera estará dada por la variación de 5 elementos tomados de 3 en 3, es decir:

$$\therefore \quad N^o \text{ de maneras totales} = V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

PROBLEMA 9 De un grupo de 6 matemáticos, 5 físicos y 4 químicos se quiere seleccionar un comité de 6 personas de tal modo que 3 sean matemáticos, 2 físicos y 1 químico ¿De cuántas maneras diferentes se podrá realizar esto?

Resolución: De acuerdo con el enunciado podemos distinguir 3 eventos, veamos

1°) Escoger 3 matemáticos de un total de 6:

$$N^o \text{ de maneras} = C_3^6 = 20$$

2°) Escoger 2 físicos de un total de 5:

$$N^o \text{ de maneras} = C_2^5 = 10$$

3°) Escoger 1 químico de un total de 4:

$$N^o \text{ de maneras} = C_1^4 = 4$$

Finalmente como el problema consiste en formar un comité de 6 personas aplicaremos el principio fundamental de la multiplicación:

$$\therefore \quad N^o \text{ de maneras totales} = 20 \cdot 10 \cdot 4 = 800$$

PROBLEMA 10 Vanessa tiene 9 pretendientes ¿De cuántas maneras podrá invitar a cuatro de ellos a su fiesta de cumpleaños, si ella sabe que dos de ellos por no llevarse bien no asisten juntos?

Resolución: De acuerdo con el enunciado Vanessa podrá establecer alternativas para realizar la invitación, veamos:

1°) Decide no invitar a ninguno de los dos que no se llevan bien:

$$N^o \text{ de maneras} = C_4^7 = 35$$

2°) Decide invitar a uno de los que no se llevan bien:

Total de personas = 9 $\begin{cases} 7 \text{ que si se llevan bien} \\ 2 \text{ que no se llevan bien} \end{cases}$

$$N^o \text{ de maneras} = C_1^2 \cdot C_3^7 = 2 \cdot 35 = 70$$

team CALAPENSHKO

Finalmente podemos apreciar que 1° y 2° son eventos que no pueden ocurrir simultáneamente por lo cual utilizaremos el principio fundamental de la adición.

$\therefore$ N° de maneras totales = 35 + 70 = 105

PROBLEMA 11 En una caja tenemos cinco fichas rojas y tres fichas blancas, si se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

Resolución: Sea P(A) la probabilidad solicitada, luego se tendrá:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \text{ donde :}$$

n(A) = Cantidad de maneras de extraer una ficha roja de un total de cinco:

$$\rightarrow n(A) = C_1^5 = 5$$

$n(\Omega)$ = Cantidad de maneras de extraer una ficha de un total de ocho.

$$\rightarrow n(\Omega) = C_1^8 = 8$$

Finalmente tenemos:

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

$$\therefore P(A) = 0{,}625$$

PROBLEMA 12 Un grupo de estudiantes esta conformado por once varones y siete mujeres. Si se escogen 4 estudiantes al azar ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean varones?

Resolución: Sea P(A) la probabilidad solicitada, luego se plantea:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \text{ donde :}$$

n(A) = Cantidad de maneras de escoger cuatro varones de un total de once:

$$\rightarrow n(A) = C_4^{11}$$

$n(\Omega)$ = Cantidad de maneras de escoger cuatro personas de un total de 18:

$$\rightarrow n(\Omega) = C_4^{18}$$

Finalmente tenemos:

$$P(A) = \frac{C_4^{11}}{C_4^{18}} = \frac{11.10.9.8}{18.17.16.15}$$

$$\therefore P(A) = \frac{11}{102}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 13 Se quiere seleccionar un cómite de 5 personas a partir de un grupo de siete peruanos, cuatro chilenos y tres argentinos ¿Cuál es la probabilidad de qué el cómite este conformado por dos peruanos, dos chilenos y 1 argentino?

Resolución: Sea $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ la probabilidad solicitada.

$n(A)$ = Cantidad de maneras de obtener un cómite de cinco personas conformado por dos peruanos, dos chilenos y un argentino.

C_2^7 = Cantidad de maneras de escoger 2 peruanos.

C_2^4 = Cantidad de maneras de escoger 2 chilenos.

C_1^3 = Cantidad de maneras de escoger 1 argentino.

$$\Rightarrow n(A) = C_2^7 . C_2^4 . C_1^3 = 21.6.3$$

$n(\Omega)$ = Cantidad de maneras de obtener un cómite de 5 personas de un total de 14.

$$\Rightarrow n(\Omega) = C_5^{14} = \frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5} = 14.13.11$$

Finalmente tenemos:

$$P(A) = \frac{21\,.\,6\,.\,3}{14\,.\,13\,.\,11}$$

$$\therefore P(A) = \frac{27}{143}$$

PROBLEMA 14 En una caja hay siete llaveros azules y tres llaveros rojos. Hallese la probabilidad de extraer un llavero rojo o azul.

Resolución: De acuerdo con el enunciado tenemos:

A: Evento de obtener un llavero azul.

B: Evento de obtener un llavero rojo.

Observar que $n(A) = 7$ y $n(B) = 3$, además A y B son eventos mutuamente excluyentes:

$A \cup B$: Evento de obtener un llavero azul o un llavero rojo, luego se plantea:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7+3}{10} = \frac{10}{10}$$

$$\therefore P(A \cup B) = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 15 En una caja tenemos cien foquitos entre los cuales existen diez defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de qué al extraer una muestra de tres foquitos, los tres sean defectuosos?

Resolución: De acuerdo al enunciado tenemos:

$$\text{Total de foquitos} = 100 = \begin{cases} 10 \text{ defectuosos} \\ 90 \text{ no defectuosos} \end{cases}$$

Se pide: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, donde:

$n(A)$ = Cantidad de maneras de extraer 3 foquitos defectuosos de un total de 10.

$$\rightarrow n(A) = C_3^{10}$$

$n(\Omega)$ = Cantidad de maneras de extraer 3 foquitos de un total de 100.

$$\rightarrow n(\Omega) = C_3^{100}$$

Finalmente tenemos:

$$P(A) = \frac{C_3^{10}}{C_3^{100}}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{2695}$$

PROBLEMA 16 Con respecto al problema anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra extraída al menos uno sea defectuoso?

Resolución: De acuerdo con la condición se plantea:

A: Evento de que en la muestra al menos uno sea defectuoso.

A': Evento de que en la muestra no existe foquito defectuoso.

P(A'): Probabilidad de extraer una muestra de tres foquitos no defectuosos.

Ahora tenemos:

$$P(A') = \frac{C_3^{90}}{C_3^{100}} = \frac{178}{245}$$

Por teorema:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Finalmente:

$$\frac{178}{245} = 1 - P(A)$$

$$\therefore P(A) = \frac{67}{245}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 17 Sean A y B eventos que no son mutuamente excluyentes tal que: $P(A) = 0{,}20; P(B) = 0{,}30; P(A \cap B) = 0{,}10$. Calcular: $P(A' \cap B')$

Resolución: Observar que:

$$P(A' \cap B') = P(\overline{A \cup B}).$$

Por teorema:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

En (II) tenemos:

$$P(A \cup B) = 0{,}20 + 0{,}30 - 0{,}10$$

$$P(A \cup B) = 0{,}40$$

Finalmente en (I):

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}40$$

$$\therefore \quad P(A' \cap B') = 0{,}60$$

PROBLEMA 18 Si se lanzan dos dados y la suma obtenida de la puntuación de sus caras superiores es 6. Calcular la probabilidad de que en uno de los dados se haya obtenido por puntuación dos.

Resolución: De acuerdo con el enunciado estamos frente a una probabilidad condicional, luego planteamos:

$$B: \text{Obtener suma } 6 = \{(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1)\}$$

$$\Rightarrow n(B) = 5$$

A: Puntuación dos aparece en uno de los dados $= \{(2;4), (4;2)\}$

Observa que:

$$A \cap B = \{(2;4), (4;2)\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

Además podemos notar que el número de elementos del espacio muestral asociado a los eventos en mención es igual al número de maneras en que pueden caer los dados; es decir: $6 \cdot 6 = 36$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}$$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{2}{5}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 19 Una moneda no legal (cargada) es lanzada si se sabe que la probabilidad de que salga cara (C) es el triple de la probabilidad de que salga sello (S). Determine la probabilidad de cada evento mencionado.

Resolución: Sea $P(S) = p$, como la probabilidad de que salga cara es el triple de que salga sello, tenemos: $P(C) = 3p$.

Ahora por propiedad:

$$P(S) + P(C) = 1 \leftrightarrow 4p = 1$$

$$p = \frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$\therefore P(S) = \frac{1}{4} \text{ y } P(C) = \frac{3}{4}$$

PROBLEMA 20 Un experto tirador al plato da en el blanco en el 90% de los casos; y otro en iguales condiciones, en el 80% de los casos. Cada uno dispara una vez al objetivo. ¿Cuál es la probabilidad que ambos alcancen el blanco?

Resolución: Del enunciado se distinguen dos eventos, los cuáles son:

A: El primer tirador da en el blanco.

B: El segundo tirador da en el blanco.

Ahora tenemos:

$$P(A) = 90\% = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

$$P(B) = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$$

Se pide:

$P(A \cap B)$ = Probabilidad de que ambos alcancen el blanco.

Por la naturaleza del experimento establecemos que A y B son eventos independientes, luego:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{9}{10}.\frac{8}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{72}{100} = 0{,}72$$

$$\therefore P(A \cap B) = 72\%$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21 En un congreso de estudiantes de ingeniería se está realizando un taller en una sala de exposiciones, donde participan diez estudiantes, los cuales deben agruparse en tres grupos: dos de tres personas y el último de cuatro. ¿De cuántas formas se pueden agrupar los diez estudiantes?

Resolución:

Para el primer grupo:

$$C_3^{10} = 120$$

Para el segundo grupo:

$$C_3^{7} = 35$$

Para el tercer grupo:

$$C_4^{4} = 1$$

Por el principio fundamental de la multiplicación, si "n" es el número de formas en que se pueden agrupar los diez estudiantes, tenemos:

$$n = 120 \,.\, 35 \,.\, 1$$

$$\therefore \quad n = 4200$$

PROBLEMA 22 En una reunión entre 5 compañeros universitarios que se encuentran después de10 años de haber egresado, ellos van acompañados con sus respectivas esposas. ¿De cuántas maneras pueden disponerse en una mesa circular si siempre deben estar varones y mujeres en forma alternada?

Resolución:

Supongamos que las primeras en sentarse alrededor de la mesa circular son las esposas, luego esto se conseguirá de:

$$\lfloor 5-1 = \lfloor 4 = 24.$$

Una vez ubicadas las esposas quedan cinco lugares alternados que deben ser ocupados por los varones, esto se puede realizar de:

$$\lfloor 5 = 120 \text{ maneras.}$$

Finalmente por el principio fundamental de la multiplicación se tendrá:

$$\text{N° de maneras totales} = 24 \,.\, 120$$

$$\therefore \quad \text{N° de maneras totales} = 2880$$

PROBLEMA 23 En un programa de concurso en la televisión se presenta un juego que consiste en abrir cuatro puertas contando con un juego de siete llaves. ¿Cuántos intentos como máximo dispone un participante para ganar el premio?

Resolución:

Nótese que como se trata del número de intentos máximos, el concursante podrá abrir la puerta en el último intento:

Para la primera puerta cuenta con 7 llaves, la abre al séptimo intento.

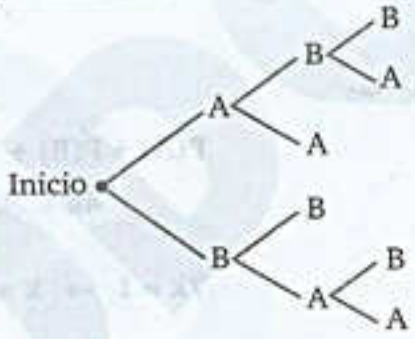
team CALAPENSHKO

Para la segunda puerta cuenta con seis llaves, la abre al sexto intento.
Para la tercera puerta cuenta con cinco llaves, la abre al quinto intento.
Para la cuarta puerta cuenta con cuatro llaves, la abre al cuarto intento.
Si "n" es el número de intentos máximos, de acuerdo con el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$n = 7.6.5.4$$
$$\therefore \quad n = 840$$

PROBLEMA 24 Los equipos A y B juegan un torneo de baloncesto, el primer equipo que gane dos juegos gana el torneo. Determine el número de maneras en las cuáles puede finalizar el torneo.

Resolución: El diagrama de árbol será:



Observar que existen seis puntos extremos, los cuales corresponden a las seis maneras en que puede finalizar el torneo.
La trayectoria desde el inicio del árbol describe quien ganó determinado juego durante el torneo.

$$\therefore \quad N^{\circ} \text{ de maneras totales} = 6$$

PROBLEMA 25 Una moneda está cargada de tal manera que la probabilidad de que aparezca una cara es el doble de la que aparezca un sello. Determina P(S) y P(C), donde:

P(S) = Probabilidad de obtener sello.
P(C) = Probabilidad de obtener cara.

Resolución: Por condición:

$$P(C) = 2K; \quad P(S) = K$$

Por espacio finito:

$$P(C) + P(S) = 1$$
$$2K + K = 1$$
$$3K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{3}$$
$$\therefore \quad P(C) = \frac{2}{3}; \quad P(S) = \frac{1}{3}$$

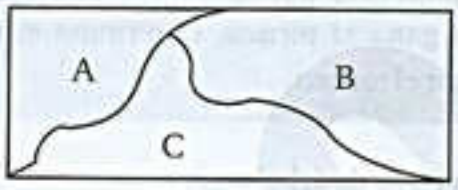
team CALAPENSHKO

PROBLEMA 26 Tres caballos A, B y C están en una carrera; la probabilidad de que gane A es el doble de que gane B, y la probabilidad de que gane B es el doble de la que tiene C. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar para A, B y C respectivamente?

Resolución: Por condición, las probabilidades para cada uno de los caballos es:

$$P(C) = k;\ P(B) = 2k;\ P(A) = 4K$$

Ahora en el espacio finito de probabilidad se cumple que:



De donde:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$4k + 2k + k = 1$$
$$7k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{7}$$
$$\therefore P(A) = \frac{4}{7};\ P(B) = \frac{2}{7};\ P(C) = \frac{1}{7}$$

PROBLEMA 27 Si la probabilidad de que en la definición del campeonato apertura la "U" le gane a Alianza es 0,25. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alianza?

Resolución: Sea A el evento de que la "U" le gane al Alianza, luego A' será el evento de que gane Alianza.

Se sabe que:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Por condición:

$$P(A') = 1 - 0{,}25$$
$$\therefore\ P(A') = 0{,}75$$

PROBLEMA 28 La probabilidad que tiene un alumno de aprobar física es 3/4, la probabilidad que tiene el mismo alumno de aprobar química es 2/3. Si la probabilidad de este alumno de aprobar por lo menos uno de los cursos es 4/5, ¿Cuál es la probabilidad de aprobar ambos cursos?

team CALAPENSHKO

Resolución: Sean los eventos:

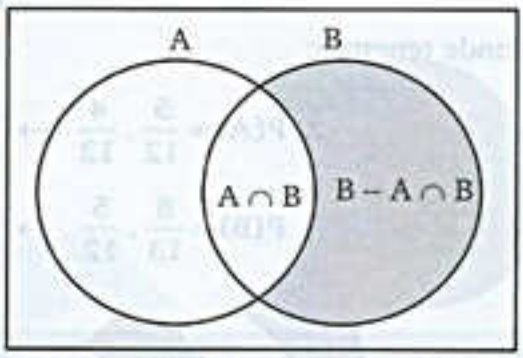
A: Aprobar física.

B: Aprobar química.

$A \cap B$: Aprobar física y química.

$A \cup B$: Aprobar al menos un curso.

Hagamos un diagrama de conjuntos:



Observa que:

$$A \cup B = A + B - (A \cap B)$$

De donde:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por condición:

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{17}{2} - \frac{4}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{37}{60}$$

PROBLEMA 29 Una pequeña caja de chocolates contiene ocho Sublimes (S) y cinco Winters (W), se come un chocolate y luego se come otro chocolate . Determine la probabilidad de:

a) Comerse dos Winters uno tras otro.

b) Comerse un Sublime y luego un Winters.

Resolución: Examinando cuidadosamente el enunciado podemos construir el árbol de posibilidades.

De donde tenemos:

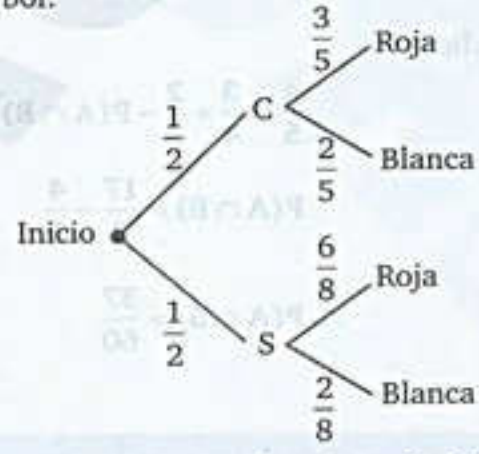
$$\therefore P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \rightarrow P(A) = \frac{5}{39}$$

$$P(B) = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \rightarrow P(B) = \frac{10}{39}$$

PROBLEMA 30 Se lanza una moneda. Si sale cara se extrae una bola de una bolsa en la que hay tres rojas y dos blancas. Si sale sello se extrae una bola de otra bolsa en la que hay seis rojas y dos blancas. Determine la probabilidad de que la bola extraída de la bolsa sea blanca.

twitter.com/calapenshko

Resolución: Por diagrama de árbol:



Los valores ubicados en las ramas indican la probabilidad para cada elemento.

Finalmente:

$$P(\text{blanca}) = P(C, \text{blanca}) + P(S, \text{blanca})$$

$$P(\text{blanca}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8}$$

$$P(\text{blanca}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{8+5}{8.5}$$

$$\therefore P(\text{blanca}) = \frac{13}{40}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hay nueve puntos en un plano de los cuales nunca tres están en línea recta excepto cinco de ellos que están en una misma recta; cuántas líneas rectas pueden trazarse.

A) 181 B) 172 C) 154
D) 192 E) 520

2. Hay diez puntos en el espacio de los cuales nunca cuatro están en un mismo plano, exceptuando cinco que están en un mismo plano; cuántos planos se pueden trazar que contengan a tres de ellos.

A) 111 B) 120 C) 151
D) 113 E) 110

3. Con doce consonantes y cinco vocales, cuántas palabras de cuatro letras pueden formarse, que tengan dos vocales (no repetidas) en medio y una consonante (que puede repetirse o ser diferente) en cada extremo.

A) 2 880 B) 5 480 C) 8 240
D) 2 680 E) 2 480

4. Dos amigos se proponen dar una comida a ocho de sus amigos; el primero conoce cuatro cubanos y cinco españoles, y el segundo cinco cubanos y cuatro españoles. En la comida ha de haber cuatro cubanos y cuatro españoles, y además cuatro han de ser amigos de uno y cuatro del otro; de cuántas maneras puede hacerse la invitación.

A) 1 340 B) 1 120 C) 1 240
D) 5 420 E) 5 626

5. Tres alumnos llegan a matricularse a un colegio que dispone de ocho aulas para dar cabida a los alumnos del segundo año de media. ¿De cuántas maneras se les puede distribuir a los mencionados alumnos, de modo que siempre ocupen aulas diferentes?

A) 336 B) 216 C) 182
D) 21 E) 32

6. Se tiene pinturas de "n" colores básicos y se plantea obtener nuevos tonos combinando partes iguales de 2, 3, 4, ... n colores mencionados de esta manera. ¿Cuántos tonos diferentes pueden ser obtenidos?

A) $2^n - n$ B) 2^{n-1} C) $2^n - n - 1$
D) 2^n E) $2^n - 1$

7. En un banquete hay doce alumnos y tres profesores y se toman fotografías de tal forma que en cada una entren 5 personas diferentes. ¿Cuántas fotografías hay en la que entren dos profesores?

A) 223 B) 150 C) 660
D) 340 E) 620

8. De cinco físicos, cuatro matemáticos y tres químicos se tiene que escoger un cómite de seis personas de modo que se incluyan tres físicos, dos matemáticos y un químico. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

A) 120 B) 150 C) 190
D) 390 E) 180

9. Se tiene un estante con capacidad de cinco libros. ¿De cuántas formas se pueden colocar dos libros de álgebra (diferentes) y tres de física (diferentes) de modo que los libros de la misma materia siempre estén juntos?

A) 12 B) 144 C) 6
D) 24 E) 120

10. A una reunión asisten diez personas, al término de ello todos se despiden cortésmente con apretones de mano. ¿Cuántos apretones de mano hubieron?

A) 20 B) 10 C) 45
D) 65 E) 40

11. ¿De cuántos modos diferentes puedo colocar siete libros en un estante, si deseo que dos de estos libros estén siempre juntos?

A) 240 B) 720 C) 1440
D) 256 E) 360

12. En una empresa hay un cómite que tiene cinco delegados de personal y cuatro personas de la dirección. ¿De cuántas maneras se puede formar un subcómite que tenga tres delegados de personal y dos miembros de la dirección?

A) 360 B) 480 C) 60
D) 120 E) 720

13. Un vendedor está a punto de visitar a cinco de sus clientes. ¿De cuántas maneras puede hacer esta serie de visitas, si se hace tres en un día y dos al día siguiente?

A) 12 B) 5 C) 8
D) 120 E) 36

14. Se tiene un lote de seis piezas de las cuales tres son defectuosa, ¿de cuántas maneras diferentes podemos seleccionar tres piezas, de modo que al menos una sea buena?

A) 9 B) 18 C) 19
D) 20 E) 12

15. Se compran seis piezas mecánicas. ¿Cómo se pueden repartir si hay cuatro talleres recibiendo dos de ellos dos piezas y los otros una sola?

A) 720 B) 360 C) 180
D) 24 E) 72

16. Hay cinco chicas en un cuarto con cuatro puertas. ¿De cuántas maneras pueden salir del cuarto las chicas?

A) 5 B) 4 C) 20
D) 512 E) 1024

17. Se dispone de tres caracteres de imprenta: 2, 5, 7, se forman todos los números de tres cifras diferentes. Calcular la suma de cifras de todos estos números.

A) 84 B) 56 C) 60
D) 420 E) 140

18. Sobre veinte personas, diez leen una revista "A", ocho leen una revista "B" y tres leen las dos revistas, ¿de cuántas maneras se pueden elegir cinco personas entre las veinte, si tres de ellas por lo menos leen la revista "A"?

A) 3670 B) 1642 C) 350
D) 7752 E) 1400

team CALAPENSHKO

19. En un plano se marcan doce puntos de los cuales cinco están sobre una misma recta. ¿Cuántos triángulo pueden formarse uniendo tres cualesquiera de esos puntos?

A) 70 B) 105 C) 175
D) 140 E) 210

20. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse tres o más personas a partir de 12 personas?

A) 4018 B) 512 C) 78
D) 1 024 E) 1 120

21. Juan Carlos tiene tres cartas; con las letras "T", "A" y "N", si coloca las cartas en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga la palabra "T. A. N."?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

22. Si seis personas se sientan alrededor de una mesa redonda, hallar la probabilidad de que dos personas determinadas ocupen lugares contiguos.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{2}{15}$
D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{1}{6}$

23. ¿Cuál es la probabilidad que al retirar una carta de una baraja ésta no sea de espadas?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{9}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

24. En cierto tipo de ruleta se tienen dos discos giratorios, uno de ellos esta marcado con las letras A, B, C, D, E y el otro con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una "B" y un número par?

A) $\frac{2}{32}$ B) $\frac{3}{22}$ C) $\frac{3}{25}$
D) $\frac{2}{35}$ E) $\frac{2}{25}$

25. ¿Cuál es la probabilidad que en una familia de tres hijos hayan dos niños y una niña?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

26. Se lanzan dos dados, uno rojo y otro azul. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de valores igual a ocho y que el dado rojo presente un valor mayor que el dado azul?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

27. Al lanzar tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras y un sello?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{4}{7}$

28. En una caja hay cinco fichas blancas y cinco fichas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha roja y otra blanca?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{9}$
D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{8}{9}$

29. En una caja se tiene 4 llaveros de color rojo, tres llaveros de color verde y dos llaveros de color azul. ¿Cuál es la probabilidad que al retirar dos llaveros ambos sean rojos?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{9}$

30. Si se lanzan al aire cuatro monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener cuatro caras y dos sellos?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

31. En una urna hay diez fichas numeradas del 1 al 10, se extraen de esta urna dos fichas al azar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento aleatorio?

A) 20 B) 30 C) 40
D) 45 E) 50

32. Se considera el experimento aleatorio de lanzar dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que cinco?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{26}{35}$
D) $\frac{13}{18}$ E) $\frac{17}{18}$

33. Se elige una carta aleatoriamente de una baraja de cincuenta y dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un 4 o menos de un palo negro?

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{7}{16}$
D) $\frac{5}{52}$ E) $\frac{2}{13}$

34. En una habitación diez personas tienen insignias numeradas del 1 al 10, se eligen tres personas al azar y se les pide que dejen la habitación inmediatamente y se anotan los números de las insignias. ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea cinco?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,5
D) 0,3 E) 0,4

team CALAPENSHKO

35. En el problema anterior. ¿Cuál es la probabilidad que el número mayor de las insignias sea cinco?

A) 0,5 B) 0,15 C) 0,05
D) 0,02 E) 0,01

36. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos, se sacan dos a la vez, se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

37. Se lanza un dado e independientemente, se escoge al azar una carta de una baraja normal. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{52}$

38. Del problema anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{3}{52}$

39. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres dados la suma de sus caras sea más de quince?

A) $\frac{5}{108}$ B) $\frac{7}{107}$ C) $\frac{9}{101}$
D) $\frac{5}{72}$ E) N.A.

40. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cuatro o un número primo en un lanzamiento de un dado?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{7}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

41. Se va a seleccionar un cómite de tres miembros de un grupo de siete personas, de las cuales dos son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que:?

I. En el cómite estén las dos mujeres.
II. El cómite este integrado por lo menos por un hombre.

A) $\frac{1}{3}$; 1 B) $\frac{1}{5}$; 1 C) $\frac{1}{7}$;1
D) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ E) N.A.

42. En un lanzamiento de dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma menor que siete?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{4}{9}$

43. Karina escribe cuatro cartas y los sobres correspondientes, si ella introduce las cartas en los sobres sin fijarse en si corresponden entonces la probabilidad de que cada carta este en su sobre respectivo es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{1}{23}$ E) $\frac{1}{7}$

44. Se va a seleccionar un cómite de 3 personas a partir de un grupo de seis hombres y cuatro mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que:?

I. Los tres sean hombres.

II. Dos sean hombres y una sea mujer.

A) $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}$

45. En una caja hay diez ampolletas, de las cuales cuatro están malogradas, un enfermo toma al azar tres piezas hallar la probabilidad de que por lo menos una de las ampolletas escogidas este malograda.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{6}$

D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

46. A un baile de disfraces asisten 10 matrimonios, si se eligen dos personas al azar, entonces la probabilidad de que las dos personas sean esposos es:

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{100}$ C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{19}$ E) $\frac{1}{95}$

47. "A" juega tres billetes en una lotería de doce números que tiene tres premios, "B" tiene dos billetes en otra de 8 números que tiene dos premios, comparar sus probabilidades de éxito.

A) $\frac{152}{231}$ B) $\frac{117}{22}$ C) $\frac{952}{715}$

D) $\frac{431}{120}$ E) $\frac{14}{125}$

48. Se investiga a un grupo de doce hombres y doce mujeres, de los cuales la mitad de los hombres y la tercera parte de las mujeres son personas infieles a sus respectivas parejas. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o una persona infiel?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{5}$

D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{4}$

49. Se tienen doce urnas y siete bolas. Hallar la probabilidad de colocar las siete bolas en seis urnas.

A) 0,0780 B) 0,0078 C) 0,0870

D) 0,00870 E) 0,0007

50. Se tienen quince cartas numeradas:

1, 2, 3, ..., 15 las que son colocadas aleatoriamente en fila, sean los eventos:

A = La carta 1 aparece en la 1° posición.

B = La carta 2 aparece en la 2° posición.

Calcular la probabilidad de que una de las dos cartas este en dicho lugar.

A) 0,0128 B) 0,1283 C) 0,1285

D) 0,0085 E) 0,2185

team CALAPENSHKO

Capítulo 10

Radicación - Racionalización

CAPACIDADES:

- Identificar Radicales simples y radicales dobles.
- Transformar algunos radicales dobles en radicales simples.
- Racionalizar denominadores.

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}\ .\ FR}{a-b}$$

PITÁGORAS

EL DESCUBRIMIENTO DE LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES.

La grandeza sublime del Teorema de Pitágoras y la mágica belleza del Pentagrama místico pitagórico fueron dos caballos de Troya para la Geometría griega, porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la secta pitagórica donde aparecieron. Los Pitagóricos, que, como filósofos presocráticos, habían considerado como núcleo dogmático de su Filosofía que "los números son la esencia del universo", encuentran que las consecuencias de su Teorema atenta contra los fundamentos de su doctrina, que les había llevado a establecer un paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica.

En tono apocalíptico escribe Jámblico (Vida Pitagórica. XXXIV, 246-247, p.141): "Se dice que primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad a los indignos de participar de tales conocimientos fue aborrecido [por la comunidad pitagórica] hasta el punto de que no sólo lo expulsaron de la vida y de la vivienda en común, sino que incluso le erigieron una tumba como si él, que había sido una vez compañero, hubiese abandonado la vida entre los hombres."

El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la Historia de la Geometría, porque no es algo empírico, sino puramente teórico. Con el descubrimiento de los inconmensurables quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas en los que haya que comparar razones de magnitudes geométricas. Se explica, pues, el consiguiente secretismo de los pitagóricos sobre la cuestión irracional y la leyenda del castigo por su divulgación.

La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales precipitó la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática, propiciando "el horror al infinito", que caracteriza casi toda la Matemática griega posterior. Como reacción al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, mezcla de brillantes ideas matemáticas, actitudes místicas y aforismos religiosos, se impondrá el severo rigor de Los Elementos de Euclides. Pero el desarrollo de La Geometría al margen de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra simbólica y la conversión de toda la Matemática en Geometría, con un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, fue el efecto más inmediato.

team CALAPENSHKO

RADICACIÓN

DEFINICION

Es la operación matemática cuyo objetivo es determinar una expresión llamada **Raíz**, de modo que dicha expresión elevada a un número entero positivo denominado **Índice** reproduzca otra expresión llamada **Radicando**.

$$\sqrt[n]{A} = r \leftrightarrow r^n = A; \quad n \in Z^+ \wedge A \in R$$

Donde:

$\sqrt{\ }$ = Signo radical ; n = Índice

A = Radicando o Cantidad subradical.

r = Raíz n – ésima de A.

OBSERVACIÓN

Si el índice de algún signo radical es 2, dicho índice no será necesario escribirlo, se dará por entendido. Por ejemplo: $\sqrt[2]{A} = \sqrt{A}$

CANTIDAD TOTAL DE RAÍCES

Dada la expresión $\sqrt[n]{A}$, ésta presenta en total "n" raíces complejas (reales o imaginarias).

Ejemplos:

- La expresión $\sqrt[3]{10}$ presenta tres raíces.
- La expresión $\sqrt{25}$ presenta dos raíces.

EXISTENCIA DE LAS RAÍCES REALES

Siendo A un número real distinto de cero y "n" un entero positivo.

1° CASO: $\sqrt[2n]{A}$ con $A > 0$ tiene sólo dos raíces reales de signos opuestos. A la raíz positiva se le da el nombre de solución principal y sólo esta será el resultado de la operación, a no ser que se especifique por la otra.

Ejemplo:

- Para la expresión: $\sqrt{25}$ < 5 ¡solución principal! / −5

2° CASO: $\sqrt[2n]{A}$ con $A < 0$ no tiene raíces reales, las raíces son números imaginarios.

3° CASO: $\sqrt[2n+1]{A}$ tiene sólo una raíz real, cuyo signo es igual al signo de A.

Ejemplos:

- Para la expresión: $\sqrt[3]{-8} = -2$
- Para la expresión: $\sqrt[5]{1} = 1$

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

Si la expresión $\sqrt[n]{A}$ presenta "k" raíces reales ($k \leq n$) dicha expresión presentará "n – k" raíces imaginarias.

Ejemplo:

- La expresión $\sqrt[4]{81}$ sólo tiene dos raíces reales, pero la cantidad total de raíces es cuatro, por tanto las otras dos raíces serán imaginarias y conjugadas.
- La expresión $\sqrt[7]{10}$ tiene una raíz real y seis raíces imaginarias, las cuales son conjugadas.

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS

La raíz cuadrada, Q(x), de un polinomio P(x) se representa por $\sqrt{P(x)}$ y se define como exacta si se verifica la siguiente relación:

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \leftrightarrow Q^2(x) \equiv P(x)$$

Si la raíz Q(x) es inexacta se cumplirá que:

$$P(x) \equiv Q^2(x) + R(x) \; ; \; R(x) = \text{Residuo o Resto}$$

OBSERVACIÓN

La raíz cuadrada de un polinomio P(x), sólo se define para todos aquellos polinomios de grado par.

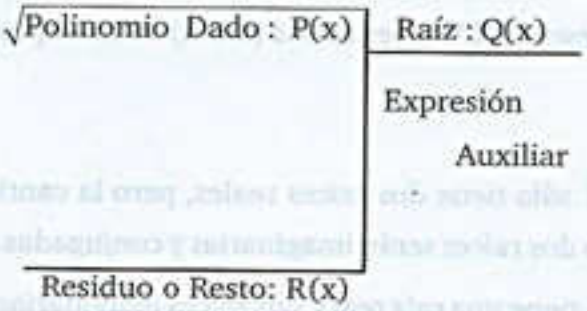
ALGORITMO DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Para extraer la raíz cuadrada a un polinomio debemos tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Se ordena respecto a una variable y se agrupan los términos de 2 en 2 (período) comenzando de derecha a izquierda.
2. Se extrae la raíz cuadrada al primer término que será el primer término de la raíz, se eleva al cuadrado esta raíz y se resta del polinomio.
3. Se baja el siguiente período, el primer término de estos se divide por el doble del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz. El segundo término de la raíz se suma con el doble del primer término de la raíz, formando un binomio. Este binomio se multiplica por el segundo término de la raíz restando el producto al período bajado.
4. Se baja el siguiente período, se divide el primer término del residuo por el doble del primer término de la raíz, el cociente es el tercer término de la raíz el cual se añade al doble de la raíz ya encontrada formando un trinomio que se multiplica con el tercer término de la raíz restando el producto del período bajado.
5. Se continúa el proceso hasta que el resto sea de un grado menor que el grado de la raíz o el polinomio idénticamente nulo.

team CALAPENSHKO

Esquema

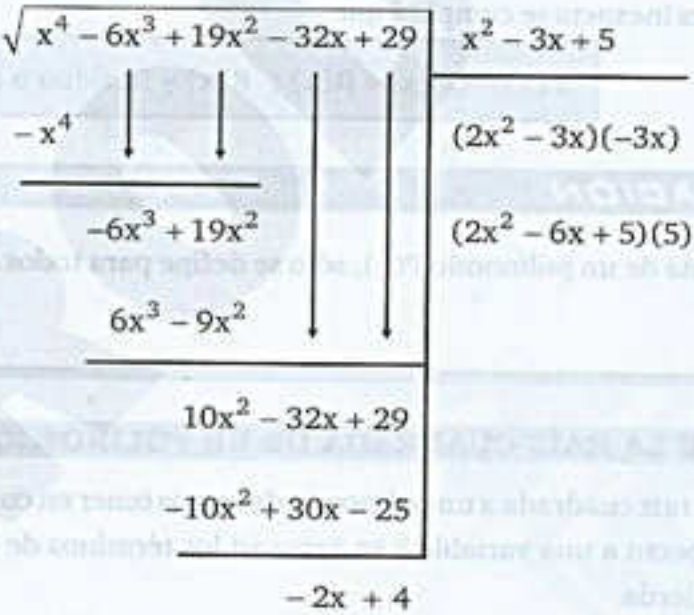


Ejemplo: Extraer la raíz cuadrada al siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 - 32x - 6x^3 + 29 + 19x^2$$

Resolución: De acuerdo con los pasos procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 32x + 29$$



Operaciones descriptivas:

1°) $\sqrt{x^4} = x^2$

2°) $(-6x^3) \div (2x^2) = -3x$

3°) $(10x^2) \div (2x^2) = 5$

Finalmente tenemos: $\text{Raíz} \equiv Q(x) \equiv x^2 - 3x + 5$

$\text{Resto} \equiv R(x) \equiv -2x + 4$

team CALAPENSHKO

RACIONALIZACIÓN

DEFINICION

Es el proceso mediante el cual una expresión irracional se transforma en otra parcialmente racional, frecuentemente se racionalizan denominadores con el uso del factor racionalizante (F. R) según la relación.

$$\text{(Expresión Irracional)} \cdot \text{(FR)} = \text{Expresión Racional}$$

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R)

Es el menor número irracional positivo que multiplica a otro número irracional y lo transforma en racional.

Ejemplo: ¿Cuál es el factor racionalizante de $\sqrt{2}$?

Resolución: Observar lo siguiente

$$\sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$
$$\sqrt{2}.\sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{2}.\sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Existen varios números irracionales que multiplican a $\sqrt{2}$ y lo transforma en racional pero entre todos ellos $\sqrt{2}$ es el menor $\therefore$ FR = $\sqrt{2}$

RADICAL SIMPLE

Se denomina así a todo número irracional que se puede expresar según la forma:

$$\sqrt[n]{A} \; ; n \in \mathbb{Z}^+ \wedge A \in \mathbb{Q}$$

veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt{3}$
- $\sqrt[5]{4}$
- $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$

RADICAL DOBLE

Se denomina así a todo número irracional que se puede expresar según la forma:

$$\sqrt[m]{A \pm \sqrt[n]{B}} \; ; m \wedge n \in \mathbb{Z}^+, A \wedge B \in \mathbb{Q}$$

veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$
- $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
- $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$

team CALAPENSHKO

TRANSFORMACIÓN DEL RADICAL DOBLE DE LA FORMA $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ EN RADICALES SIMPLES

I. POR FÓRMULA:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \left| \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \right|$$

Donde:

$C = \sqrt{A^2 - B}$ ¡Número Racional!

Ejemplo: Transformar a $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$ en radicales simples

Resolución: Observar que : $A = 4 \wedge B = 12$

$$C = \sqrt{(4)^2 - 12} = \sqrt{4} \rightarrow C = 2$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \left| \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} \right|$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \left| \sqrt{3} - \sqrt{1} \right|$$

Tener en cuenta que $\sqrt{3} - 1 > 0$, luego se tendrá:

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{3} - 1$$

II. POR REGLA PRÁCTICA:

Aquí se requiere que el radical doble a transformar presente la siguiente forma $\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}}$ para luego plantear la relación

$$\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \; ; \; x > y$$

donde: $x \cdot y = N \wedge x + y = M$

Ejemplo: Transformar cada radical doble.

a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Resolución: a) Puesto que ya tiene la forma de la regla práctica procedemos así:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$3+2 \quad 3 \cdot 2$

team CALAPENSHKO

b) Para que presente la forma de la regla práctica es necesario utilizar un artificio, veamos:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3.1}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

TRANSFORMACIÓN DEL RADICAL DOBLE DE LA FORMA $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ EN RADICALES SIMPLES

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y} \; ; \; x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{y} \in \mathbb{Q}'$$

Donde para calcular $x \wedge y$ debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x^3 - 3Cx = A & \ldots\ldots\ldots (1) \\ y = x^2 - C & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

siendo : $C = \sqrt[3]{A^2 - B}$ "Racional".

Ejemplo: Transformar $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$ en radicales simples.

Resolución: Se plantea: $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = x + \sqrt{y}$

Hallemos el valor de C: $C = \sqrt[3]{10^2 - 108}$

$$C = \sqrt[3]{100-108}$$

$$C = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Ahora formamos el sistema:

$$\begin{cases} 4x^3 + 6x = 10 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ y = x^2 + 2 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

De donde al resolver tenemos: $x = 1 \wedge y = 3$

$$\therefore \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3}$$

team CALAPENSHKO

CASOS DE RACIONALIZACIÓN

I. Para denominador monomio

$$\left[\sqrt[n]{A^m}\right][FR] = A \;;\; m,n \in \mathbb{Z}^+ / n > m,\ A \text{ es número primo}$$

Donde: $FR = \sqrt[n]{A^{n-m}}$, veamos algunos ejemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot FR} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot FR} = \dfrac{5\sqrt[3]{2}}{2}$
- $\dfrac{13}{\sqrt[5]{120}} = \dfrac{13}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3 \cdot 5}} = \dfrac{13.\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4}}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3 \cdot 5} \cdot FR} = \dfrac{13FR}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{13FR}{30}$

II. Para denominador binomio indice dos

Expresión Irracional	FR	Expresión Racional	
$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$A - B$	$; A, B \in \mathbb{Q}^+$
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$A - B$	

Veamos algunos ejemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \dfrac{1(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})FR} = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{7 - 2} = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$
- $\dfrac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} = \dfrac{5(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{(\sqrt{11} - \sqrt{3})FR} = \dfrac{5(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{5(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{11 - 3} = \dfrac{5FR}{8}$
- $\dfrac{2}{\sqrt{13} + 3} = \dfrac{2FR}{(\sqrt{13})^2 - (3)^2} = \dfrac{2FR}{13 - 9} = \dfrac{2FR}{4} = \dfrac{FR}{2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5} - 1} = \dfrac{FR}{(\sqrt[4]{5})^2 - (1)^2} = \dfrac{(\sqrt[4]{5} + 1)}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{(\sqrt[4]{5} + 1)FR}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \dfrac{(\sqrt[4]{5} + 1)FR}{5 - 1} = \dfrac{(\sqrt[4]{5} + 1)(\sqrt{5} + 1)}{4}$

team CALAPENSHKO

III. Para denominador binomio indice tres

Expresión Irracional	FR	Expresión Racional
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A}^2-\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B}^2$	$A+B$
$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B}^2$	$A-B$

; $A, B \in \mathbb{Q}-\{0\}$

Veamos algunos ejemplos:

- $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{1.\left(\sqrt[3]{5}^2-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)FR}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{5+2}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{7}$$

- $$\frac{1}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1.\left(\sqrt[3]{11}^2+\sqrt[3]{11}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}\right)FR}=\frac{\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}}{\left(\sqrt[3]{11}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}}{11-5}=\frac{\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}}{6}$$

CASOS ESPECIALES

1) $\forall n \in \mathbb{Z}^+; n \geq 2$

$$\boxed{(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(FR)=A-B}$$

donde:

$$FR=\sqrt[n]{A}^{n-1}+\sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B}+\ldots+\sqrt[n]{B}^{n-1}$$

2) $n \in \mathbb{Z}^+$ / n es impar

$$\boxed{(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})(FR)=A+B}$$

donde:

$$FR=\sqrt[n]{A}^{n-1}-\sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B}+\ldots+\sqrt[n]{B}^{n-1}$$

twitter.com/calapenshko

3) $n \in \mathbb{Z}^+$ / n es par

$$(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})(FR) = A - B$$

donde:

$$FR = \sqrt[n]{A}^{n-1} - \sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B} + \ldots - \sqrt[n]{B}^{n-1}$$

Ejemplo: Racionalizar el denominador de la expresión:

$$E = \frac{7}{\sqrt[7]{5} + \sqrt[7]{3}}$$

Resolución: Observar que $\sqrt[7]{5} + \sqrt[7]{3}$ corresponde a la relación (2) visto anteriormente, con lo cual tenemos:

$$FR = \sqrt[7]{5}^{6} - \sqrt[7]{5}^{5}\sqrt[7]{3} + \ldots + \sqrt[7]{3}^{6}$$

Ahora: $$E = \frac{7\,FR}{(\sqrt[7]{5} + \sqrt[7]{3})\,FR}$$

$$E = \frac{7\,FR}{5+3}$$

$$\therefore\ E = \frac{7FR}{8}$$

Ejemplo: Racionalizar el denominador de la expresión:

$$E = \frac{2}{\sqrt[10]{6} - \sqrt[10]{2}}$$

Resolución: Observar que $\sqrt[10]{6} - \sqrt[10]{2}$ corresponde a la relación (1) visto anteriormente.

$$FR = \sqrt[10]{6}^{9} + \sqrt[10]{6}^{8}\sqrt[10]{2} + \ldots\ldots + \sqrt[10]{2}^{9}$$

Ahora tenemos:

$$E = \frac{2FR}{(\sqrt[10]{6} - \sqrt[10]{2})FR}$$

$$E = \frac{2FR}{6-2} = \frac{2FR}{4}$$

$$\therefore\ E = \frac{FR}{2}$$

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Racionalizar cada denominador en las expresiones mostradas a continuación:

A) $\frac{2}{\sqrt{7}} =$

B) $\frac{3}{\sqrt{6}} =$

C) $\frac{1}{\sqrt[5]{12}} =$

D) $\frac{10}{\sqrt[4]{24}} =$

E) $\frac{2x^2y}{\sqrt[7]{9xy^3}} =$

2. Racionalizar cada uno de los denominadores:

A) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} =$

B) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{3}} =$

C) $\frac{2}{\sqrt{13}+2} =$

D) $\frac{7}{2\sqrt{5}-1} =$

E) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} =$

3. Racionalizar únicamente cada uno de los denominadores:

A) $\frac{1}{\sqrt[3]{11}+\sqrt[3]{5}} =$

B) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}-1} =$

C) $\frac{1}{\sqrt[3]{19}+2} =$

D) $\frac{5}{\sqrt[3]{17}-2} =$

E) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

4. Considerar que:
D. I. = Denominador irracional.
F. R. = Fracción racionalizante.
D. R. = Denominador racional.
Completa las filas de la tabla adjunta.

D. I.	F. R.	D. R.
$\sqrt{3}$		
$\sqrt{11}+\sqrt{2}$		
$\sqrt{17}-3$		
$\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{3}$		
$\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$		

5. Colocar en cada paréntesis R. S. (Radical Simple) o R. D. (Radical Doble) según corresponda.

A) $\sqrt{7}$ ( )

B) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ ( )

C) $2\sqrt[3]{5}$ ( )

D) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$ ( )

E) $\sqrt[3]{10-\sqrt{7}}$ ( )

6. Transformar a radicales simples:

A) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$

B) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$

C) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$

D) $\sqrt{11-\sqrt{120}}$

E) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

F) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$

G) $\sqrt{14+2\sqrt{35}+2\sqrt{14}+2\sqrt{10}}$

H) $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Proporcionar el equivalente de:

$$L = \sqrt{7+2\sqrt{12}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

Resolución: Dando uso de la transformación de radicales dobles a radicales simples tenemos:

$$L = \sqrt{7+2\sqrt{4\,.\,3}} + \sqrt{7-2\sqrt{4\,.\,3}}$$

$$L = \sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$L = 2 + 2$$

$$\therefore \quad L = 4$$

PROBLEMA 2 Siendo a, b y c naturales, tales que:

$$\sqrt{5x-2+2\sqrt{6x^2-7x-3}} <> \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

Calcular: "a + b + c"

Resolución: Factorizando al trinomio cuadrático del primer miembro:

$$6x^2 - 7x - 3 \equiv (3x+1)(2x-3)$$

$$\begin{array}{rcl} 3x & \nearrow & 1 \\ 2x & \searrow & -3 \end{array}$$

$$\underbrace{\sqrt{5x-2+2\sqrt{(3x+1)(2x-3)}}}_{\text{Transformando}} <> \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-3} <> \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

Observar que: $a = 3 \; ; \; b = 1 \; ; \; c = 2$

$$\therefore \quad a + b + c = 6$$

PROBLEMA 3 Si el radical doble:

$$\sqrt{\frac{y}{4x} + \frac{1}{5y} + \sqrt{\frac{x}{2y}}} \; ; \; x, y \in \mathbb{Q}^+$$

se transforma en radicales simples, determine la relación entre x é y.

Resolución: De acuerdo a la condición:

$$\frac{y}{4x} + \frac{1}{5y} + \sqrt{\frac{x}{2y}} \text{ debe ser cuadrado perfecto}$$

team CALAPENSHKO

Teniendo en cuenta:

$$\frac{y}{4x}=\left(\sqrt{\frac{y}{4x}}\right)^2 ; \frac{1}{5y}=\left(\sqrt{\frac{1}{5y}}\right)^2$$

Luego : $$\sqrt{\frac{x}{2y}}=2\left(\sqrt{\frac{y}{4x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{5y}}\right)$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{x}{2y}=4\left(\frac{y}{4x}\right)\left(\frac{1}{5y}\right)$$

$$\frac{x}{2y}=\frac{1}{5x}$$

$$5x^2=2y$$

$\therefore$ La relación es : $5x^2=2y$

PROBLEMA 4 Reducir:

$$K=\frac{3}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Resolución: Racionalizando los denominadores en cada término tenemos:

- $$\frac{3}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\frac{3(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-2}$$

- $$\frac{5}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-2}$$

- $$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Ahora reemplazando los equivalentes en la expresión K se tendrá:

$$K=\underbrace{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-2}+\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-2}}-\left[-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]$$

$$K=\frac{-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$K=-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$\therefore$ $K=0$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 5 Reducir:

$$L = \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$$

Resolución: Transformando cada denominador tenemós:

- $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-2\sqrt{5.2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$
- $\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{8+2\sqrt{6.2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$
- $\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{11-2\sqrt{6.5}} = \sqrt{6}-\sqrt{5}$

Ahora la expresión dada inicialmente será:

$$L = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

$$L = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}$$

$$L = \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad L = 0$$

PROBLEMA 6 Si se racionaliza el denominador de:

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

Se obtiene:

Resolución: Sea F la expresión dada, luego:

$$F = \frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{7}+1)}$$

$$F = \frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}+1)\right]}{\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{7}+1)\right]\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}+1)\right]}$$

$$F = \frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+1)^2}$$

$$F = \frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}$$

$$\therefore \quad F = \sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 7 Reducir:

$$E = \sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} - \sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}$$

Resolución: La expresión dada es:

$$E = \sqrt[4]{97+2\,.\,28\sqrt{3}} - \sqrt[4]{97-2\,.\,28\sqrt{3}}$$

$$E = \sqrt[4]{97+2\sqrt{28\,.\,28\,.\,3}} - \sqrt[4]{97-2\sqrt{28\,.\,28\,.\,3}}$$

Observar que: $28\,.\,28\,.\,3 = 7\,.\,4\,.\,7\,.\,4\,.\,3 = 49\,.\,48$

Ahora en la expresión se tendrá:

$$E = \sqrt[4]{97+2\sqrt{49\,.\,48}} - \sqrt[4]{97-2\sqrt{49\,.\,48}}$$

$$E = \sqrt{\sqrt{97+2\sqrt{49+48}}} - \sqrt{\sqrt{97-2\sqrt{49+48}}}$$

Transformando tenemos:

$$E = \sqrt{\sqrt{49}+\sqrt{48}} - \sqrt{\sqrt{49}-\sqrt{48}}$$

$$E = \sqrt{7+\sqrt{4\,.\,12}} - \sqrt{7-\sqrt{4\,.\,12}}$$

$$E = \sqrt{7+2\sqrt{12}} - \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

Nuevamente transformando:

$$E = \sqrt{7+2\sqrt{4\,.\,3}} - \sqrt{7-2\sqrt{4\,.\,3}}$$

$$E = \sqrt{4}+\sqrt{3} - (\sqrt{4}-\sqrt{3})$$

$$E = \sqrt{4}+\sqrt{3} - \sqrt{4}+\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad E = 2\sqrt{3}$$

PROBLEMA 8 Sabiendo que: $x^2 = x+1 > 0$

Reducir:

$$F = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Resolución: La igualdad mostrada se puede expresar así:

$$\sqrt{2}F = \sqrt{2}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right]$$

$$\sqrt{2}F = \sqrt{2x+2\sqrt{x}} - \sqrt{x-1}$$

Por condición: $x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x$

$$\sqrt{2}F = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}F = \underbrace{\sqrt{2x + 2\sqrt{(x+1)(x-1)}}}_{\text{Transformando}} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}F = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}F = \sqrt{x+1}$$

$$\therefore \quad F = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

PROBLEMA 9 Luego de racionalizar al denominador de:

$$E = \frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} - 6}$$

se tendrá:

Resolución: El denominador de la expresión es:

$$D = \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} - 6 = \sqrt[3]{7}^2 - \sqrt[3]{7} - 6$$

$$\sqrt[3]{7} \quad -3$$
$$\sqrt[3]{7} \quad 2$$

$$D = (\sqrt[3]{7} - 3)(\sqrt[3]{7} + 2)$$

Observar que el FR de $(\sqrt[3]{7} - 3)$ es: $\sqrt[3]{7}^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9$

También que el FR de $(\sqrt[3]{7} + 2)$ es: $\sqrt[3]{7}^2 - 2\sqrt[3]{7} + 4$

$$E = \frac{(\sqrt[3]{7}^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9)(\sqrt[3]{7}^2 - 2\sqrt[3]{7} + 4)}{\left[(\sqrt[3]{7} - 3)FR\right].\left[(\sqrt[3]{7} + 2)FR\right]}$$

$$E = \frac{(\sqrt[3]{49} + 3\sqrt[3]{7} + 9)(\sqrt[3]{49} - 2\sqrt[3]{7} + 4)}{(-20)(15)}$$

$$\therefore \quad E = -\frac{(\sqrt[3]{49} + 3\sqrt[3]{7} + 9)(\sqrt[3]{49} - 2\sqrt[3]{7} + 4)}{300}$$

PROBLEMA 10 Siendo a y b naturales que satisfacen la equivalencia:

$$\sqrt{10}.\left[\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3} + \sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1}}\right] <> a\sqrt{b} - b\sqrt{a}$$

Calcular: a . b

Resolución: Designemos por M a la expresión del primer miembro:

$$M = \sqrt{10}.\left[\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3} + \sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1}}\right]$$

team CALAPENSHKO

Elevando al cuadrado y simplificando tenemos:

$$M^2 = 10.\left[\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}+3}\right]$$

Racionalizando el denominador se consigue:

$$M^2 = 10(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-3)$$

$$M^2 = 10(7-2\sqrt{10}) \Rightarrow M = \sqrt{10}.\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

$$M = \sqrt{10}.\sqrt{7-2\sqrt{5.2}}$$

$$M = \sqrt{10}.(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{50}-\sqrt{20}$$

$$M = 5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$$

Por condición: $5\sqrt{2}-2\sqrt{5} <> a\sqrt{b}-b\sqrt{a}$

$a = 5 \wedge b = 2$

$\therefore \quad a \,.\, b = 10$

PROBLEMA 11 Determine un valor más simple de:

$$\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}}\right)$$

Resolución: Sea "K" el valor simple:

$$K = \sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}}\right)$$

Elevando al cuadrado:

$$K^2 = \sqrt{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}\right)$$

Efectuando operaciones:

$$K^2 = \sqrt{3+\sqrt{7}}\,.\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{3+\sqrt{7}}\,.\sqrt{5-\sqrt{7}}$$

$$K^2 = \sqrt{(3+\sqrt{7})(13-\sqrt{7})}-\sqrt{(3+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}$$

$$K^2 = \sqrt{32+10\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$K^2 = \sqrt{32+2\,.\,5\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$K^2 = \sqrt{32+2\sqrt{25\,.\,7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7\,.\,1}}$$

Transformando tenemos:

$$K^2 = \sqrt{25}+\sqrt{7}-(\sqrt{7}+\sqrt{1})$$

$$K^2 = 5+\sqrt{7}-\sqrt{7}-1 = 4$$

$\therefore \quad K = 2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Racionalizar el denominador de:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{2}+1}$$

Resolución: La expresión es : $K=\dfrac{2}{\sqrt[5]{2}^4-\sqrt[5]{2}^3+\sqrt[5]{2}^2-\sqrt[5]{2}+1}$

Por caso especial (2):

$$K=\frac{2\left(\sqrt[5]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[5]{2}^4-\sqrt[5]{2}^3+\sqrt[5]{2}^2-\sqrt[5]{2}+1\right)\text{FR}}$$

$$K=\frac{2\left(\sqrt[5]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^5+(1)^5}=\frac{2\left(\sqrt[5]{2}+1\right)}{2+1}$$

$$\therefore\quad K=\frac{2\sqrt[5]{2}+2}{3}$$

PROBLEMA 13 Reducir:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Resolución: Sea la expresión : $K=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Multiplicando por $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{K}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$\frac{K}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

* *

Transformando *: $\dfrac{K}{\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2+(\sqrt{3}+1)}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-(\sqrt{3}-1)}$

$$\frac{K}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Ahora racionalizando:

$$\frac{K}{\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})\text{FR}}+\frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\text{FR}}$$

$$\frac{K}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{K}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{K}{\sqrt{2}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\therefore \quad K = \sqrt{2}$$

PROBLEMA 14 Racionalizar el denominador de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$$

Resolución: Supongamos que $a = \sqrt[3]{2}$; $b = \sqrt[3]{3}$ y $c = \sqrt[3]{4}$, por la equivalencia de Gauss tenemos:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

Observar que $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ se comporta como el factor racionalizante de $a+b+c$, ahora si "K" es la expresión:

$$K = \frac{FR}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})FR}$$

$$K = \frac{FR}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{4})^3-3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{4}}$$

$$K = \frac{FR}{2+3+4-3\sqrt[3]{8.3}}$$

$$K = \frac{FR}{9-3.2\sqrt[3]{3}} = \frac{FR}{9-6\sqrt[3]{3}}$$

Ahora considerando un nuevo factor racionalizante para el último denominador, se tendrá:

$$K = \frac{FR.Fr}{(9-6\sqrt[3]{3})Fr} = \frac{FR.Fr}{(9)^3-(6\sqrt[3]{3})^3}$$

$$K = \frac{FR.Fr}{729-216.3} = \frac{FR.Fr}{729-648}$$

$$\therefore \quad K = \frac{FR.Fr}{81}$$

Observación:

A veces FR . Fr se cambia por un nuevo FR, esto por que al efectuar se obtiene casi siempre un nuevo número irracional.

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 15 Siendo x, y, z racionales positivos calcular: "x + y + z" si:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} <> \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$$

Resolución: Sea K el primer miembro de la equivalencia, luego:

$$K=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)}{\sqrt[3]{2}+1}}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}+1}}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}+1)}}$$

Observar que: $\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}+1=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1$

$$=2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2+1$$

$$=(\sqrt[3]{2}+1)^2$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{4})^3-1^3}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)^2}}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^3}}$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{3}$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{27}}$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Observar que: $\{x, y, z\}=\left\{\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right\}$

$$\therefore \quad x+y+z=\frac{7}{9}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 16 Racionalizar:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$$

Resolución: Dado que el denominador es un binomio con radicales de indice 3 diremos que su factor racionalizante es:

$$\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{2^2}$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}=\frac{12(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{7}^3+\sqrt[3]{2}^3}$$

Finalmente, luego de operar y simplificar se tendrá:

$$\therefore\quad \frac{4(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}{3}$$

PROBLEMA 17 Dado que : $\sqrt{5}=2{,}23607$, hallar el valor de :

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$$

Resolución: Nuestra estrategia consistirá en tratar de poner toda la expresión en términos de $\sqrt{2}$ puesto que según los datos solo conocemos el valor de este radical. Para ello multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{5}$; de ese modo la expresión se convierte en:

$$\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{2+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2+3-\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2{,}23607}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}=0{,}44721$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Después de racionalizar:

$$F = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

el denominador de la fracción resultante es:

Resolución: Agrupando convenientemente al denominador, reconocemos el F. R. adecuado:

$$F = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2}$$

$$F = \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{4\sqrt{3}+2} = \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2(2\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1}$$

$$F = \frac{6+10\sqrt{3}+4\sqrt{5}+3\sqrt{15}}{11}$$

De donde reconocemos que el denominador es 11.

$\therefore$ Rpta: 11

PROBLEMA 19 Reducir:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}+\sqrt{\sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}+1}}$$

Resolución: Elevando al cuadrado toda la expresión y simplificando:

$$E^2 = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}+\sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1}+2\sqrt{\sqrt{x}-(\sqrt{x}-1)}}{\sqrt[4]{x}+1}$$

$$E^2 = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+2\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}}{\sqrt[4]{x}+1}$$

$$E^2 = \frac{2\sqrt[4]{x}+2\sqrt{1}}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{2(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt[4]{x}+1} = 2$$

Entonces la expresión original es:

$\therefore$ $E = \sqrt{2}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 20 Evaluar la expresión:

$$(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1};$$

para:

$$a = (2+\sqrt{3})^{-1} \text{ y } b = (2-\sqrt{3})^{-1}$$

Resolución: La expresión dada es de la forma:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \ldots\ldots\ldots (*)$$

Donde:

$$a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \text{ y } b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

A continuación calcularemos cada elemento de (*):

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{b+1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$$

PROBLEMA 21 Determine "α" de modo que el residuo de extraer raíz cuadrada a

$$P(x) = 4x^2 + 4x + \alpha \text{ sea cero.}$$

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^2+4x+\alpha} & 2x+1 \\ \cline{2-2} -4x^2 & (4x+1)(1) \\ \cline{1-1} 4x+\alpha & \\ -4x-\alpha & \\ \cline{1-1} (\alpha-1) & \end{array}$$

Operaciones Auxiliares

* $\sqrt{4x^2} = 2x$
* $\frac{4x}{4x} = 1$

Por condición: $\alpha - 1 = 0$

$\therefore \alpha = 1$

PROBLEMA 22 Si el residuo de:

$$\sqrt{(x+1)^4+4(x+1)^3-2(x+1)^2-11x}$$

es: $mx+n$. Calcular el valor de $m \cdot n$

Resolución: Hagamos el siguiente cambio de variable:

$$x+1=y \rightarrow x=y-1.$$

Ahora el radicando será:

$$y^4+4y^3-2y^2-11(y-1)$$

$$y^4+4y^3-2y^2-11y+11$$

Según el algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{y^4+4y^3-2y^2-11y+11} & y^2+2y-3 \\ \hline -y^4 & \\ \hline 4y^3-2y^2 & (2y^2+2y)(2y) \\ -4y^3-4y^2 & (2y^2+4y-3)(-3) \\ \hline -6y^2-11y+11 & \\ 6y^2+12y-9 & \\ \hline y+2 & \end{array}$$

Operaciones Auxiliares

- $\sqrt{y^4}=y^2$
- $\dfrac{4y^3}{2y^2}=2y$
- $\dfrac{-6y^2}{2y^2}=-3$

Reponiendo la variable:

$$R(x) \equiv (x+1)+2 \equiv x+3$$

Por condición:

$$x+3 \equiv mx+n$$

$$m=1 \wedge n=3$$

$$\therefore m \cdot n=3$$

PROBLEMA 23 Racionalizar el denominador de:

$$F(x;y)=\frac{24x^4y^3}{\sqrt[5]{120x^2y^7}}$$

Resolución: La expresión propuesta es:

$$F(x;y)=\frac{24x^4y^3}{\sqrt[5]{120x^2y^2 \cdot y^5}}=\frac{24x^4y^3}{y\sqrt[5]{120x^2y^2}}$$

team CALAPENSHKO

Simplificando tenemos:

$$F(x;y) = \frac{24\,x^4y^2}{\sqrt[5]{2^3.3.5.x^2.y^2}}$$

Racionalizando al denominador:

$$F(x;y) = \frac{24\,x^4y^2}{\sqrt[5]{2^3.3.5.x^2.y^2}}\left[\frac{\sqrt[5]{2^2.3^4.5^4.x^3.y^3}}{f.r.}\right]$$

$$F(x;y) = \frac{24\,x^4y^2\,f.r.}{2.3.5.x.y}$$

$$\therefore\ F(x;y) = \frac{4\,x^3y\,f.r.}{5}$$

PROBLEMA 24 Transformar a radicales simples:

$$E = \sqrt{5x+16y+1+\sqrt{240xy+192y^2+144y-60x-48}}$$

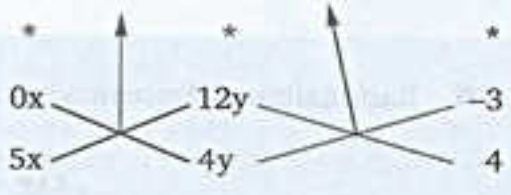
Resolución: Supongamos que:

$$f(x;y) = 240xy+192y^2+144y-60x-48$$

$$f(x;y) = 4(60xy+48y^2+36y-15x-12)$$

Aspa doble:

$$f(x;y) = 4(0x^2+60xy+48y^2+36y-15x-12)$$



$$f(x;y) = 4(12y-3)(5x+4y+4)$$

Finalmente tenemos:

$$E = \sqrt{5x+16y+1+2\sqrt{(12y-3)(5x+4y+4)}}$$

$$\therefore\ E = \sqrt{12y-3}+\sqrt{5x+4y+4}$$

PROBLEMA 25 El equivalente de:

$$\left\{\frac{\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}}\right\}^{\frac{2}{3}} \text{ es:}$$

Resolución: Observa que:

$$11\sqrt{2}+9\sqrt{3}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3 \text{ y } 20-14\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3$$

Asimismo:

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{97+2\sqrt{3}.16.49}}$$

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{97+2\sqrt{48}.49}}=\sqrt{\sqrt{49}+\sqrt{48}}$$

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{7+2\sqrt{3}.4}$$

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{3}+2$$

Si "k" es el equivalente de la expresión propuesta, se tendrá:

$$K=\left\{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}}{\sqrt{3}+2}\right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$K=\left\{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left\{\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}\right\}^{\frac{2}{3}}=\{1\}^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore K=1$$

PROBLEMA 26 Racionalizar el denominador de:

$$\frac{1}{\sqrt{x}(y-z)+\sqrt{y}(z-x)+\sqrt{z}(x-y)}$$

Resolución: Inicialmente debemos transformar al denominador, veamos

$$D=\sqrt{x}(y-z)+\sqrt{y}(z-x)+\sqrt{z}(x-y)$$

$$D=\sqrt{x}y-\sqrt{x}z+\sqrt{y}z-x\sqrt{y}+\sqrt{z}(x-y)$$

Agrupando términos

$$D=\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})+z(\sqrt{y}-\sqrt{x})+\sqrt{z}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

team CALAPENSHKO

Cambiando signos:

$$D = -\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) - z(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{z}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$D = (\sqrt{x}-\sqrt{y})\left[-\sqrt{x}\sqrt{y} - z + \sqrt{z}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right]$$

$$D = (\sqrt{x}-\sqrt{y})\left[-\sqrt{x}\sqrt{y} - z + \sqrt{z}\sqrt{x} + \sqrt{z}\sqrt{y}\right]$$

Nuevamente agrupamos:

$$D = (\sqrt{x}-\sqrt{y})\left[\sqrt{x}(\sqrt{z}-\sqrt{y}) - \sqrt{z}(\sqrt{z}-\sqrt{y})\right]$$

$$D = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})$$

Ahora en la expresión original

$$E = \frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})}$$

Racionalizando el denominador:

$$E = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{z}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{z})}{\left[(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})\right]\text{F.R.}}$$

$$\therefore E = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{z}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{z})}{(x-y)(z-y)(x-z)}$$

PROBLEMA 27 Racionalizar el denominador de:

$$F(x;y) = \frac{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x+y}}$$

Resolución: La expresión propuesta es:

$$F(x;y) = \frac{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x+y}}$$

Racionalizando el denominador:

$$F(x;y) = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\left[(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\sqrt[3]{x+y} + (\sqrt[3]{x+y})^2\right]}{\left[(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})-\sqrt[3]{x+y}\right].\text{F.R.}}$$

Finalmente tenemos:

$$F(x;y) = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})[\text{F.R.}]}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3-(\sqrt[3]{x+y})^3} = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\,\text{F.R.}}{x+y+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})-x-y}$$

$$F(x;y) \equiv \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\ \text{F.R.}}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}$$

$$\therefore\ F(x;y) \equiv \frac{\text{F.R.}}{3}$$

PROBLEMA 28 Dado el polinomio entero en x: $P(x) \equiv 16x^4+ax^3+bx^2+cx+1$. Calcular "a+b+c" si P(x) tiene raíz cuadrada exacta, además: $(c-2)^2+b=a+9$

Resolución: Como P(x) tiene raíz cuadrada exacta, podemos afirmar que su forma es:

$$P(x) \equiv (4x^2+mx+1)^2$$

Ahora se plantea:

$$16x^4+ax^3+bx^2+cx+1 \equiv (4x^2+mx+1)^2$$

De donde tenemos:

$$16x^4+ax^3+bx^2+cx+1 \equiv 16x^4+8mx^3+(m^2+8)x^2+2mx+1$$

Aquí se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} a=8m \\ c=2m \end{array}\right\} a=4c$$

$$b=m^2+8$$

Por condición tenemos:

$$(c-2)^2+b=a+9$$

En función de "m" tenemos:

$$(2m-2)^2+m^2+8=8m+9$$

$$5m^2-8m+12=8m+9$$

$$5m^2-16m+3=0$$

Factorizando por aspa simple:

$$(5m-1)(m-3)=0 \leftrightarrow m=\frac{1}{5} \vee m=3$$

Como P(x) es entero en x, coeficientes enteros, solo aceptamos m = 3. Ahora los valores de a, b y c son:

$$a=8m \rightarrow a=24$$

$$b=m^2+8 \rightarrow b=17$$

$$c=2m \rightarrow c=6$$

$$\therefore\ a+b+c=47$$

PROBLEMA 29 Si R(x) es el residuo de extraer raíz cuadrada al polinomio:

$$P(x) \equiv x^6+4x^4-6x^3+4x^2-12x+8.$$

Calcular: R(2011)

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos a extraer raíz cuadrada al polinomio citado:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^6+4x^4-6x^3+4x^2-12x+8} & x^3+2x-3 \\
\cline{2-2}
-x^6 & (2x^3+2x).(2x) \\
\cline{1-1}
4x^4-6x^3+4x^2-12x+8 & (2x^3+4x-3)(-3) \\
-4x^4\quad -4x^2 & \\
\cline{1-1}
-6x^3\quad -12x+8 & \\
6x^3\quad +12x-9 & \\
\cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

Finalmente tenemos:

$$R(x) = -1$$
$$\therefore\ R(2011) = -1$$

Operaciones

* $\sqrt{x^6} = x^3$ * $\dfrac{4x^4}{2x^3} = 2x$ * $\dfrac{-6x^3}{2x^3} = -3$

PROBLEMA 30 Calcular "a + b" si $R(x) = -x + 5$ es el resto de extraer raíz cuadrada al siguiente polinomio: $P(x) = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 22x^2 + ax + b$.

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos a extraer raíz cuadrada del polinomio P(x):

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^6-6x^5+13x^4-18x^3+22x^2+ax+b} & x^3-3x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
-x^6 & (2x^3-3x^2)(-3x^2) \\
\cline{1-1}
-6x^5+13x^4-18x^3+22x^2+ax+b & (2x^3-6x^2+2x)(2x) \\
6x^5\ -9x^4 & (2x^3-6x^2+4x-3)(-3) \\
\cline{1-1}
4x^4-18x^3+22x^2+ax+b & \\
-4x^4+12x^3-\ 4x^2 & \\
\cline{1-1}
-6x^3+18x^2+\ ax+b & \\
6x^3-18x^2+12x-9 & \\
\cline{1-1}
(a+12)x+(b-9) &
\end{array}$$

Por condición se plantea:

$$(a + 12)x + (b - 9) \equiv -x + 5$$

Ahora hacemos cumplir:

$$a + 12 = -1 \ \wedge\ b - 9 = 5$$
$$a = -13 \ \wedge\ b = 14$$
$$\therefore\ a + b = 1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Reducir:

$$K = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

2. Reducir:

$$\sqrt{3+2\sqrt{7+2\sqrt{6}}} - \sqrt{3}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 0
D) $\sqrt{3}$ E) $-\sqrt{2}$

3. COLUMNA (A)

El denominador racional de:

$$\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$$

COLUMNA (B)

El denominador racional de:

$$\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$$

A) A es mayor que B
B) A es igual que B
C) A es menor que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

4. Si:

$$\sqrt{m+2\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{7}{\sqrt{8}-1}$$

Calcular: $m+n$

A) 15 B) 25 C) 30
D) 35 E) 55

5. Calcular:

$$E = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}} \cdot \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{6}+1$

6. Reducir:

$$\sqrt{5+\sqrt{23}} \cdot \sqrt{11-\sqrt{23}} - \sqrt{23}$$

A) 3 B) 7 C) $\sqrt{3}$
D) 12 E) 17

7. Si se cumple:

$$\sqrt{5x-2+2\sqrt{6x^2-7x-3}} = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

de modo que: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}$.

Calcular: $a+b+c$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

8. Si se establece la siguiente equivalencia:

$$\sqrt[4]{8x^2+24x+9+4(2x+3)\sqrt{x^2+3x}} <> <> \sqrt{x+\alpha}+\theta\sqrt{x}$$

Calcular el valor de: $\alpha^2+\theta^3$

A) 7 B) 10 C) 13
D) 17 E) 21

9. Luego de transformar a radicales simples:

$$\sqrt{2x^3-x+2\sqrt{x^6-x^4-20x^2-9x-1}}$$

Indicar uno de ellos.

A) $\sqrt{x^3-5x+1}$ B) $\sqrt{x^3-4x-1}$
C) $\sqrt{x^3-5x-1}$
D) $\sqrt{x^3+4x-1}$ E) $\sqrt{x^3-4x+1}$

team CALAPENSHKO

10. Encontrar un valor más simple de:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a+b+\sqrt{4ab}}}+\frac{b-c}{\sqrt{b+c+\sqrt{4bc}}}+\frac{c-a}{\sqrt{c+a+\sqrt{4ca}}}$$

A) a + b B) b + c C) 0
D) a + b + c E) abc

11. Reducir:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

12. El equivalente de:

$$\frac{2+2\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

es:

A) 2,73... B) 0,73... C) 2,42...
D) 0,42... E) 1,15...

13. Reducir:

$$\frac{\sqrt{3a+1}-\sqrt{3a-1}}{\sqrt{2}\sqrt{3a+\sqrt{9a^2-1}}}+\frac{\sqrt{2a+1}-\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}\sqrt{2a+\sqrt{4a^2-1}}}+$$
$$+\frac{5a^2}{\sqrt{9a^2-1}-\sqrt{4a^2-1}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5a}$ C) $5a^2$
D) 5a E) –5a

14. Calcular:

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5-3\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{8+2\sqrt{12}}}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt{2\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt[4]{2}$

15. Reducir:

$$A=\frac{\sqrt{x+24+10\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+15+8\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$$

Siendo: $1<x<2$.

A) 1 B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{8}{5}$
D) x – 1 E) $\sqrt{x-1}$

16. Hallar: a + b, si la expresión:

$$E=\left[\frac{a+b\sqrt{2}}{2b-\sqrt{2}b+(\sqrt{2}-1)a}\right]$$

Se le puede dar forma $a+\sqrt{b}$ donde: "a" y "b" son enteros positivos.

A) 17 B) 12 C) 11
D) 19 E) No se puede determinar

17. Si el radical doble: $\sqrt{ax+by+\sqrt{xy(ab+c)}}$ se expresa como una suma de radicales simples, determine el valor de:

$$E=\frac{ab}{c}$$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

18. Simplificar:

$$\frac{\sqrt[3]{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[8]{a^3-b^3}}{\sqrt{(a+b)\sqrt{(a-b)\sqrt{a^2+ab+b^2}}}}$$

A) $\sqrt[4]{a-b}$ B) $\sqrt[12]{a-b}$ C) $\sqrt[24]{a-b}$
D) $\sqrt[18]{a-b}$ E) $\sqrt{a-b}$

19. El denominador racional de:

$$\frac{1}{\sqrt[11]{7}+1}$$

es:

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) E.D.

20. Simplifíquese:

$$\frac{\sqrt[4]{31+8\sqrt{15}}+\sqrt[4]{31-8\sqrt{15}}}{\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}+\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{6}$

21. Indicar el denominador racional de:

$$\frac{\sqrt[4]{1997}+\sqrt[4]{1999}+1}{\sqrt[8]{2}+\sqrt[4]{2}+1}$$

A) 3 B) 4 C) 7

D) 2 E) 1

22. Luego de simplificar:

$$\left[\frac{a(a+2)+(a+1)\sqrt{a^2-9}-3}{a(a-2)+(a-1)\sqrt{a^2-9}-3}\right]\left[\frac{a-3}{a+3}\right]^{0,5}$$

obtendremos:

A) 1 B) a C) $\sqrt{a}+3$

D) $\frac{a-3}{a+3}$ E) $\sqrt{a}-3$

23. Qué valor de "x" verifica:

$$\sqrt[3x-3]{7+5\sqrt{2}}\ \sqrt[2x+2]{3-2\sqrt{2}}=\sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

24. Sabiendo que:

$$\frac{\sqrt[n-m]{4^m-1}}{\sqrt[n-m]{1-2^n}}=\frac{\sqrt[-n]{2^{3m-n}-1}}{\sqrt[-n]{mn+1}}=2$$

proporcionar el valor numérico de:

$$E=\frac{\sqrt[m]{2^n+mn+1}+\sqrt[n]{2^m-mn-1}}{\sqrt[m]{2^n+mn+1}-\sqrt[n]{2^m-mn-1}}$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

25. Proporcionar el denominador simplificado al racionalizar:

$$\frac{\sqrt[3]{10}\,(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 7

26. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left[\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt[\sqrt{7}+\sqrt{48}]{4^{(2-\sqrt{3})^{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}}}\right]^{\frac{(7+4\sqrt{3})^{\sqrt{7}}}{2}}$$

A) 8 B) $\sqrt{2}$ C) 4

D) 1 E) 2

27. El equivalente de:

$$\left[\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}-9}{(5-2\sqrt{5})(2\sqrt{10})}+\frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$$

es:

A) $\sqrt{15}-2$ B) $\sqrt{15}+1$ C) $\sqrt{10}-1$

D) $\sqrt{13}-3$ E) $\sqrt{30}+2$

28. Si:

$$\sqrt[4]{4\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}}+\sqrt{x}$$

Admite transformación a radicales simples. ¿Cuál es el valor numérico de uno de ellos si hacemos: x = 1?

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{5}$

D) 1 E) N.A.

29. Al efectuar:

$$\left[\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}\right]^{\sqrt{2}}$$

Obtenemos:

A) 1 B) $1+\sqrt{2}$

C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

D) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

team CALAPENSHKO

30. Qué valor asume: $P(x)=\dfrac{x^4+4x^2+2}{x^2+2}$

si se sustituye: $x=\sqrt{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

31. El equivalente de:

$$\frac{\left[\sqrt{5}+2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right]^{(\sqrt{5}-2)^3-\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}+2)^{5-\sqrt{5}}}$$ es:

A) $-12+12\sqrt{5}$ B) $-38+17\sqrt{5}$

C) $7+7\sqrt{5}$

D) $-38+7\sqrt{5}$ E) $24-17\sqrt{5}$

32. Encontrar el radical equivalente a:

$$\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{6}}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

A) $\sqrt[4]{12}+\sqrt[3]{8}$ B) $\sqrt{12}+\sqrt{18}$ C) $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{8}$

D) $\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{18}$ E) $2-\sqrt{3}$

33. El equivalente de:

$$\frac{2\sqrt{11}+\sqrt{33}}{\sqrt{22}+\sqrt{22+11\sqrt{3}}}+\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{21}}{\sqrt{14}-\sqrt{14-7\sqrt{3}}}$$ es:

A) $\sqrt{2}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$

D) 2 E) $\sqrt{7}$

34. Indica el denominador resultante de:

$$\frac{\sqrt[96]{97^{98}}}{\sqrt{2^3}+\sqrt[3]{3^2}}$$

A) 431 B) 341 C) 134

D) 413 E) 441

35. Luego de racionalizar:

$$\frac{\sqrt[1996]{1997}}{2\sqrt[15]{243}+1}$$

Indicar el denominador resultante.

A) 20 B) 15 C) 25

D) 12 E) 55

36. Proporcionar el valor de: $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}}$

A partir de:

$$\sqrt{11-\sqrt{2}-12}=\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\theta}$$

$\alpha>\theta \wedge \{\alpha;\theta\}\subset \mathbb{N}$

A) 1 B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

37. Racionalizar e indicar su denominador racionalizado de:

$$\frac{8}{(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}$$

A) 1 B) 2 C) 5

D) 3 E) 7

38. El equivalente de:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}}}$$

es:

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}+2$

D) $\sqrt{2}+4$ E) $\sqrt{2}+3$

39. Racionalizar e indicar su denominador racionalizado de:

$$\frac{7}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2-\sqrt[5]{8}}$$

A) 1 B) 3 C) 5

D) 7 E) 9

team CALAPENSHKO

40. Proporcionar el equivalente de:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ C) 1
D) $\sqrt{97}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

41. ¿Cuál es el denominador que se obtiene al racionalizar:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}?$$

A) 13 B) 17 C) 19
D) 23 E) 29

42. Indique el denominador racionalizado de:

$$F=\frac{1}{1+\sqrt[6]{16}-\sqrt[6]{2000}-\sqrt{5}}$$

A) 1 B) 20 C) 10
D) 5 E) 8

43. Señale el denominador racionalizado de:

$$F=\frac{1}{1+\sqrt[6]{16}-\sqrt[6]{2000}-\sqrt{5}}$$

A) 1 B) 1897 C) 2191
D) 3284 E) 2

44. Racionalizar:

$$\frac{21}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$$

indicando su denominador.

A) 2 B) 47 C) 73
D) 19 E) 3

45. Si: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Q}^+$. Calcular "4abc" sabiendo que:

$$\sqrt{7+\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{3}} <> \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

A) 7 B) 9 C) 15
D) 17 E) 36

46. Luego de racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+2)(\sqrt[4]{2}+3)+1}}$$

El denominador es:

A) 87 B) 81 C) 85
D) 91 E) 97

47. Al racionalizar:

$$\frac{6+3\sqrt[4]{63}+2\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7}+\sqrt{3}+2}$$

Qué denominador se obtiene:

A) 544 B) 452 C) 345
D) 454 E) 552

48. Si: $a > 0{,}125$

El equivalente de:

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

es:

A) $\sqrt[3]{a+1}$ B) $a-1$ C) 1
D) $2a$ E) $\sqrt{a-1}$

49. Si: $R(x) \equiv 5x^2-4x+8$ es el resto de extraer la raíz cuadrada al polinomio:

$P(x) \equiv 25x^6-20x^5+34x^4-52x^3+ax^2-bx+c$

Calcular: $a-b+c$

A) 80 B) 81 C) 82
D) 83 E) 84

50. Calcular $a-b$, si el polinomio:

$P(x) \equiv ax^8+bx^6+6x^4-4x^2+1$

es un cuadrado perfecto.

A) 7 B) 9 C) 5
D) 11 E) -5

team CALAPENSHKO

Capítulo 11

Ecuaciones

OBJETIVOS

- Reconocer ecuaciones matemáticas.
- Resolver ecuaciones matemáticas.
- Aplicar teoremas y propiedades referente a las raíces de una ecuación polinominal.

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

ABEL NIELS

ABEL NIELS HENRIK (1 802 – 1 829), matemático noruego nacido en Finnoy y fallecido en Froland. La vida de Abel es un ejemplo dramático de lo estrechamente relacionadas que pueden llegar a estar la pobreza y la tragedia. Nació en el seno de una familia muy numerosa, hijo de un pastor protestante. A los dieciséis años su maestro le aconsejó leer los grandes libros de los matemáticos más eminentes, incluidas las obras de Gauss. En sus lecturas Abel se dio cuenta de que Euler sólo había demostrado el teorema binomial para potencias racionales, y cubrió el hueco dando una demostración válida par el caso general. Al morir su padre contaba con dieciocho años y sobre él cayó la responsabilidad de mantener su familia, pero se las arregló para seguir asistiendo a las clases de la Universidad de Oslo. Durante este período abordó el problema de la solución de la ecuación de quinto grado (recordemos que las de tercer y cuarto grado ya habían sido resueltas en tiempos de Cardano). En primer lugar pensó haber triunfado, pero se dio cuenta de un error en la demostración y pasó a intentar demostrar la imposibilidad de una resolución de esas ecuaciones mediante métodos puramente algebraicos. Esta demostración sobre la imposibilidad de resolver la quíntica, uno de los teoremas más famosos de la matemática le dio Abel cuando tan sólo tenía diecinueve años, pero en un principio no fue tenida en cuenta por los grandes matemáticos de la época.

Por fin consiguió que sus métodos fueran reconocidos, y en 1 829 llegaron noticias de un próxima nombramiento para un puesto de profesor en la Universidad de Berlín. Desgraciadamente Abel había fallecido dos días antes de la llegada de esa noticia como consecuencia de la tuberculosis.

team CALAPENSHKO

ECUACIONES EN UNA INCÓGNITA

ECUACIÓN

Sean A y B dos expresiones matemáticas definidas en un conjunto numérico. Se denomina ecuación a la igualdad: $A = B$ en la cual existe al menos una letra denominado incógnita, veamos un ejemplo:

$$2x - 1 = 7 + x$$

Es una ecuación de incógnita x.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se denomina así al valor (o valores) que asume la incógnita de modo que verifique la igualdad.

Para la ecuación: $2x - 1 = 7 + x$, su solución es: $x = 8$

CONJUNTO SOLUCIÓN (CS)

Es aquel conjunto determinado por extensión donde los elementos son las soluciones de la ecuación dada, veamos un ejemplo:

$$(2x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \; ; \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

$$\therefore \; CS = \left\{ \frac{1}{2} , -1 , 3 \right\}$$

OBSERVACIÓN

1) Si la ecuación se encuentra en función de una sola incógnita, su solución también podrá ser llamada raíz.

2) La diferencia entre una solución y una raíz es que la primera no se puede repetir, mientras que la segunda si.

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos o más ecuaciones son equivalentes si presentan el mismo conjunto solución.

team CALAPENSHKO

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

I. DE ACUERDO A SU POSIBILIDAD DE SOLUCIÓN LAS ECUACIONES PODRÁN SER:

1) **Compatible Determinada:** Si presentan una cantidad limitada de soluciones.

2) **Compatible Indeterminada:** Si presentan infinitas soluciones.

3) **Incompatible:** No presenta solución, frecuentemente se dice que son ecuaciones absurdas.

II. DE ACUERDO CON SU ESTRUCTURA LAS ECUACIONES PODRÁN SER:

1) **Polinomiales:** Si presenta su incógnita en el numerador afectada de exponente entero positivo.

- $x^2 - x = x^3 + 4$

2) **Fraccionarias:** Si presenta su incógnita formando parte de algún denominador.

- $2 + x = 3 - \dfrac{1}{x+1}$

3) **Irracionales:** Si presenta su incógnita afectada de algún signo radical o exponente fraccionario.

- $\sqrt{x-1} = 3 - x$

OBSERVACIÓN

1) En toda ecuación fraccionaria el denominador será diferente de cero.

2) En toda ecuación irracional cuyo índice del signo radical sea un número par, el radicando y la raíz deberán ser no negativos.

- $\dfrac{A}{B} = C \rightarrow B \neq 0$
- $\sqrt{A} = B \rightarrow A \geq 0 \wedge B \geq 0$

3) Las ecuaciones fraccionarias e irracionales previa restricción citadas anteriormente se podrán transformar en ecuaciones polinomiales.

team CALAPENSHKO

ECUACIONES POLINOMIALES

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Donde: x = incógnita

$a_0, a_1, a_2, \ldots \wedge a_n \in \mathbb{C} / a_0 \neq 0$

n = grado de la ecuación / $n \in \mathbb{Z}^+$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado n ($n \in \mathbb{Z}^+$) de cualquier tipo de coeficientes numéricos, tiene por lo menos una raíz generalmente compleja.

Corolario: Todo polinomio de grado n ($n \in \mathbb{Z}^+$) tiene exactamente n raíces

- $x^2 - x + 5 = 0$ tiene 2 raíces
- $x^7 + x = 1$ tiene 7 raíces

TEOREMA DE CARDANO – VIETTE

Dada la ecuación polinomial de grado "n" cuya estructura es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

Si sus raíces son $x_1; x_2; x_3; \ldots \wedge x_n$ se cumple:

1) Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

2) Suma de productos binarios:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

3) Suma de productos ternarios:

$$x_1x_2x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$\vdots$

team CALAPENSHKO

En general: Si S_k representa la suma de los productos de las raíces tomadas de "k" en "k" se cumple:

$$S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_k}{a_0}$$

Veamos un ejemplo para la ecuación:

$$2x^3 + 5x^2 + 10x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

twitter.com/calapenshko

TEOREMAS ADICIONALES

1) **Paridad de raíces imaginarias:** Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial de grado $n \geq 2$ donde $P(x)$ es un polinomio de coeficientes reales, si una raíz de la ecuación es el número imaginario $a + bi$, otra raíz será $a - bi$; $i = \sqrt{-1}$, $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

   Observación: Las raíces imaginarias siempre se presentan en parejas conjugadas, si $P(x)$ es de grado impar, la ecuación $P(x) = 0$ aceptará al menos una raíz real.

2) **Paridad de raíces irracionales:** Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial, donde $P(x)$ es un polinomio de coeficientes racionales, si una raíz de la ecuación es el número irracional $a + \sqrt{b} \,/\, a \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$, entonces otra raíz será $a - \sqrt{b}$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO (LINEAL)

Forma general:

$$ax + b = 0$$

Donde: x = incógnita, asume un valor $a \wedge b \in \mathbb{R} \,/\, a \neq 0$

Resolución de la ecuación:

$$ax + b = 0 \leftrightarrow ax = -b$$

$$\rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore C.S. = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

team CALAPENSHKO

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA)

Forma General:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: x = incógnita, asume dos valores; $a, b \wedge c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Resolución de la ecuación:

1) Por factorización:

- Resolver la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0$

$$(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -2 \quad \therefore CS = \{3, -2\}$$

- Resolver la ecuación: $4x^2 - 9 = 0$

$$(2x+3)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \vee 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2} \quad \therefore CS = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

2) Por la fórmula de Carnot:

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ estas se obtienen a partir de la relación:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Resolver la ecuación: $3x^2 - 2x - 4 = 0$

Observar que: $a = 3, b = -2 \wedge c = -4$

$$x_{1;2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore CS = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{3}, \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right\}$$

team CALAPENSHKO

DISCRIMINANTE (Δ)

Dada la ecuación cuadrática en x:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$$

Se denomina discriminante al operador denotado por Δ y definido de la manera siguiente:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Para la ecuación: $2x^2 - 5x + 1 = 0$

  Su discriminante es: $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(1)$

  $\Delta = 25 - 8$

  $\Delta = 17$

PROPIEDAD DEL DISCRIMINANTE

Dada la ecuación cuadrática en x: $ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$

1) Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

2) Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene raíces reales e iguales.

3) Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas.

PROPIEDAD DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática en "x"

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$$

Se cumple:

1) Suma de raíces: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

2) Producto de raíces: $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

- Para la ecuación: $2x^2 - 10x + 1 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-10}{2} = 5 \; \wedge \; x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

Para determinar la diferencia de las raíces se recomienda utilizar la equivalencia de Legendre.

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4(x_1 \cdot x_2)$$

RAÍCES ESPECIALES

Dada la ecuación cuadrática en x: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ de raíces $x_1 \wedge x_2$ (diferentes de cero), si estas son:

1) **Simétricas (opuestas),** se cumple: $x_1 + x_2 = 0$

2) **Recíprocas (inversas),** se cumple: $x_1 \cdot x_2 = 1$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN x

Siendo S y P, suma y producto de raíces respectivamente, toda ecuación cuadrática en x se determina según la fórmula:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

TEOREMA DE LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

Siendo: $ax^2 + bx + c = 0$

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

Ecuaciones equivalentes, se cumple:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

TEOREMA DE LA RAÍZ COMÚN

Siendo: $ax^2 + bx + c = 0$

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

Ecuaciones que presenta una raíz común, se cumple:

$$(ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) = (ac_1 - a_1c)^2$$

team CALAPENSHKO

ECUACIÓN DE TERCER GRADO (CÚBICA)

Forma General:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

Donde: x = incógnita, asume tres valores a, b, c $\wedge$ d $\in \mathbb{R}$ / a $\neq 0$

Si en la forma general se sustituye x por $x - \frac{b}{3a}$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

Cuyo discriminante se denota por D y se define según la relación

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Con lo cual las raíces de la ecuación (2) se obtienen según:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \cdot w + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot w^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \cdot w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot w$$

Siendo : $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ (raíz cúbica imaginaria de unidad real)

OBSERVACIÓN

Se recomienda utilizar el proceso anterior siempre y cuando la ecuación dada no pueda ser resuelta por algún criterio de factorización.

PROPIEDADES DEL DISCRIMINANTE EN LA ECUACIÓN $x^3 + px + q = 0$

1) Si: D > 0, la ecuación tiene 1 raíz real y 2 raíces imaginarias conjugadas.

2) Si: D = 0, la ecuación tiene 3 raíces reales, 2 iguales y 1 distinta a estas.

3) Si: D < 0, la ecuación tiene 3 raíces reales diferentes.

ECUACIÓN BICUADRADA

Es aquella ecuación polinomial de cuarto grado que presenta la siguiente forma.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

donde: x; incógnita, a, b, c $\in \mathbb{R} - \{0\}$

TEOREMA

Toda ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ donde "m" y "n" son dos raíces no simétricas presenta por conjunto solución:

$$C.S = \{m, -m, n, -n\}$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Siendo m y n las raíces no simétricas de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se cumple:

1) $m^2 + n^2 = -\frac{b}{a}$

2) $m^2 . n^2 = \frac{c}{a}$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA EN x

Siendo m y n las raíces no simétricas, tenemos.

$$x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$$

ECUACIÓN BINOMIA

Forma General:

$$ax^n + b = 0$$

Donde: x = incógnita, asume "n" valores; a, b $\in \mathbb{R} - \{0\}$

OBSERVACIÓN

Para resolver una ecuación binomia se podrá aplicar algún producto notable, cierto criterio de factorización o la radicación de los números complejos.

team CALAPENSHKO

ECUACIÓN TRINOMIA

Forma General:

$$ax^{2n} + bx^{n} + c = 0$$

Donde: x = incógnita, asume "2n" valores; $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$; $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

OBSERVACIÓN

Para resolver una ecuación trinomia se recomienda que en la forma general se realice el siguiente cambio: x^n por y, con lo cual la ecuación sería:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Donde los valores de y se podrán obtener según los criterios vistos en la resolución de una ecuación cuadrática, para finalmente resolver la siguiente ecuación binomia: $x^n = y$

ECUACIÓN RECÍPROCA

Sea P(x) un polinomio de coeficientes reales, cuyo grado es mayor o igual que dos. P(x) = 0 será una ecuación recíproca si P(x) es un polinomio cuyos coeficientes de sus términos equidistantes son iguales o de signos opuestos.

Veamos algunos ejemplos:

- $2x^2 + 5x + 2 = 0$
- $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$
- $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 5 = 0$
- $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

PROPIEDADES

1) En toda ecuación recíproca se cumple que si $r \neq 0$ es una raíz, entonces otra raíz será $\frac{1}{r}$

2) Toda ecuación recíproca de grado impar acepta como raíz a 1 ó – 1.

3) Si P(x) = 0 es una ecuación recíproca de grado "n" se verifica lo siguiente:

$$P(x) \equiv x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Resolver cada siguiente ecuación:

A) $x-1=7-x$

B) $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+1}{2}$

C) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{4}=1$

D) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=1$

E) $\frac{5x+2}{2}=\frac{2x-5}{4}+1$

2. Determine el conjunto solución en cada caso:

A) $x^2=4$

B) $x^3=25x$

C) $x^2=x+12$

D) $2x^2+2=5x$

E) $x^3+x^2=x+1$

3. Vincula con una línea cada ecuación de la izquierda con su solución de la derecha.

A) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=a$ I. ab

B) $\frac{x}{ab}+\frac{x}{ac}+\frac{x}{bc}=a+b+c$ II. abc

C) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=a+b$ III. a + b

4. Marcar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda.

I. Toda cuadrática en x tiene dos soluciones .....( )

II. Toda cuadrática en x tiene dos raíces. .....( )

III. Si un polinomio cuadrático acepta raíz nula, dicho polinomio carece de término independiente .....( )

5. Calcular la suma y el producto de las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones:

A) $x^2=x+4$

B) $(2x+3)^2-x=x^2+10$

C) $2x^3=4x^2-x+7$

D) $x^4+x^2+1=x^3+x$

E) $x^5-x=10$

6. Coloca en cada paréntesis E. C. (Ecuación compatible) o E. I. (Ecuación incompatible) según corresponda.

A) $\sqrt[3]{x-2}=-3$ ( )

B) $\frac{2}{x+1}=0$ ( )

C) $x+\frac{5}{x-2}=2+\frac{5}{x-2}$ ( )

D) $\sqrt{2x-1}=-2$ ( )

E) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1$ ( )

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Resolver:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$$

Resolución: Efectuando se tendrá:

$$\frac{2(x+1)}{3.5}=\frac{3(x-6)}{4.3}$$

$$8(x+1)=15(x-6)$$

$$8x+8=15x-90$$

$$98=7x \rightarrow x=14$$

$$\therefore CS=\{14\}$$

PROBLEMA 2 Resolver:

$$\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)=\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}$$

Resolución: Efectuando se tendrá:

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-x+3=\frac{x}{3}+1+\frac{1}{6}$$

Por transposición de términos:

$$\underbrace{\frac{x}{2}-x-\frac{x}{3}}=1+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}-3$$

$$-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=-2+\frac{2}{3}$$

$$-\frac{5x}{6}=-\frac{4}{3} \rightarrow x=\frac{8}{5}=1,6$$

$$\therefore CS=\{1,6\}$$

PROBLEMA 3 Resolver:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{4}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{2}\right)=-\frac{1}{5}$$

Resolución: Simplificando cada término se tendrá:

$$\frac{2x-1}{10}-\frac{3x+2}{3}-\frac{x-2}{10}=-\frac{1}{5}$$

Dando M C M tenemos:

$$\frac{3(2x-1)-10(3x+2)-3(x-2)}{30}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{6x-3-30x-20-3x+6}{30}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-27x-17}{30}=-\frac{1}{5}$$

$$-27x-17=-6$$

$$-27x=11 \rightarrow x=-\frac{11}{27}$$

$$\therefore CS=\left\{-\frac{11}{27}\right\}$$

PROBLEMA 4 Resolver:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right]-1=2$$

twitter.com/calapenshko

Resolución: Efectuando sucesivamente

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right]=3$$

$$\left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right]=6$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]=7$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1=14$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=15$$

$$\frac{1}{2}x-1=30$$

$$\frac{1}{2}x=31 \Leftrightarrow x=62$$

$$\therefore CS=\{62\}$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 5 Resolver:

$$\frac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}=2$$

Resolución: Efectuando en el primer miembro:

$$\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}}=2$$

$$\frac{2x(x+1)}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$$

Aplicando Legendre en el denominador y simplificando se consigue:

$$\frac{x+1}{2}=2$$

$$x+1=4 \rightarrow x=3$$

$\therefore$ CS= {3}

PROBLEMA 6 Despejar x:

$$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Resolución: Dando M C M a cada miembro:

$$\frac{cx+ax+bx}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$$

Simplificando tenemos:

$$(a+b+c)x=ab+bc+ac$$

$$\therefore x=\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$$

PROBLEMA 7 Despejar "x" en:

$$\frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-a)(x-c)}+\frac{(x-c)^2}{(x-b)(x-a)}=3$$

Sabiendo que: $a \neq b \neq c$

Resolución: Dando M C M al primer miembro:

$$\frac{(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}=3$$

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$$

team CALAPENSHKO

Recuerda que si: $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$ se cumple que:

$m + n + p = 0 \vee m = n = p = cte$

En el problema se aprecia que:

$$(x - a) + (x - b) + (x - c) = 0$$

Es decir: $3x = a + b + c$

$$\therefore x = \frac{a + b + c}{3}$$

PROBLEMA 8 Si: $\frac{2x - 1}{x + 1} = 4$ y $mx + 2 = 3x - 1$ son ecuaciones equivalentes.

¿Cuál es el valor de "m"?

Resolución: Resolviendo la ecuación:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = 4 \leftrightarrow 2x - 1 = 4x + 4$$

$$-5 = 2x \leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Por ser ecuaciones equivalentes, $x = -\frac{5}{2}$ también será solución de la ecuación:

$$mx + 2 = 3x - 1$$

Reemplazando $x = -\frac{5}{2}$:

$$-\frac{5}{2}m + 2 = -\frac{15}{2} - 1$$

$$2 + \frac{15}{2} + 1 = \frac{5m}{2}$$

Multiplicando por dos:

$$4 + 15 + 2 = 5m$$

$$21 = 5m$$

$$\therefore m = \frac{21}{5}$$

PROBLEMA 9 Resolver:

$$\frac{x - 1}{2} + \frac{x - 2}{3} + \frac{x - 3}{4} = x + 1$$

Resolución: La ecuación dada es:

$$\frac{6(x - 1) + 4(x - 2) + 3(x - 3)}{12} = x + 1$$

Efectuando tenemos:

$$\frac{6x - 6 + 4x - 8 + 3x - 9}{12} = x + 1$$

$$13x - 23 = 12x + 12$$

team CALAPENSHKO

$$13x - 12x = 12 + 23$$
$$x = 35$$

$$\therefore \quad CS = \{35\}$$

PROBLEMA 10 Resolver:

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = (x+2)^2$$

Resolución: La ecuación es : $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 4x + 4$

Reduciendo tenemos:

$$2x^2 + 8x + 10 = x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 + 4x + 6 = 0$$

Por fórmula tenemos:

$$x_{1;2} = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$x_{1;2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad CS = \left\{-2 + \sqrt{2}\,i\,;\ -2 - \sqrt{2}\,i\right\}$$

PROBLEMA 11 Despejar "x" de:

$$\frac{a}{b}\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$$

Resolución: Dando uso de la suma de cubos procedemos a resolver la ecuación.

$$\frac{a}{b} - \frac{a^2}{bx} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{ax} = 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 = \frac{a^2}{bx} + \frac{b^2}{ax}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} = \frac{a^3 + b^3}{abx}$$

$$(a^2 + b^2 - ab)\,.\,x = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$\therefore \quad x = a + b$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Resolver:

$$\frac{(x+4)^3-(x-3)^3}{(x+4)^2+(x-3)^2}=7$$

Resolución: Efectuando cada una de las potencias del primer miembro, se tendrá:

$$\frac{21x^2+21x+91}{2x^2+2x+25}=7$$

$$21x^2+21x+91=14x^2+14x+175$$

$$7x^2+7x-84=0$$

$$x^2+x-12=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0$$

$$x=3 \text{ ó } x=-4$$

$$\therefore \quad C.S.=\{3;-4\}$$

PROBLEMA 13 Para qué valor del parámetro "m" las raíces de la cuadrática en x:

$$x^2+2(m+2)x+9m=0$$

son iguales.

Resolución: Por condición el discriminante de la cuadrática en "x" deberá ser cero.

$$[(2(m+2)]^2-4(1)(9m)=0$$

$$4(m^2+4m+4)-36m=0$$

$$m^2+4m+4-9m=0$$

$$m^2-5m+4=0$$

$$(m-4)(m-1)=0$$

$$\therefore \quad m=4 \text{ ó } m=1$$

PROBLEMA 14 Para qué valor de "a" las raíces de la cuadrática en x:

$$ax^2-(a+3)x+2a+1=0$$

Difieren en 2.

Resolución: De acuerdo con la propiedad de las raíces de una cuadrática, tenemos:

$$x_1+x_2=\frac{a+3}{a}\ ;\ x_1\cdot x_2=\frac{2a+1}{a}$$

Por equivalencia de Legendre se plantea:

$$(x_1+x_2)^2-\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\text{Condición}}=4(x_1\cdot x_2)$$

$$\left(\frac{a+3}{a}\right)^2-(2)^2=4\cdot\left(\frac{2a+1}{a}\right)$$

team CALAPENSHKO

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2}-4=\frac{8a^2+4a}{a^2}$$

$$a^2+6a+9-4a^2=8a^2+4a$$

$$11a^2-2a-9=0 \Leftrightarrow (11a+9)(a-1)=0$$

$$\therefore \quad a=-\frac{9}{11} \text{ ó } a=1$$

PROBLEMA 15 Si dos raíces de la cúbica en x:

$$x^3+3x^2+ax+b=0$$

Son –2 y 4. Calcular: a . b

Resolución: Como la ecuación es de tercer grado, debe tener 3 raíces, si x_3 es la raíz desconocida según el teorema de Cardano-Viette se cumple:

$$-2+4+x_3=-3 \Rightarrow x_3=-5$$

Ahora se debe cumplir lo siguiente:

$$(x+2).(x-4).(x+5) \equiv x^3+3x^2+ax+b$$

$$x^3+3x^2-18x-40 \equiv x^3+3x^2+ax+b$$

Observa que: $a=-18$ y $b=-40$

$$\therefore \quad a \,.\, b = 720$$

PROBLEMA 16 Determine la suma de todos los valores reales que asume x en a siguiente ecuación recíproca:

$$(m+1)x^4+(n+3)x^3+9x^2+(8-m)x+(n-2)=0$$

Resolución: Por definición tenemos:

$$m+1=n-2 \rightarrow m-n=-3 \quad \text{.....(1)}$$

$$n+3=8-m \rightarrow m+n=5 \quad \text{.....(2)}$$

Resolviendo (1) y (2):

$$m=1 \text{ y } n=4$$

Ahora la ecuación será:

$$2x^4+7x^3+9x^2+7x+2=0$$

Por aspa doble especial:

$$(x^2+x+1)\,.\,(2x^2+5x+2)=0$$

Una rápida inspección permite observar que la ecuación solo acepta raíces reales si:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \quad \sum \text{raíces reales} = -\frac{5}{2}$$

PROBLEMA 17 Si 2 y –5 son raíces de la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - (5m+4)x^2 + (mn)^2 = 0 \ , \ \text{con } n > 0$$

Hallar: $m - n$

Resolución: Por dato 2 y -5 son dos raíces, luego por teorema las otras dos raíces son -2 y 5, construyendo la ecuación se tiene:

$$(x-2)(x+2)(x-5)(x+5) = 0$$

Efectuando : $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

La ecuación obtenida con la ecuación dada deben ser iguales, entonces:

$$5m + 4 = 29 \quad \text{y} \quad (mn)^2 = 100$$

$$m = 5 \quad , \quad (5n)^2 = 100$$

$$m = 5 \quad , \quad n = 2$$

$$\therefore \quad m - n = 3$$

PROBLEMA 18 Resolver:

$$x - \sqrt{x^2 - 8} = 4$$

Resolución: La ecuación mostrada se puede representar así:

$$x - 4 = \sqrt{x^2 - 8}$$

Elevando al cuadrado: $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8$

$$24 = 8x$$

$$3 = x$$

Reemplazando $x = 3$ en la ecuación original:

$$3 - 1 = 4$$

$$2 = 4 \ \text{¡Absurdo!}$$

$\therefore$ La ecuación es incompatible

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 19 Calcular "n . k . a . b" si P(x) es un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales de la forma genérica:

$$P(x) = x^{n+1} - ax^k + ... + b$$

Donde dos de sus raíces son: $\frac{10}{1+3i}$ y $\frac{13}{2+3i}$

Resolución: Transformando las raíces dadas:

$$\frac{10}{1+3i} = \frac{10(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{10(1-3i)}{10} \Rightarrow x_1 = 1-3i$$

$$\frac{13}{2+3i} = \frac{13(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13(2-3i)}{13} \Rightarrow x_3 = 2-3i$$

Por paridad de raíces imaginarias : $x_1 = 1-3i \rightarrow x_2 = 1+3i$

Formando la cuadrátida de raíces x_1 y x_2 tenemos : $x^2 - 2x + 10 = 0$

Por paridad de raíces imaginarias : $x_3 = 2-3i \rightarrow x_4 = 2+3i$

Formando la cuadrática de raíces x_3 y x_4 tenemos : $x_2 - 4x + 13 = 0$

Como P(x) es un polinomio de grado mínimo y de coeficientes reales que acepta como raíces a x_1 y x_3, P(x) también deberá aceptar como raíces a x_2 y x_4, con lo cual P(x) será:

$$P(x) = (x^2 - 2x + 10) . (x^2 - 4x + 13)$$

Efectuando la multiplicación:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 31x^2 - 66x + 130$$

Por condición podemos notar que : $n = 3$; $a = 6$; $k = 3$ y $b = 130$

$$\therefore \quad n . k . a . b = 7020$$

PROBLEMA 20 Regocijándose los monos divididos en dos bandos, su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza. Con alegres gritos doce atronando están. ¿Cuántos monos hay en total?

Resolución: Sea x el número total de monos. Luego por condición se tendrá:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$(x - 48) . (x - 16) = 0$$

De donde: $x = 48$ ó $x = 16$

$\therefore$ La condición se verifica para 48 ó 16 monos.

PROBLEMA 21 ¿Qué día del año 2010 la cosita y su amorcito cumplieron seis meses de enamorados, si la mañana siguiente en un almanaque diario el número de hojas arrancadas excedió en 5 a los $\frac{5}{13}$ del número de hojas que quedaban?

Resolución: Observar que 2010 no es un año bisiesto por lo tanto tiene 365 días y Febrero tiene 28 días.

Sea x el número de hojas arrancadas, luego (365 – x) representa al número de hojas que faltan arrancar.

Por condición: $x = \frac{5}{13}(365 - x) + 5$

$$13x = 5(365 - x) + 65$$

$$18x = 1890 \Rightarrow x = 105$$

A la mañana siguiente del día en mención se habían arrancado las hojas distribuidas así:

31 del mes de Enero
28 del mes de Febrero ⇨ hasta aquí van 90 días
31 del mes de Marzo

Los otros 15 días corresponden al mes de Abril.

Observar que el día en que verificó la condición del almanaque diario fue el 16 de abril.

∴ La pareja cumplió seis meses el 15 de Abril.

PROBLEMA 22 Si "m" es un número real de modo que el polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 3x + m$$

tiene dos raíces reales diferentes; determine la suma de todos los valores reales que asume "m".

Resolución: Por condición $x^3 - 3x + m = 0$ tiene solamente 2 raíces reales diferentes, lo cual involucra que la tercera raíz también debe ser real pero igual a una de las dos raíces diferentes mencionadas. Es evidente que estamos frente a la segunda propiedad del discriminante de una ecuación cúbica incompleta, es decir debemos plantear:

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

team CALAPENSHKO

Para la ecuación dada:

$$\left(\frac{-3}{3}\right)^3+\left(\frac{m}{2}\right)^2=0 \leftrightarrow -1+\frac{m^2}{4}=0$$

$$m^2=4 \rightarrow m=2 \text{ ó } m=-2$$

$$\therefore \quad \sum \text{Valores reales de } m=0$$

PROBLEMA 23 Si: $x_1; x_2; x_3$ y x_4 son las raíces de la ecuación:

$$x^4-3x^3-2x^2+x+4=0$$

Calcular: $F=\sum_{k=1}^{4}\left(x_k^2\right)$

Resolución: De acuerdo con el teorema de Cardano-Viette:

S_1 = Suma de raíces tomadas de 1 en 1

S_2 = Suma de productos binarios de las raíces

Se pide: $F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$

Dando uso de la potencia de un polinomio la expresión F se puede representar así:

$$F=(S_1)^2-2(S_2)$$

Donde: $S_1=3 \quad y \quad S_2=-2$

$$F=(3)^2-2(-2)=9+4$$

$$\therefore \quad F=13$$

PROBLEMA 24 Resolver la siguiente ecuación es "x":

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}=\frac{5}{84}$$

Resolución: Debemos reconocer que:

$$\frac{5}{84}=\frac{1}{7}-\frac{1}{12}$$

Por tal razón la ecuación quedará así:

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}=\frac{1}{7}-\frac{1}{12}$$

Transponiendo términos:

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{1}{7}=\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}-\frac{1}{12}$$

Factorizando obtenemos:

$$\frac{1}{7}\left[\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-5)}-1\right]=\frac{1}{12}\left[\frac{(x+4)(x-7)}{(x+5)(x-8)}-1\right]$$

Luego de realizar operaciones en cada corchete, obtenemos:

$$\frac{1}{7}\left[\frac{(x+2)(x-4)-(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-5)}\right]=$$

$$\frac{1}{12}\left[\frac{(x+4)(x-7)-(x+5)(x-8)}{(x+5)(x-8)}\right]$$

Efectuamos las multiplicaciones indicadas y reduciendo, nos queda:

$$\frac{1}{7}\left[\frac{7}{x^2-2x-15}\right]=\frac{1}{12}\left[\frac{12}{x^2-3x-40}\right]$$

Simplificando y transponiendo términos, obtenemos:

$$x^2-3x-40=x^2-2x-15$$

Finalmente, luego de reducir términos semejantes, encontramos

$$x=-25$$

$$\therefore \quad CS=\{-25\}$$

PROBLEMA 25 Indicar el conjunto solución de la ecuación:

$$\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$$

Resolución: La ecuación dada se podrá escribir así:

$$\sqrt[3]{a+x}^2+4\sqrt[3]{a-x}^2=5\sqrt[3]{(a+x)(a-x)}$$

Aplicando teoremas de exponentes y transponiendo términos conseguimos:

$$\left(\sqrt[3]{a+x}\right)^2-5\left(\sqrt[3]{a+x}\right)\left(\sqrt[3]{a-x}\right)+4\left(\sqrt[3]{a-x}\right)^2=0$$

Utilizando el criterio del aspa simple en el 1er miembro, la ecuación a resolver será:

$$\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}\right)\left(\sqrt[3]{a+x}-4\sqrt[3]{a-x}\right)=0$$

Igualando a cero cada factor:

$$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=0 \quad \vee \quad \sqrt[3]{a+x}-4\sqrt[3]{a-x}=0$$

Resolviendo cada ecuación por separado, tendremos:

$$\sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{a-x} \quad \vee \quad \sqrt[3]{a+x}=4\sqrt[3]{a-x}$$

Elevando al cubo, obtenemos:

$$a+x=a-x \quad \vee \quad a+x=64(a-x)$$

Despejando "x" en cada ecuación:

$$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{63a}{65}$$

Finalmente el conjunto solución de la ecuación será:

$$\therefore \quad CS=\left\{0;\frac{63a}{65}\right\}$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 26 Indicar la mayor solución de la ecuación

$$\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}+6\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}=5$$

Resolución: Haciendo el siguiente cambio de variable: $\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}=a$; donde : $a \geq 0$;

Luego, en la ecuación dada tendremos:

$$a+\frac{6}{a}=5$$

Efectuando operaciones, tendremos:

$$a^2-5a+6=0$$

Descomponiendo en 2 factores e igualando a cero cada uno, tendremos:

$$a_1=2 \;\; ; \;\; a_2=3$$

Si : a = 2; tendremos :

$$\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}=2 \Rightarrow \frac{x+5}{x-5}=4;$$

es decir : $x=\frac{25}{3}$

Si : a = 3; tendremos :

$$\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}=3 \Rightarrow \frac{x+5}{x-5}=9;$$

es decir : $x=\frac{25}{4}$

Finalmente se observa que la mayor solución es:

$$\therefore \; x=\frac{25}{3}$$

PROBLEMA 27 Resolver:

$$\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=\frac{91}{37}$$

Resolución: Dado que los términos del 1er miembro corresponden al desarrollo del cubo de un binomio, utilizaremos la propiedad de proporciones de este modo nuestra ecuación quedará así:

$$\frac{(x^3+3x)+(3x^2+1)}{(x^3+3x)-(3x^2+1)}=\frac{91+37}{91-37}$$

Efectuando operaciones nos queda:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{128}{54}$$

Reconociendo los productos notables del 1er miembro:

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{128}\ 64}{\cancel{54}\ 27}$$

Simplificando y acomodando, nuestra ecuación equivale a:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

Extrayendo signo radical de índice 3, obtenemos:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{3}$$

De aquí:

$$3x+3 = 4x-4$$
$$x = 7$$
$$\therefore \quad CS = \{7\}$$

PROBLEMA 28 Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces reales de la ecuación recíproca:

$$mx^4 + (n-3)x^3 - 10x^2 + (5-m)x + n + 6 = 0;$$

Calcular el valor de:

$$(x_1 + x_2)^{x_1 - x_2}$$

Resolución: Por tratarse de una ecuación recíproca, se debe cumplir una igualdad entre los coeficientes equidistantes de los extremos. Según esto se puede establecer que:

$$m = n+6 \quad \Rightarrow \quad m-n = 6 \ \ldots\ldots(1)$$
$$n-3 = 5-m \quad \Rightarrow \quad m+n = 8 \ \ldots\ldots(2)$$

Resolviendo, tendremos:

$$m = 7 \quad \wedge \quad n = 1$$

Luego la ecuación a resolver será:

$$7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$$

Factorizando el polinomio de 4to grado según el método del aspa doble especial, tendremos:

$$(7x^2 + 12x + 7)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

Para reconocer las raíces reales de esta ecuación, cada factor lo igualaremos a cero, veamos:

1) $7x^2 + 12x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = (12)^2 - 4(7)(7) = -52$

Dado que $\Delta < 0$, deducimos que esta ecuación no tiene raíces reales.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

Luego la ecuación tiene dos raíces reales iguales:

$$x_1 = x_2 = 1$$

Finalmente el valor pedido será:

$$\therefore \quad (x_1 + x_2)^{x_1 - x_2} = 2^0 = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 29 Determine el valor de "b". Si una raíz de la ecuación: $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0; a, b \in \mathbb{R}$ es $x_1 = 2 + i$.

Resolución: De acuerdo con el teorema de la paridad de raíces imaginarias, si una raíz es $x_1 = 2+i$, otra raíz será: $x_2 = 2 - i$.

Por Cardano – Viette: $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$$(2 + i) + (2 - i) + x_3 = 5$$
$$4 + x_3 = 5$$
$$x_3 = 1$$

Asimismo por Cardano – Viette podemos plantear la siguiente relación:

$$x_1 . x_2 . x_3 = -b$$
$$b = -x_1 . x_2 . x_3$$
$$b = -(2 + i)(2 - i)(1)$$
$$\therefore \quad b = -5$$

PROBLEMA 30 Si $3 + \sqrt{2}$ es una raíz de la ecuación: $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + b = 0;\ a, b \in \mathbb{Q}$.

Calcular "a + b"

Resolución: De acuerdo con el teorema de la paridad de raíces irracionales.

Si una raíz es $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, otra raíz será: $x_2 = 3 - \sqrt{2}$

Ahora formaremos una cuadrática de raíces $x_1 \wedge x_2$:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Donde: $S = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6$

$$P = (3 + \sqrt{2}) . (3 - \sqrt{2}) = 7$$

Con lo cuál la cuadrática es: $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Observa que dos raíces de $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + b$ son raíces de $x^2 - 6x + 7$, luego podemos plantear la siguiente división exacta:

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + b}{x^2 - 6x + 7}$$

Y según el método de Horner:

	1	−2	−4	a	b
6		6	−7	−28	−91
−7			24	78	
	1	4	13	0	0

En el residuo: $a - 28 + 78 = 0 \quad \wedge \quad b - 91 = 0$

$$a = -50 \ \wedge \ b = 91$$
$$\therefore \quad a + b = 41$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determine la solución de la ecuación:

$$54(3x-3)+8(4x-3)=72(x-3)$$

A) $-\frac{13}{61}$ B) $-\frac{14}{61}$ C) $-\frac{15}{61}$
D) $-\frac{16}{61}$ E) $-\frac{17}{61}$

2. Resolver:

$$\frac{a}{b}(x-a)=\frac{b}{a}(x-b),\ a\neq b$$

A) $\frac{a+b}{a-b}$ B) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$
C) $\frac{a-b}{a+b}$
D) $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$ E) $\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$

3. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{b(x-b)}{a}+\frac{a(x-a)}{b}=x,\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

A) $\{a-b\}$ B) $\{b\}$ C) $\{a+b\}$
D) $\{a^2+b^2\}$ E) $\{a\}$

4. Si α,β con $\alpha>\beta$ son raíces de la ecuación:

$$(4x-6)^2=(3x+1)^2$$

Hallar: $14\beta-\alpha$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

5. Determinar la menor raíz de la ecuación de segundo grado:

$$P(x)=(a-2)x^2-(3a-8)x+a-9=0$$

siendo P(x) un polinomio mónico.

A) –3 B) –2 C) –1
D) 2 E) 3

6. Si la suma de las raíces de la ecuación:

$$a^2x^2-2ax+21=0$$

es 5. Hallar: a

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{5}$
D) 1 E) $-\frac{5}{2}$

7. Si las raíces de la ecuación:

$$3(m+3)x^2=(14m+3)x-(5m-1)$$

son recíprocas, hallar m.

A) 3 B) –2 C) 5
D) 2 E) –3

8. Si las raíces de la ecuación:

$$x^2+(m-3)x-3m=0$$

son α,β y satisfacen: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{34}{15}$. Hallar el valor fraccionario de m.

A) $\frac{9}{5}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

9. ¿Qué relación debe cumplirse para que en la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0$$

una raíz sea el doble de la otra?

A) $ab=3c^2$ B) $ac=5b$ C) $ab=2c^2$
D) $2b^2=9ac$ E) $ab=2c$

10. Determinar "m" de modo que la diferencia de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$$x^2-mx+12=0$$

sea igual a 7.

A) ± 2 B) ± 7 C) ± 4
D) ± 6 E) ± 1

team CALAPENSHKO

11. Después de resolver:

$$x+\sqrt{6x+6}=11$$

Se obtiene como solución:

A) 23 B) 17 C) 5
D) 6 E) 20

12. Indicar el valor de "x" que satisface la ecuación:

$$\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}-1=\frac{b^2+c^2-x}{(c-a-b)(b-a-c)}$$

A) a + b + c B) 9/8 abc C) 3a
D) ab/4 E) bc

13. Dada la ecuación:

$$\frac{x(x-2a)}{\sqrt{bc}}+\frac{a-x}{\sqrt{c}}-\frac{a-x}{\sqrt{b}}=1-\frac{a^2}{\sqrt{bc}}$$

una de las raíces es:

A) $a+\sqrt{c}$ B) $a-\sqrt{b}$ C) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
D) $\sqrt{c}-\sqrt{b}$ E) $a-\sqrt{c}$

14. Indicar el valor que debe tener $(m+n)^2$ sabiendo que las ecuaciones:

$$(m-2)x^2-(m+2)x-(n^3+6)=0$$
$$(m-1)x^2-(m^2+1)x-(4n^3-4)=0$$

son equivalentes.

A) 12 B) 16 C) 25
D) 49 E) 81

15. Indicar los valores imaginarios de "m", de modo que las cuadráticas siguientes:

$$mx^2+x-1=0$$
$$x^2+x+1=0$$

acepten una raíz común.

A) $\pm\sqrt{5}\,i$ B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$
D) $\pm\sqrt{3}\,i$ E) $\pm\sqrt{2}\,i$

16. Dada la ecuación:

$$x^4+px^2+q=0$$

la suma de las séptimas potencias de sus raíces es:

A) $2p^2-q$ B) p^7+q^7 C) $(p+q)^7$
D) 0 E) $(2p+q)^7$

17. Indicar la suma de coeficientes de una ecuación bicuadrada de raíces:

$$x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ \text{y}\ x_4$$

Si: $x_1=2$ y $x_2.x_3.x_4=32$

A) 84 B) 85 C) 45
D) 95 E) 44

18. Después de resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=4$$

se obtiene como solución:

A) 1/6 B) 1/4 C) 1/5
D) 9/16 E) 9/8

19. ¿Cuáles de las alternativas que se muestran será la raíz de la ecuación:

$$2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0\ ?$$

A) 3 B) –2 C) 1/2
D) –1/2 E) 1/4

20. Qué se puede afirmar de las raíces de la ecuación:

$$kx^2+(k+2)x+8=0$$

sabiendo que sus raíces: x_1 y x_2 verifican la relación:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2$$

A) Recíprocas negativas
B) Reales e iguales
C) Reales y diferentes
D) Imaginarias
E) De igual valor absoluto y signo diferente

21. El siguiente polinomio:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$$

Presenta:

A) 5 raíces diferentes
B) 2 raíces de multiplicidad 2
C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3
D) 1 raíz de multiplicidad 4
E) 1 raíz de multiplicidad 5

22. Indicar una de las soluciones de la ecuación de incógnita "x"

$$\frac{a-x}{a+x}+\frac{b-x}{b+x}=\frac{a+x}{a-x}+\frac{b+x}{b-x}$$

A) $\pm ab$ B) $\pm a$ C) $\pm b$
D) $\sqrt{ab}$ E) $\pm\sqrt{ab}$

23. Indicar la suma de las raíces de la siguiente ecuación:

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

A) 12 B) 16 C) 15
D) 18 E) 13

24. Dada la ecuación:

$$x^3 - 28x + 2m = 0$$

Hallar "m", tal que una raíz sea el doble de la otra.

A) {2; –2} B) {12; –12} C) {7; 7}
D) {24; –24} E) {5; –5}

25. Sean:
P(x): el polinomio de menor grado con coeficientes racionales que tiene a: $\sqrt{3}$ y $1 + i$, como raíces simples.
Q(x): el polinomio de menor grado con coeficientes reales que tiene a: $\sqrt{3}$ y $1 + i$, como raíces simples.
Luego, podemos decir:

A) Grado (P) = Grado (Q)
B) Grado (P) < Grado (Q)
C) Grado (P) > Grado (Q)
D) Grado (P) = 3
E) Grado (Q) = 4

26. Si: $1 - i$, es raíz de:

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$$

entonces, la suma de las otras raíces es:

A) $4 - i$ B) $3 + i$ C) $1 - 4i$
D) $1 + 2i$ E) 4

27. Indicar la suma de los cuadrados de los ceros no racionales de la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$$

A) 14 B) 13 C) 10
D) 5 E) 2

28. Si las ecuaciones:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$x^3 - (\alpha+\beta)x + 3 = 0 \quad \text{.....(2)}$$

Son equivalentes; calcular $\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

29. Determine los valores reales a y b, de modo que: $1 - i$ sea una raíz de la ecuación:

$$x^5 + ax^3 + b = 0$$

Indicar la suma.

A) 8 B) 6 C) 9
D) 10 E) 7

30. Resolver e indicar el valor de x en la ecuación:

$$\frac{1}{ax+n+1}=\frac{1}{(ax+1)(ax+2)}+\frac{1}{(ax+2)(ax+3)}+\frac{1}{(ax+3)(ax+4)}+\ldots+\frac{1}{(ax+3)(ax+n+1)}$$

A) $\frac{n+1}{a}$ B) $\frac{n-1}{a}$ C) $\frac{a}{n}$
D) $\frac{a-1}{n}$ E) $\frac{n+1}{n}$

team CALAPENSHKO

31. Un comerciante compró cierto número de lapiceros por S/. 320, si cada lapicero hubiera costado 4 soles menos habría podido comprar 4 lapiceros más. ¿Cuánto costó cada lapicero?

A) S/.16 B) S/.14 C) S/.12
D) S/.15 E) S/.20

32. Una vendedora lleva al mercado una cesta de huevos. Si cuando vende los 2/9 menos 5 huevos, añadiese 37 huevos a los que le quedan, entonces el número de huevos que lleva al mercado quedaría aumentado en 1/6. ¿Cuántos huevos llevaba en la cesta?

A) 66 B) 136 C) 96
D) 84 E) 108

33. Un anciano deja una herencia de 2mn soles a un cierto número de parientes, "m" de estos renuncian a su parte y entonces cada uno de los restantes queda beneficiado en "n" soles más. ¿Cuántos son los parientes?

A) 2n B) m C) 2m
D) n E) m + n

34. Las dos terceras partes de la edad de "A" excede en 6 años a la edad de "B" y hace 6 años la edad de "B" era los 2/9 de la de "A". ¿Qué edad tiene "A"?

A) 20 B) 16 C) 22
D) 24 E) 26

35. Un campesino compró un cierto número de palomas, pavos y gallinas, pagando por cada animal tantos soles como aves compró de esa clase, en total compró 23 aves y gastó 211 pesos. Indicar el número de gallinas que compró.

A) 5 B) 3 C) 6
D) 4 E) 7

36. Indicar el valor de x que se obtiene al resolver:

$$\frac{\sqrt{5x+a}+\sqrt{6x}}{\sqrt{5x+a}-\sqrt{6x}}=4$$

A) $\frac{7a}{35}$ B) $\frac{6a}{5}$ C) $\frac{3a}{35}$
D) $\frac{3a}{25}$ E) $\frac{2a}{15}$

37. Calcular el valor de "x" que satisface la ecuación:

$$\frac{a+2x+\sqrt{a^2-4x^2}}{a+2x-\sqrt{a^2-4x^2}}=\frac{5x}{a}$$

A) $\pm\frac{5}{2}a$ B) $\pm\frac{2}{5}a$ C) $-\frac{5}{2}a$
D) $\pm 5a$ E) $\pm 10a$

38. Dada la ecuación:

$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$$

La suma de sus raíces es:

A) 100 B) 48 C) 88
D) 16 E) 36

39. Resolver:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x+a+b+c}=0$$

Dando luego la diferencia entre la mayor y menor de sus raíces: (a < b < c)

A) c – a – b B) a – b + c
C) a + b + c
D) a + b – c E) b – a – c

40. Obtener la suma de las raíces reales de:

$$\sqrt[7]{x^2-4x+3}+\sqrt[7]{x^2-6x+8}=\sqrt[7]{3x^2-10x+11}$$

A) 9 B) 8 C) 10
D) 11 E) 12

team CALAPENSHKO

41. A partir de la ecuación polinomial:

$$x^3-(n+3)x^2-(n+1)x+n^2+1=0$$

Calcular el valor de "n", tal que la expresión:

$$K=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

adopte su mínimo valor.

Siendo: x_1, x_2, x_3, raíces de la ecuación.

A) -2 B) 5 C) -5
D) 3 E) -4

42. Una de las raíces de la ecuación:

$$x^4+64=0$$

es:

A) $2+2\sqrt{2}$ B) $2-2\sqrt{2}$ C) $2-2i$
D) $4-\sqrt{2}$ E) $4+2\sqrt{2}$

43. Calcular el término independiente de x en el polinomio P(x) de coeficientes enteros de menor grado que acepte como una de las raíces a:

$$x=\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}$$

A) -12 B) -4 C) 6
D) 8 E) -18

45. Calcular la suma de los valores que admite "a", para que la ecuación:

$$x^3+(1-a)x^2+(7-2a)x+18=0$$

admita dos soluciones.

A) -2 B) $-9,5$ C) 7,5
D) 2 E) 13,5

46. Indicar la suma de las raíces no imaginarias, de la siguiente ecuación:

$$x^6-18\sqrt{2}\,x^3+64=0$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

44. Si las raíces de la ecuación:

$$x^3+3x^2+5x+7=0$$

Son r, s y t. Determine una ecuación cúbica cuyas raíces son: $\frac{r+1}{r}; \frac{s+1}{s}; \frac{t+1}{t}$

Dar como respuesta la suma de raíces.

A) 2 B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{16}{7}$
D) $\frac{7}{4}$ E) 8

47. Si: $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots; \alpha_n$ son las raíces de la ecuación polinomial: $x^n-2x^2+3x+1=0$

Proporcionar un valor de: $t=\prod_{k=1}^{n}(a_k-2)$

A) -1 B) $2n-3$ C) $2n+3$
D) 2^n-1 E) 2^n+1

48. Hallar el valor de "x" en la ecuación:

$$\frac{(a+x)(a-b)}{a+b}+\frac{(a+b)(a+b)}{a-b}=\frac{(x-a)(a^2-6ab+b^2)}{a^2-b^2}$$

A) 2a B) a C) 1
D) 4a E) 3a

49. Indicar las raíces de la ecuación:

$$\sqrt[5]{(2+x)^2}+2\sqrt[5]{(2-x)^2}=3\sqrt[5]{(4-x)^2}$$

A) $\frac{59}{33}$ B) $\frac{61}{33}$ C) $\frac{62}{33}$
D) $\frac{64}{33}$ E) $\frac{65}{33}$

50. Determine las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación: $4x^4-ax^3+bx^2-cx+5=0$

Sabiendo que son reales, positivas y que:

$$\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}=1$$

Señalar la suma de dichas raíces:

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

team CALAPENSHKO

Capítulo 12

Números Reales y Desigualdades

CAPACIDADES

- Reconocer axiomas y teoremas del conjunto de los números reales.
- Reconocer axiomas, teoremas y propiedades para la relación de orden.
- Identificar y efectuar operaciones con intervalos.

$$a < x \leq b$$

PIERRE DE FERMAT

PIERRE DE FERMAT, Este matemático francés nació en Beaumont de Lomagne en agosto de 1 601, y falleció en Castres el 12 de enero de 1 665. Se educó en su ciudad natal en el Colegio de los Padres y al terminar sus estudios en Toulouse, se dedicó a la magistratura. En su juventud estudio con Pascal. Nombrado consejero del Parlamento de Tolosa (1631) dedicó su tiempo libre al estudio de las matemáticas.

Por su correspondencia con algunos sabios contemporáneos, particularmente con Descartes, adquirió fama de gran geómetra. Aportó a la Geometría una regla que hasta cierto punto constituyó un anticipo del cálculo diferencias y perfeccionó considerablemente la teoría de los números, que había permanecido estacionaria durante un milenio. Su correspondencia con Pascal, relativa a un juego de azar, contenía en germán el cálculo de probabilidades.

Formuló numerosos teoremas, aunque no dio a conocer su demostración. Todos ellos fueron luego probados, con excepción del "último teorema de Fermat". Este establece que es imposible demostrar la validez de la ecuación.

$a^n + b^n = c^n$ para cualquier valor de n, cuando a, b y c son números enteros positivos. El teorema ha sido demostrado sólo para valores de n inferiores a 619.

Desde la publicación de las obras completas de Fermat (1 679), matemáticos y no matemáticos intentaron demostrar este teorema, estimulados inclusive por las promesas de importantes premios, pero sus resultados fueron negativos.

team CALAPENSHKO

NÚMEROS REALES

1. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$, provisto de dos operaciones internas: Adición (+) y multiplicación (.); una relación de orden (>) y otra de igualdad (=)

2. AXIOMAS PARA LA ADICIÓN

2.A. CLAUSURA O CERRADURA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (a+b) \in \mathbb{R}$$

La adición es una operación interna totalmente definida en $\mathbb{R}$ que a todo par de números reales (a ; b) corresponde un único número real a + b llamado suma de a y b.

2.B. ASOCIATIVA

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : (a+b)+c = a+(b+c)$$

2.C. CONMUTATIVA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$$

2.D. EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists!\ 0 \in \mathbb{R} \mid a+0 = 0 + a = a$$

El cero (0) es el elemento neutro de la adición.

2.E. EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO ADITIVO

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists!\ (-a) \in \mathbb{R} \mid a+(-a) = (-a) + a = 0$$

Para todo número real a; (-a) es su elemento inverso, también llamado opuesto (op(a) = – a)

twitter.com/calapenshko

3. AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

3.A. CLAUSURA O CERRADURA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (a \,.\, b) \in \mathbb{R}$$

La multiplicación es una operación interna totalmente definida en $\mathbb{R}$ que a todo par de números reales (a ; b) corresponde un único número real a . b llamado producto de a y b.

3.B. ASOCIATIVA

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : (a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$$

3.C. CONMUTATIVA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a \,.\, b = b \,.\, a$$

A este axioma también se le conoce como la ley universal y se suele anunciar así "El orden de los factores no altera el producto"

3.D. EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists!\ 1 \in \mathbb{R} \mid a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$$

El uno (1) es el elemento neutro de la multiplicación.

team CALAPENSHKO

3.E. EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO

$$\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{R} \mid a \,.\, a^{-1} = a^{-1} \,.\, a = 1$$

Para todo número real a distinto de cero; $a^{-1} = \frac{1}{a}$ es su elemento inverso, también llamado recíproco $(\text{Rec}(a) = \frac{1}{a})$

OBSERVACIÓN

DISTRIBUCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA ADICIÓN

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$; tenemos:

i) Por la derecha: $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$

ii) Por la izquierda: $(b + c) \,.\, a = b \,.\, a + c \,.\, a$

NOTA

Los axiomas, teoremas y propiedades para la relación de orden (>) serán tratados como desigualdades, por tal razón hasta aquí no lo consideraremos

4. AXIOMAS PARA LA RELACIÓN DE IGUALDAD

4.A. DICOTOMÍA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a = b \vee a \neq b$$

4.B. REFLEXIVA

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : a = a$$

4.C. SIMETRÍA

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow b = a$$

4.D. TRANSITIVA

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$$

4.E. UNICIDAD EN LA ADICIÓN

$$a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \rightarrow a + c = b + c$$

Si al número real **a** se le suma otro número real **c**, el resultado es otro número real único: **a + c**

4.F. UNICIDAD EN LA MULTIPLICACIÓN

$$a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \rightarrow a \,.\, c = b \,.\, c$$

Si al número real **a** se le multiplica otro número real **c**, el resultado es otro número real único: **a . c**

team CALAPENSHKO

DESIGUALDADES

DEFINICIÓN

Se denomina desigualdad a la comparación que se establece entre dos números reales mediante los signos de relación $>$; $<$; $\geq$ ó $\leq$, llamando a los dos primeros simples y a los otros dobles.

Siendo a y b números reales:

$a > b$	a mayor que b	Desigualdades estrictas.
$a < b$	a menor que b	
$a \geq b$	a mayor o igual que b	Desigualdades no estrictas.
$a \leq b$	a menor o igual que b	

AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD

1) LEY DE TRICOTOMÍA:

$$\forall\, a \wedge b \in \mathbb{R} : a > b \vee a < b \vee a = b$$

2) LEY DE TRANSITIVIDAD:

$$\forall\, a, b \wedge c \in \mathbb{R} : \text{si } a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$$

3) LEY ADITIVA:

$$\forall\, a, b \wedge c \in \mathbb{R} : \text{si } a > b \rightarrow a + c > b + c$$

4) LEY MULTIPLICATIVA:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^{+} : \text{si } a > b \rightarrow ac > bc$$

EQUIVALENCIAS USUALES

Siendo a, b y c números reales:

1) $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

2) $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

team CALAPENSHKO

TEOREMAS DE LA DESIGUALDAD

1) $\forall\, a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$

2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^-$:

$a > b \rightarrow ac < bc$

3) $a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a} > 0 \;;\; a < 0 \leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$

4) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array}}{a + c > b + d}$$

5) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\begin{array}{c} a > b \\ c < d \end{array}}{a - c > b - d}$$

6) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array}}{a \,.\, c > b \,.\, d}$$

7) $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+$ ó $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^-$:

$$a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

También

$$a \leq b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

8) $\forall\, a, b \wedge c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$

$$a < b < c \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$$

9) $\forall\, a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$

$$a < b < c \rightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$$

10) $\forall\, a, b \wedge c \in \mathbb{R}^-, n \in \mathbb{Z}^+$

$$a < b < c \rightarrow c^{2n} < b^{2n} < a^{2n}$$

TEOREMA ADICIONAL (DESIGUALDAD DE CAUCHY – SCHWARZ)

Sean: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n$ números reales

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots\ldots + b_n^2)$$

COROLARIO (LEMA DE TITU)

Si: $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots + b_n}$$

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) $a < 0 \wedge c > 0$:

$a < b < c \rightarrow 0 \leq b^2 \leq$ máx.$\{a^2, c^2\}$

máx.$\{a^2, c^2\}$ indica el mayor elemento del conjunto $\{a^2, c^2\}$

2) $a, m, n > 0 : \frac{a}{m} + \frac{n}{a} \geq 2\sqrt{\frac{n}{m}}$

3) $a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

4) $a < 0 : a + \frac{1}{a} \leq -2$

team CALAPENSHKO

PROPIEDAD ADICIONAL

Para números reales positivos tenemos:

MP = Media potencial

MA = Media aritmética

MG = Media geométrica

MH = Media armónica

$$\boxed{MP \geq MA \geq MG \geq MH}$$

Para dos números a $\wedge$ b ; $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Para tres números a, b $\wedge$ c ; $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k + c^k}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

CLASES DE DESIGUALDAD

I. DESIGUALDAD ABSOLUTA

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación para todo valor asignado a su letra variable.

Por ejemplo:

$$x^2 + 1 > 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

II. DESIGUALDAD RELATIVA

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación sólo para valores particulares de su letra variable.

Por ejemplo:

$$\text{si: } x - 1 > 5 - x \Rightarrow x > 3$$

team CALAPENSHKO

INTERVALOS

DEFINICIÓN

Se denomina intervalo al conjunto cuyos elementos son números reales, dichos elementos se encuentran contenidos entre dos números fijos denominados extremos, a veces los extremos forman parte del intervalo.

INTERVALOS ACOTADOS

Son todos aquellos intervalos cuyos extremos son números reales, estos podrán ser:

I. INTERVALO ABIERTO:

No considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación simple.

En la recta real se tendrá:

Donde: $a < x < b \Leftrightarrow x \in \langle a; b \rangle$

También: $x \in]a; b[$

II. INTERVALO CERRADO:

Si considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación doble.

En la recta real se tendrá:

Donde: $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a; b]$

III. INTERVALO MIXTO:

(Semiabierto o semicerrado), considera solo a uno de sus extremos.

Para:

$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in \langle a; b]$

Para:

$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a; b\rangle$

INTERVALOS NO ACOTADOS

Son todos aquellos intervalos donde al menos uno de los extremos no es un número real.

I. INTERVALO ACOTADO INFERIORMENTE:

Donde: $a < x < \infty \Leftrightarrow x > a$

$x \in \langle a; \infty \rangle$

Donde: $a \leq x < \infty \Leftrightarrow x \geq a$

$x \in [a; \infty \rangle$

II. INTERVALO ACOTADO SUPERIORMENTE:

Donde: $-\infty < x < a \Leftrightarrow x < a$

$x \in \langle -\infty; a)$

Donde: $-\infty < x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$

$x \in \langle -\infty; a]$

OBSERVACIÓN

1) Un conjunto se dice que es acotado si y solo si es acotado superiormente e inferiormente a la vez.

2) Para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se tiene:

$$\mathbb{R} =]-\infty; \infty[= \langle -\infty; \infty \rangle$$

Es evidente que $-\infty$ y ∞ no son números reales.

3) Como los intervalos son conjuntos con ellos se podrán efectuar todas las operaciones existentes para conjuntos, tales como la unión, intersección, diferencia simétrica, etc, ...

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Marcar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

A) $-2 > -10$ .....( )

B) $\sqrt{7} > 2$ .....( )

C) $0 \geq 0$ .....( )

D) $\pi > 3{,}1416$ .....( )

E) $e^2 \geq \pi$ .....( )

2. Dados los conjuntos:

$A = \langle -1; 4]$ y $B = [2; 7\rangle$

Determine:

A) $A \cup B$

B) $A \cap B$

C) $A \Delta B$

D) A'

E) B'

F) $(A \cup B)'$

3. Si $x \in \langle -2; 3\rangle$ determine la extensión de y en cada caso:

A) $y = x+2$

B) $y = x-5$

C) $y = 2x + 1$

D) $y = x^2 + 1$

E) $y = \dfrac{x-10}{x+3}$

4. Coloca un visto (√) en cada recuadro que corresponda a un intervalo acotado.

A)

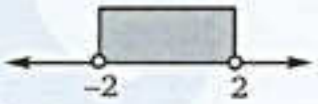
☐

B)

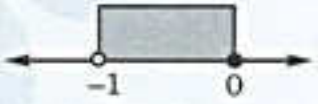
☐

C)

☐

D) 

☐

E) 

☐

5. Escribe Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

A) $\sqrt{11} - 2$ no es un número real .....( )

B) Si : $\pi = 3{,}1415... \rightarrow \dfrac{\pi}{\pi} \in \mathbb{Q}$ .....( )

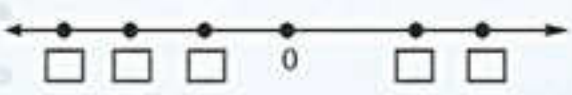
C) Si : $x \notin \mathbb{R}^- \rightarrow x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ...( )

D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}'$ .....( )

E) $(\sqrt{64} - 10) \in \mathbb{Z}$ .....( )

6. Ubicar aproximadamente en cada casi llero de la recta real los siguientes números;

$a = -2$; $b = -\sqrt{3}$; $c = -3$; $d = 3$; $e = \dfrac{5}{2}$



team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Si: $a * b = a + b + 2ab$; $\forall a, b \in \mathbb{N}$. ¿La operación * es asociativa?

Resolución: Consideremos $x, y, z \in \mathbb{N}$. Ahora si * es asociativa, deberá verificar la siguiente relación:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Hallemos $(x * y) * z$ de la fórmula:

$$a * b = a + b + 2ab$$
$$x * y = x + y + 2xy$$
$$(x * y) * z = x + y + 2xy + z + 2(x + y + 2xy)z$$
$$(x * y) * z = x + y + 2xy + z + 2xz + 2yz + 4xyz$$
$$(x * y) * z = x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz \quad \ldots\ldots (1)$$

Hallemos $x * (y * z)$ de la fórmula:

$$a * b = a + b + 2ab$$
$$y * z = y + z + 2yz$$
$$x * (y * z) = x + y + z + 2yz + 2(x)(y + z + 2yz)$$
$$x * (y * z) = x + y + z + 2yz + 2xy + 2xz + 4xyz \quad \ldots\ldots (2)$$

Finalmente de (1) y (2) notamos que:

$$(x * y) * z = x * (y * z); \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ La operación * es asociativa.

PROBLEMA 2 Con respecto al problema anterior. Determine al elemento neutro.

Resolución: Supongamos que "e" es el elemento neutro, ahora podemos plantear la siguiente relación.

$$a * e = a; \; a, e \in \mathbb{N}$$

De acuerdo con la fórmula:

$$a + e + 2ae = a \leftrightarrow e + 2ae = 0$$
$$e(1 + 2a) = 0 \leftrightarrow e = \frac{0}{1 + 2a}$$

$\therefore e = 0$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 3 En $\mathbb{R}$ definimos la operación * por: $x * y = x + y + 5$, si x^{-1} denota al inverso de x bajo la operación *. Calcular el valor de "x" en la igualdad:

$$(x^{-1} * 5^{-1}) * 3 = (4^{-1} * x) * 1^{-1}$$

Resolución: Si "e" es el neutro, se cumple que:

$$a * e = a$$

De acuerdo con la fórmula tenemos:

$$a + e + 5 = a$$

$$e = -5$$

También recordemos que el neutro verifica

$$x * x^{-1} = e$$

$$x + x^{-1} + 5 = -5$$

$$x^{-1} = -10 - x \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Finalmente en la igualdad propuesta:

$$(x^{-1} * 5^{-1}) * 3 = (4^{-1} * x) * 1^{-1}$$

$$[(-10 - x) * (-15)] * 3 = (-14 * x) * (-11)$$

$$[-10 - x - 15 + 5] * 3 = (x - 9) * (-11)$$

$$-20 - x + 3 + 5 = x - 9 - 11 + 5$$

$$-12 - x = x - 15$$

$$-12 + 15 = 2x \leftrightarrow 3 = 2x$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA 4 Se define la operación binaria * en $\mathbb{R} - \{0\}$ según la fórmula: $a * b = 5ab$, además x^{-1} denota al inverso de x respecto de *. Calcular: $\left(\frac{1}{625}\right)^{-1}$

Resolución: Supongamos que "e" es el neutro:

$$a * e = a$$

De acuerdo con la fórmula tenemos:

twitter.com/calapenshko

$$5ae = a$$

$$5e = 1$$

$$e = \frac{1}{5}$$

Ahora también podemos plantear:

$$x * x^{-1} = e$$

$$5 \,.\, x \,.\, x^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{25x}$$

Finalmente para $x = \frac{1}{625}$:

$$\left(\frac{1}{625}\right)^{-1} = \frac{1}{25\left(\frac{1}{625}\right)} = \frac{625}{25}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{625}\right)^{-1} = 25$$

PROBLEMA 5 Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$a \,.\, 0 = 0$$

Resolución: Supongamos que: $a \,.\, 0 = b$, ahora la demostración consiste en hallar $b = 0$.

Por el axioma de reflexión:	$b = b$
Por el elemento neutro aditivo:	$b = b + 0$
De acuerdo con la hipótesis:	$b = a \,.\, 0 + 0$
Por el elemento inverso aditivo:	$b = a \,.\, 0 + a + (-a)$
De acuerdo con la ley asociativa:	$b = (a \,.\, 0 + a) + (-a)$
Por el elemento neutro multiplicativo:	$b = (a \,.\, 0 + a \,.\, 1) + (-a)$
Por el axioma de distribución:	$b = a \,.\, (0 + 1) + (-a)$
	$b = a \,.\, 1 + (-a)$
Por el elemento neutro multiplicativo:	$b = a + (-a)$
Finalmente por inverso aditivo:	$b = 0$

$$\therefore \quad a \,.\, 0 = 0 \quad \text{lqqd}$$

PROBLEMA 6 Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$-a = (-1) \,.\, a$$

team CALAPENSHKO

Resolución:

Una rápida inspección permite observar que si se demuestra que: $a + (-a) = 0$, entonces ya se habrá demostrado que: $(-1).a = -a$; pues en $a + (-1)a = 0$ apreciamos que $(-1)a$ es el opuesto de a.

Supongamos que : $a + (-1)a = b$, ahora la demostración consiste en hallar $b = 0$.

Por el axioma de reflexión: $b = b$

De acuerdo con la hipótesis: $b = a + (-1).a$

Por el elemento neutro multiplicativo: $b = 1 . a + (-1) . a$

Por el axioma de distribución: $b = (1 + (-1)) . a$

$b = 0 . a$

Por la ley conmutativa: $b = a . 0$

Por el teorema tenemos que: $b = 0$

Finalmente hemos conseguido: $a + (-1)a = 0$

$\therefore$ **$-a = (-1).a$** **lqqd**

PROBLEMA 7 Demostrar que:

$$a . b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Resolución:

Primera parte ($\rightarrow$): $a . b = 0$

Supongamos que: $b \neq 0$, luego existe b^{-1}

Ahora partiremos de: $a . b = 0$

Unicidad en la multiplicación: $a . b . b^{-1} = 0 . b^{-1}$

Ley asociativa y conmutativa: $a . \underbrace{(b . b^{-1})}_{\text{neutro multiplicativo}} = b^{-1} . 0$

$a . 1 = 0$

$\mathbf{a = 0}$

Supongamos que: $a \neq 0$, luego existe a^{-1}

ahora partiremos de: $a . b = 0$

Unicidad en la multiplicación: $a^{-1} . a . b = a^{-1} . 0$

Ley asociativa y teorema: $\underbrace{(a^{-1} . a)}_{\text{neutro multiplicativo}} . b = 0$

$1 . b = 0$

$\mathbf{b = 0}$

Segunda parte ($\leftarrow$): $a = 0 \vee b = 0$

Unicidad en la multiplicación: $a . b = \underbrace{0 . b}_{\text{Ley conmutativa}} \vee a . b = a . 0$

Finalmente por teorema: $a . b = 0 \vee a . b = 0$

$\mathbf{a . b = 0}$

$\therefore \mathbf{a . b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$ lqqd

PROBLEMA 8 Demostrar que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Resolución: Iniciaremos a partir de la izquierda dando uso del axioma de distribución, veamos:

$$(a+b).(a-b) = a.(a-b) + b.(a-b)$$
$$(a+b).(a-b) = a.a - a.b + b.a - b.b$$

Por definición: $(a+b).(a-b) = a^2 - a.b + b.a - b^2$

Por ley conmutativa: $(a+b).(a-b) = a^2 - a.b + a.b - b^2$

$$(a+b).(a-b) = a^2 + \underbrace{a.b - a.b}_{\text{Neutro aditivo}} + b^2$$

$$(a+b).(a-b) = a^2 + 0 - b^2$$

$$\therefore\ \mathbf{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}\quad \text{lqqd}$$

PROBLEMA 9 Demostrar que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 = b^2 \leftrightarrow a=b \vee a=-b$$

Resolución:

Primera parte ($\rightarrow$): $a^2 = b^2$

Por unicidad en la adición: $a^2 + (-b^2) = \underbrace{b^2 + (-b^2)}_{\text{Neutro aditivo}}$

$$a^2 - b^2 = 0$$

Por teorema tenemos: $(a+b).(a-b)=0$

$$a+b=0 \vee a-b=0$$

Por unicidad en la adición: $a + \underbrace{b+(-b)}_{} = 0 + (-b) \vee a + \underbrace{(-b)+b}_{} = 0 + b$

Elemento neutro aditivo: $a+0=-b \vee a+0=b$

$$\mathbf{a=-b \vee a=b}$$

Segunda parte ($\leftarrow$) $a=-b \vee a=b$

Por unicidad en la adición: $a+b=-b+b \vee a+(-b)=b+(-b)$

Elemento neutro aditivo: $a+b=0 \vee a-b=0$

Por teorema tenemos: $(a+b).(a-b)=0$

$$a^2-b^2=0$$

Por unicidad en la adición: $a^2-b^2+b^2=0+b^2$

Por ley conmutativa: $a^2 + \underbrace{b^2-b^2}_{} = b^2$

Elemento neutro aditivo: $a^2+0=b^2$

$$\mathbf{a^2=b^2}$$

$$\therefore\ a^2=b^2 \leftrightarrow a=b \vee a=-b \quad \text{lqqd}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 10 Demostrar que $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$a^2 \geq 0$$

Resolución:

Primera parte: con $a > 0$

multiplicando por a: $a.a > 0.a$

$a^2 > 0$ .....(1)

Segunda parte: con $a = 0$

multiplicando por a: $a.a = a.0$

$a^2 = 0$ .....(2)

Tercera parte: con $a < 0$

Observa que si a es negativo, entonces su opuesto (–a) es positivo; luego multiplicamos a ambos por (–a): $(-a).a < (-a).0$

$-a^2 < 0$

Ahora podemos notar que $-a^2$ es el opuesto de a^2 y como $(-a^2)$es negativo

es evidente que a^2 es positivo: $a^2 > 0$ .....(3)

Finalmente con (1), (2) y (3): $\therefore\ \forall\, a \in \mathbb{R}: a^2 \geq 0$ **lqqd**

PROBLEMA 11 Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ Determine el menor valor que asume "K", donde:

$$K = \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(a+c)^2}{ac} + \frac{(b+c)^2}{bc}$$

Resolución:

Formando al primer sumando de la expresión "K": $a \in \mathbb{R}, -b \in \mathbb{R} \rightarrow (a-b) \in \mathbb{R}$

Por teorema se plantea: $(a-b)^2 \geq 0$

De donde obtenemos: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Sumando 2ab tenemos: $a^2 + b^2 + 2ab \geq 2ab + 2ab$

$(a+b)^2 \geq 4ab$

multiplicando por $\frac{1}{ab}$: $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq \frac{4ab}{ab}$

$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$.....(1)

En forma similar obtenemos: $\frac{(a+c)^2}{ac} \geq 4$ .....(2)

$\frac{(b+c)^2}{bc} \geq 4$.....(3)

Finalmente sumando miembro a miembro (1), (2) y (3) conseguimos:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(a+c)^2}{ac} + \frac{(b+c)^2}{bc} \geq 4+4+4$$

$K \geq 12$

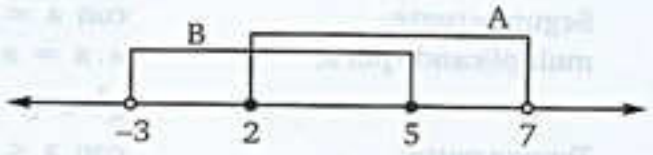
$\therefore\ K_{mín} = 12$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Dados los conjuntos: $A = [2; 7\rangle$ y $B = \langle -3; 5]$ ¿cuántos elementos "x" enteros tiene el conjunto $A \Delta B$?

Resolución: Se sabe que el conjunto $A \Delta B$ es equivalente a: $(A - B) \cup (B - A)$

Graficando los conjuntos A y B tenemos:



Observar que: $A - B = \langle 5; 7\rangle$

$B - A = \langle -3; 2\rangle$

Ahora tenemos: $A \Delta B = \langle -3; 2\rangle \cup \langle 5; 7\rangle$

Los "x" enteros: $-2, -1, 0, 1$ y 6

$\therefore$ Existen 5 enteros x

PROBLEMA 13 Demostrar que siendo a y b reales positivos se verifica:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Resolución: Teniendo en cuenta a los axiomas de la desigualdad

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists \sqrt{a} \in \mathbb{R}^+$$
$$b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists \sqrt{b} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{R}$$

Se sabe que:
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$
$$(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2(\sqrt{a})(\sqrt{b}) \geq 0$$
$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

Sumando $2\sqrt{ab}$:
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$:
$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

PROBLEMA 14 Demostrar que siendo a, b y c reales se verifica:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Teniendo en cuenta al ejercicio anterior se plantea:

$$(a-b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \ldots\ldots (1)$$
$$(a-c) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a-c)^2 \geq 0$$
$$a^2 + c^2 \geq 2ac \quad \ldots\ldots (2)$$
$$(b-c) \in \mathbb{R} \Rightarrow (b-c)^2 \geq 0$$
$$b^2 + c^2 \geq 2bc \quad \ldots\ldots (3)$$

Sumando miembro a miembro (1); (2) y (3):

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$
$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

Multiplicando a ambos miembros por $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}.2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{2}.2(ab + ac + bc)$$

$$\therefore \; a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

PROBLEMA 15 Siendo a y b reales positivos tales que: $a + b = 4$. Determinar el menor valor de $a^5 + b^5$

Resolución: Teniendo en cuenta a la relación existente entre la media potencial y la media aritmética se plantea lo siguiente:

$$\sqrt[5]{\frac{a^5 + b^5}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Según la condición:

$$\sqrt[5]{\frac{a^5 + b^5}{2}} \geq 2$$

Efectuando operaciones:

$$\frac{a^5 + b^5}{2} \geq 32$$
$$a^5 + b^5 \geq 64$$
$$\therefore \; (a^5 + b^5)_{mín} = 64$$

PROBLEMA 16 Si $x \in \mathbb{R}^+$ halle el menor valor que puede asumir la expresión:

$$x + \frac{3}{x}$$

Resolución: Como $x \in \mathbb{R}^+$ podemos plantear que:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$$

Desarrollando el 1er miembro, se tendrá:

team CALAPENSHKO

$$x - 2(\sqrt{x})\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right) + \frac{3}{x} \geq 0$$

Efectuando y transponiendo, obtenemos:

$$x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3}$$

Finalmente se concluye que el mínimo valor buscado es:

$$\therefore \quad x_{mín} = 2\sqrt{3}$$

OBSERVACIÓN

Este problema también se pudo resolver mediante la aplicación directa de la segunda propiedad de las desigualdades.

PROBLEMA 17 Si: $x \in \langle -3; 4\rangle$. Determine el intervalo de:

$$K = 4 + 2x - x^2.$$

Resolución: Reescribiendo la expresión citada:

$$K = 5 - 1 + 2x - x^2$$

$$K = 5 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$K = 5 - (x-1)^2$$

Por condición se plantea:

$$-3 < x < 4$$

Restando la unidad tenemos:

$$-4 < x - 1 < 3$$

Elevando al cuadrado:

$$0 \leq (x-1)^2 < 16$$

Multiplicando por -1:

$$-16 < -(x-1)^2 \leq 0$$

Finalmente sumamos 5:

$$-11 < 5 - (x-1)^2 \leq 5$$

$$-11 < K \leq 5$$

$$\therefore \quad K \in \langle -11; 5]$$

PROBLEMA 18 En $\mathbb{Z}^+$ se define: $x * y = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$. Calcular : $15 * 7$

Resolución: En la condición tenemos:

$$x*y = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y}$$

$$x*y = x-y$$

Finalmente tenemos:

$$15*7 = 15-7$$

$$\therefore\ 15*7 = 8$$

PROBLEMA 19 Si: $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\dfrac{2}{15} - \dfrac{x}{9}\right)$ representa el neutro de la adición en R.

Determine el valor de "x"

Resolución: Por condición tenemos:

$$\frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\frac{2}{15} - \frac{x}{9}\right) = 0$$

$$\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

Dando mcm al denominador:

$$\frac{15x - 30x + 15 - 12 + 10x}{90} = 0$$

$$\frac{-5x+3}{90} = 0$$

$$-5x + 3 = 0$$

$$-5x = -3$$

$$\therefore\ x = \frac{3}{5}$$

PROBLEMA 20 En Q definimos la operación * por: $x*y = x-y+2$. Si x^{-1} es el inverso de x bajo la operación *. Determine x en: $x*2^{-1} = 5^{-1}*5$

Resolución: Hallemos el neutro de la operación *, para lo cual se plantea:

$$x*x^{-1} = x^{-1}*x = e = \text{neutro} \qquad \text{.....(1)}$$

team CALAPENSHKO

El elemento neutro "e" verifica:

$$x * e = x$$

Aplicando la condición tenemos:

$$x - e + 2 = x$$
$$e = 2 \quad \text{.....(2)}$$

De (1) y (2) podemos reconocer que:

$$x * x^{-1} = 2$$

Para x = 2 podemos observar que:

$$2 * 2^{-1} = 2$$
$$2 - 2^{-1} + 2 = 2$$
$$4 - 2^{-1} = 2$$
$$2^{-1} = 2$$

Para x = 5 podemos observar que:

$$5 * 5^{-1} = 2$$
$$5 - 5^{-1} + 2 = 2$$
$$7 - 5^{-1} = 2$$
$$5^{-1} = 5$$

Finalmente procedemos a calcular x:

$$x * 2^{-1} = 5^{-1} * x$$
$$x * 2 = 5 * x$$
$$x - 2 + 2 = 5 - x + 2$$
$$x = 7 - x$$
$$2x = 7$$
$$\therefore x = \frac{7}{2}$$

PROBLEMA 21 Si se sabe que: $a * b = \dfrac{a + b + 1}{2}$ definido en $\mathbb{R}$. Determine el inverso de 3.

Resolución: Una rápida inspección permite observar que * es conmutativa y tiene elemento neutro. Si "e" es el neutro, se cumple que:

$$a * e = a; \forall a \in \mathbb{R}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{a + e + 1}{2} = a$$
$$a + e + 1 = 2a$$
$$e = a - 1$$

Hallemos el inverso de a:

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = a - 1$$

Haciendo a = 3 tenemos:

$$3 * 3^{-1} = 3 - 1$$

$$\frac{3 + 3^{-1} + 1}{2} = 2$$

$$4 + 3^{-1} = 4$$

$$\therefore\ 3^{-1} = 0$$

PROBLEMA 22 Determine el menor número racional "m" de modo que para cualquier $x \in [2; 4]$ se satisface la desigualdad:

$$\frac{x+3}{x-5} \leq m$$

Resolución: Fácilmente reconocemos que:

$$\frac{x+3}{x-5} = 1 + \frac{8}{x-5}$$

Por condición se plantea:

$$2 \leq x \leq 4$$

Sumando (– 5) obtenemos:

$$-3 \leq x - 5 \leq -1$$

Tomando el recíproco:

$$-1 \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{3}$$

Multiplicando por 8 tenemos:

$$-8 \leq \frac{8}{x-5} \leq -\frac{8}{3}$$

Sumando 1 conseguimos:

$$-7 \leq 1 + \frac{8}{x-5} \leq -\frac{5}{3}$$

$$-7 \leq \frac{x+3}{x-5} \leq -\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ m = -\frac{5}{3}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Demostrar que $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z$$

Resolución: Se sabe que:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz\ ; \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Transformando:

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xz+2yz$$

$$x^2+y^2+z^2+2x^2+2y^2+2z^2 \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

$$\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2}$$

$$\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq |x+y+z| \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Se sabe que:

$$|x+y+z| \geq x+y+z\ ; \ \forall x,y,z \in \mathbb{R} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2) por transitividad:

$$\therefore\ \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z \quad \ldots\ldots\ldots \text{lqqd}$$

PROBLEMA 24 Si $a,b,c,d,x,y,z,w > 0$ tal que $\sqrt[a]{x} < \sqrt[b]{y} < \sqrt[c]{z} < \sqrt[d]{w}$

Demostrar que : $\sqrt[a]{x} < \sqrt[a+b+c+d]{xyzw} < \sqrt[d]{w}$

Resolución: Supongamos que:

$$p = \sqrt[a]{x} < \sqrt[b]{y} < \sqrt[c]{z} < \sqrt[d]{w}$$

Ahora notamos que:

$$p^a = x;\ p^b < y\ ;\ p^c < z\ ;\ p^d < w$$

Multiplicando:

$$p^a \cdot p^b \cdot p^c \cdot p^d < x \cdot y \cdot z \cdot w$$

$$p^{a+b+c+d} < xyzw$$

Por ser números positivos tenemos:

$$p < \sqrt[a+b+c+d]{xyzw} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Supongamos que:

$$\sqrt[a]{x} < \sqrt[b]{y} < \sqrt[c]{z} < \sqrt[d]{w} = q$$

team CALAPENSHKO

Ahora notamos que:

$$x < q^a;\ y < q^b;\ z < q^c;\ w = q^d$$

Multiplicando:

$$x \cdot y \cdot z \cdot w < q^a \cdot q^b \cdot q^c \cdot q^d$$

$$xyzw < q^{a+b+c+d}$$

Por ser números positivos tenemos:

$$\sqrt[a+b+c+d]{xyzw} < q \qquad \text{..... (2)}$$

De (1) y (2) tenemos:

$$p < \sqrt[a+b+c+d]{xyzw} < q$$

$$\therefore\ \sqrt[a]{x} < \sqrt[a+b+c+d]{xyzw} < \sqrt[d]{w} \quad \text{..... lqqd}$$

PROBLEMA 25 Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} - \langle -3; 1\rangle \mid x < 2 \rightarrow x < 5\}$$

$$B = \{x \in A \mid x + 2 \notin A\} = \langle m; n]$$

Calcular: $m - n$.

Resolución: Se sabe que: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, luego para el conjunto A se plantea lo siguiente:

$$x < 2 \rightarrow x < 5 \equiv x \geq 2 \vee x < 5$$

De esto último tenemos que $x \in \mathbb{R}$; luego el conjunto A viene dado por:

$$x \in \mathbb{R} - \langle -3; 1\rangle, \text{ es decir: } A = \langle -\infty; -3] \cup [1; +\infty\rangle \quad \text{.....(1)}$$

En el conjunto B: $x + 2 \notin A \leftrightarrow x + 2 \in \langle -3; 1\rangle$

$$-3 < x + 2 < 1 \leftrightarrow -5 < x < -1 \qquad \text{.....(2)}$$

De (1) y (2) podemos observar que los elementos del conjunto B son $x \in \langle -5; -3]$.

Finalmente tenemos:

$$\langle -5; -3] = \langle m; n]$$

$$m = -5 \wedge n = -3$$

$$\therefore\ m - n = -2$$

PROBLEMA 26 Sean los conjuntos:

$$A = \langle -8; 4\rangle \cup \{5; 7\}$$

$$B = \{x \in A \mid x < 2 \rightarrow x > 5\}$$

$$\text{Si } C = \{3 - x \mid x \in B \wedge x \in \mathbb{Z}\}$$

Calcular: $n(C)$.

Resolución: Redefiniendo al conjunto B según $p \to q \equiv \sim p \vee q$, tenemos:

$$B = \{x \in \langle -8; 4\rangle \cup \{5; 7\} \mid x \geq 2 \vee x > 5\}$$

$$B = \{x \in \langle -8; 4\rangle \cup \{5; 7\} \mid x \geq 2\}$$

De donde tenemos:

$$B = [2; 4\rangle \cup \{5; 7\}$$

Ahora vemos el conjunto C

$$C = \{3 - x \mid x \in B \wedge x \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{3 - x \mid x = 2; 3; 5; 7\}$$

$$C = \{1; 0; -2; -4\}$$

$$\therefore \ n(C) = 4$$

PROBLEMA 27 Si: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Determine el mayor valor de "m" en:

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq m$$

Resolución: Una rápida inspección permite observar que el producto de los términos: $\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$ es igual a la unidad, luego es conveniente plantear la propiedad:

MA ≥ MG, es decir:

$$\frac{\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ac}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq 3$$

De donde resulta que $m \leq 3$.

$$\therefore \ m_{(máximo)} = 3$$

PROBLEMA 28 Si: $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$, siendo M el menor valor y m el mayor valor que satisfacen:

$m \leq \frac{x+5}{x-2} \leq M$. Calcular: M.m

Resolución: Observa que debemos formar:

$$\frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$$

team CALAPENSHKO

twitter.com/calapenshko

Por condición tenemos que:

$$\frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{4}$$

Sumando (– 2) conseguimos:

$$-\frac{7}{4} \le x-2 \le -\frac{3}{4}$$

Tomando el recíproco:

$$-\frac{4}{3} \le \frac{1}{x-2} \le -\frac{4}{7}$$

Multiplicando por 7 tenemos:

$$-\frac{28}{3} \le \frac{7}{x-2} \le -4$$

Sumando 1 obtenemos

$$-\frac{25}{3} \le 1+\frac{7}{x-2} \le -3$$

$$-\frac{25}{3} \le \frac{x+5}{x-2} \le -3$$

Mayor valor ↵ ↳ Menor valor

Fácilmente reconocemos que:

$$M = -3 \ \wedge \ m = -\frac{25}{3}$$

$$\therefore \ M.\,m = 25$$

PROBLEMA 29 Si a, b, c $\in \mathbb{R}^+$ Determine el menor valor de K de modo que:

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{a\sqrt{3bc}} \ge K$$

Resolución: Por propiedad tenemos:

$$MA \ge MG$$

Ahora podemos plantear:

$$\frac{a^2+a^2+(3b^2)+(3c^2)}{4} \ge \sqrt[4]{(a^2)(a^2)(3b^2)(3c^2)}$$

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{4} \ge \sqrt[4]{a^4(3bc)^2}$$

$$2a^2+3(b^2+c^2) \ge 4a\sqrt{3bc}$$

Al dividir por $a\sqrt{3bc}$ tenemos:

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{a\sqrt{3bc}} \geq 4$$

De donde fácilmente reconocemos que $K \leq 4$

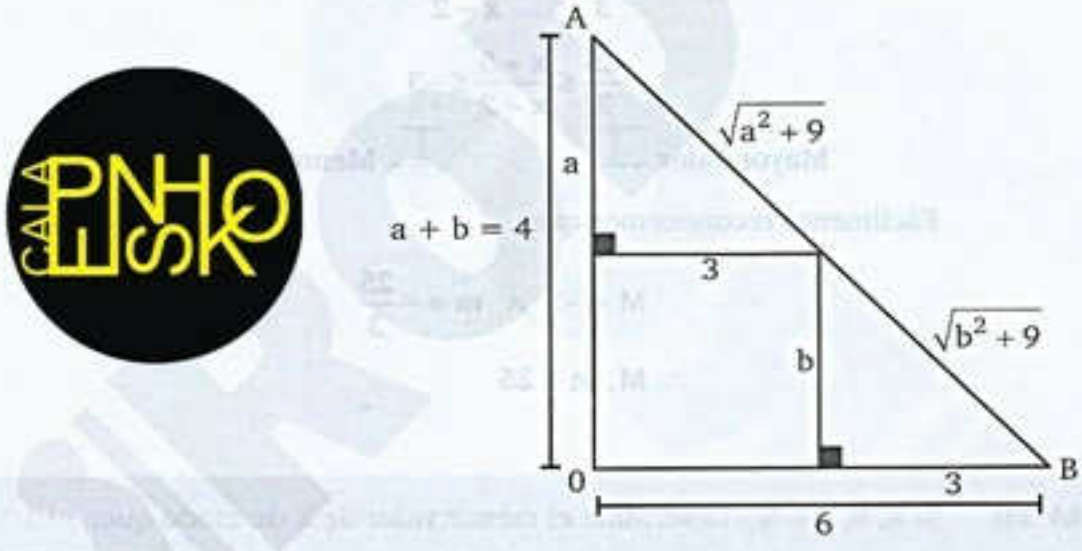
$$\therefore K_{(máximo)} = 4$$

PROBLEMA 30 Si: $a + b = 4$ tal que $a, b \in \mathbb{R}^+$. Determine el menor valor de la expresión:

$$E = \sqrt{a^2+9} + \sqrt{b^2+9}$$

Resolución:

Supongamos que: $\sqrt{a^2+9} + \sqrt{b^2+9}$ es la distancia mínima entre dos puntos, luego la línea que une los puntos mencionados debe ser una línea recta, en consecuencia podemos construir el siguiente triángulo:



Pitágoras en el triángulo OAB:

$$\left(\sqrt{a^2+9} + \sqrt{b^2+9}\right)^2 = (4)^2 + (6)^2$$

$$E^2 = 16 + 36$$

$$E^2 = 52$$

$$\therefore E = 2\sqrt{13}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $\left(\frac{a-9}{2}-\frac{7}{8}\right)$ es un elemento de $\mathbb{R}$ cuyo reflexivo es $\frac{1}{8}\left(\frac{14-2a}{5}-\frac{a-5}{4}\right)+\frac{a-1}{4}$. ¿De qué elemento se trata?

A) 17 B) $\frac{16}{5}$ C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{25}{8}$ E) $\frac{49}{16}$

2. Si los elementos de $\mathbb{R}$: $2+\frac{1-2a}{3}$ y $\frac{1-3a}{7}+2a-7$ son inversos aditivos ¿cuál es el valor de a?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Se define $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$: $(a*b)^2 = (a-b)^2$. Determine la suma de los posibles resultados de: $(k+3)*(k-1)$; $k \in \mathbb{Z}$.

A) 1 B) 0 C) -1
D) 4 E) 5

4. ¿Para qué valor de "b" los reales: $\frac{3b-5}{6}+2b$ y $\left(\frac{3b-2}{3}-\frac{4-b}{2}+2\right)^{-1}$ son inversos multiplicativos?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

5. Se define una operación * en $Q-\{1;-1\}$ tal que: $a * b = a + b + |ab|$. Determine el elemento neutro de la operación

A) 0 B) -1 C) 1
D) 10 E) 5

6. Si los elementos de $\mathbb{R}$: $\frac{a-1}{2}-14$ y $11-\frac{b}{10}$ son los elementos neutros de la adición y multiplicación respectivamente, calcular: $a + b$

A) 110 B) 129 C) 227
D) 60 E) 78

7. ¿Para que valores de a los elementos de $\mathbb{R}$: $\frac{7a}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$ y $\frac{7a-1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$ son opuestos?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{91}$
D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{15}$

8. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   I. La suma de dos números irracionales es siempre otro número irracional.
   II. El cociente de dos números irracionales es siempre otro número irracional.
   III. El producto de dos números irracionales es siempre otro número irracional.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFF E) VFF

9. Si en $\mathbb{R}$ la operación * está definida por:

$$a * b = 3a + b$$

Determine su elemento neutro.

A) 1 B) 0 C) 2
D) 4 E) No existe

10. Determine "x", sabiendo que el opuesto de A más el recíproco de $\left(\frac{1}{8}\right)$ es igual a 5, donde:

$$A = \frac{op(x)+5}{Rec(3)} \text{ y } B = \frac{op(3x)+2}{Rec(6)}$$

A) $-\frac{18}{17}$ B) $-\frac{8}{15}$ C) $-\frac{8}{13}$

D) $\frac{8}{9}$ E) -8

11. Sabiendo que: $a * b = a + 2b; a, b \in \mathbb{Z}^+$

$c \# d = 2c + d; c, d \in \mathbb{N}$

Simplificar:

$$\frac{2a * b + a \# 2b + 2a * 2b}{3b * 2b + 2a \# b + 2a}$$

A) -1 B) 0 C) 1

D) 2 E) $\frac{1}{2}$

12. Siendo a, b y c elementos de $\mathbb{R}$, indicar cuál(es) de las siguientes afirmaciones:

I. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$.

II. $a = b \Rightarrow a.c = b.c$

III. $a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Son siempre verdaderas:

A) Sólo III B) Sólo I C) I y II

D) Sólo II E) II y III

13. Definidas las operaciones en $\mathbb{R}$.

$$a * b = 2a + 3b - 1$$
$$a \# b = a - b + 2$$

Calcular x + y del sistema:

$$\begin{cases} x * y = 5 & .....(1) \\ (3x) \# (-2y) = 1 & .....(2) \end{cases}$$

A) -4 B) 1 C) 4

D) 6 E) 8

14. Siendo a, b y c reales, ¿Cuáles de las proposiciones:

I. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

II. $a.c = b.c \Rightarrow a = b$

III. $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b$

Son verdaderas?

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II

D) II y III E) Sólo III

15. Se define * en $\mathbb{R} - \{0\}$ así: $a * b = 2ab$, además c^{-1} es el elemento inverso de c respecto al operador. Determine 4^{-1}.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$

D) -8 E) -1

16. En $\mathbb{R}$ definimos la operación ψ, según la ley:

$a \psi b = a - b + 2$. Sea x' el inverso de x, bajo la operación ψ. Determine el valor de "m" a partir de: $m' \psi 2' = 5' \psi m'$.

A) 2 B) -1 C) 1

D) 5 E) No existe

17. Siendo x un número irracional, determine el valor de verdad de las proposiciones.

I. x^2 es irracional.

II. Toda potencia de x es irracional.

III. Alguna potencia de x es irracional.

IV. El inverso de x es irracional.

A) VVVV B) FFFV C) VFFV

D) VVFF E) FFVV

team CALAPENSHKO

18. Halle el menor valor de K, si: $x^2 + x + 1 \le K$; $\forall x \in \langle -2; 1\rangle$.

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}$
D) 3 E) $\frac{9}{2}$

19. Si: $-1 < a < 0 \wedge b > 1$. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $\frac{b+1}{a-1} > 0$

II. $b^2 > a^2$

III. $1 - ab > 2a$

A) VVV B) FVF C) FFV
D) FVV E) FFF

20. Si: $x, y, z, w \in \mathbb{R}^+$. Determine el máximo valor de "m" en: $\frac{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}{xyzw} \ge m$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

21. Si: $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$K = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{bc}$$

Podemos afirmar:

A) $K \ge 6$ B) $K \ge \frac{1}{3}$ C) $K \ge 3$
D) $K \ge \frac{4}{3}$ E) $K \ge 12$

22. Si: $a > 0 \wedge b > 0$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta?:

A) $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab} \le \frac{2ab}{a+b}$
C) $\sqrt{ab} - a = \frac{2ab}{a+b}$
D) $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ E) $\sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}$

23. Sean: $p, q \wedge r$ reales positivos distintos entre si tal que: $p.q.r = 1$.
Luego si: $S = p + q + r$. Verifica:

A) $S > 0$ B) $3 \le S \le 4$ C) $0 < S < 3$
D) $S < 3$ E) $1 < S < 2$

24. Sean a, b y c no negativos tales que:

$$a + b + c = 1$$

Determine el valor de: $K = a^5.b^3.c^2$
e indicar como respuesta la suma de las cifras de: $10^6 K$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 18 E) 20

25. Si: $a > 0 \wedge b > 0$. Determine el menor valor de K en:

$$\frac{(a+b)^3}{a^3 + b^3} \le K$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

26. Siendo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$K = \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Podemos afirmar:

A) $K \le 1$ B) $K \le 2$ C) $K \ge 1$
D) $K \ge 9$ E) $K \le 20$

27. Si: $x, y \in \mathbb{R}$. Determine el menor valor positivo de:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y - 1}$$

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

28. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

I. $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ II. $-10 \in \mathbb{Z}$

III. $\frac{0}{3} \in \mathbb{Q}$

IV. $0,\widehat{29} \in \mathbb{Q}^+$ V. $3,1416... e \mathbb{Q}^+$

A) VVVFV B) VFFFV C) VFVFF
D) VVFFF E) VVVFF

29. En el conjunto de los números enteros positivos definimos las siguientes operaciones:

$m \perp n = m^2 - n$; $p * q = 3q - q^2$; $r \# s = 2r + 3s$

Si: $a \perp a = 6$ $b * b = -4$

Determine: $a \# b$

A) 2 B) 18 C) 10
D) -1 E) -2

30. Determine el valor de verdad de cada afirmación:

I. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \in \mathbb{Q}^+$ II. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\left(-\frac{1}{3}\right)} \in \mathbb{Q}^-$

III. $(-1)^{(-1)} \in \mathbb{Z}$ IV. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}$

A) VVVV B) VFVV C) VFFV
D) FVVF E) FFFV

31. En $\mathbb{R}$ definimos la operación ψ según la ley:

$$a \psi b = a - b + 2$$

Sea x' el inverso de x bajo la operación ψ, determine el valor de "m" a partir de:

$$m' \psi 2' = 5' \psi m'$$

A) 2 B) -1 C) 1
D) 5 E) No existe

32. Siendo x un número irracional, determine el valor de verdad de las proposiciones:

I. x^2 es irracional.
II. Toda potencia de x es irracional.
III. Alguna potencia de x es irracional.
IV. El inverso de x es irracional.

A) VVVV B) FFFV C) VFFV
D) VVFF E) FFVV

33. Se define en $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ la siguiente operación binaria $*$:

$$a * b = a + (1 - 2a)b$$

Determine x de: $x^{-1} * 2^{-1} = 0$

A) 2 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 1

34. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $si\ a \in \mathbb{R}, \exists!\ x \in \mathbb{R} \mid ax = a$

II. $si\ a \in \mathbb{R}, \exists!\ x \in \mathbb{R} \mid a + x = a$

III. $si\ a, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+x)^2 = a^2 + x^2$

A) VFV B) FFV C) VVV
D) FVF E) VVF

35. Si: $x + y + z = 1$

Donde: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

Hallar "a" en:

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq a$$

A) 6xyz B) 8xyz C) 4xyz
D) 3xyz E) N.A.

team CALAPENSHKO

36. Si: $x \in \mathbb{R}^+$, hallar el mínimo valor de:

$$S = \frac{x}{7} + \frac{175}{x}$$

A) $\sqrt{10}$ B) 5 C) $2\sqrt{5}$

D) 10 E) $5\sqrt{2}$

37. Sea: $x > 0$, calcular el mínimo valor de la expresión:

$$K = x + \frac{4}{x^2}$$

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

D) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ E) 3

38. Si $x, y > 0$. Determine el mayor valor de "m" en:

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+27}{3x}\right)\left(\frac{y^2+27}{9y}\right)} \geq m$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) $\sqrt{3}$ E) 27

39. ¿Cuántas proposiciones son verdaderas?

I. $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$

II. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow x > y$

III. $x^2 + xy + y^2 > 0;\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

IV. $-5 < x < 3 \Rightarrow |x| \in [0; 3\rangle$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

40. ¿A qué intervalo pertenece $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, si $x \in [1; 2\rangle$?

A) $\left\langle 0; \frac{3}{2} \right]$ B) $\left\langle \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right]$ C) $\langle 1; 2]$

D) $[1; 2\rangle$ E) $\left[\frac{3}{2}; \infty \right\rangle$

41. Determine el mínimo valor de la expresión:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 2;\ x \in \mathbb{R}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) $\sqrt{3}$

42. Si $x > 2$. Determine el menor valor de M en:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} \leq M$$

A) 4 B) 3 C) 2

D) $\frac{4}{3}$ E) 5

43. Si $x \in [1; 2]$. Determine el intervalo de:

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+1}$$

A) $\left[-\frac{4}{11}; \frac{5}{2} \right]$ B) $\left\langle -\frac{5}{2}; \frac{4}{11} \right]$

C) $\left[\frac{4}{11}; \frac{5}{2} \right]$

D) $\left[\frac{2}{17}; 4 \right]$ E) $\mathbb{R}$

team CALAPENSHKO

44. ¿Cuántos valores enteros para "x" satisfacen:

$$2 < \frac{x-7}{x-5} < 12$$

A) 1 B) 6 C) 3
D) 5 E) 7

45. Halle el mayor número "N" con la propiedad que:

$$\frac{x^2+6x+14}{x^3+27} \geq N \; ; \; x \in [-2; 2]$$

A) $\frac{35}{6}$ B) $\frac{30}{19}$ C) $\frac{6}{35}$
D) $\frac{6}{35}$ E) $\frac{11}{35}$

46. Dado: $F(x) = ax^2 + bx + c$

Tal que: $x \in \mathbb{R}$; $F(x) \leq 0$.

Hallar el mínimo valor positivo de:

$$A = \frac{a+b+c}{b-a}$$

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3
D) $\frac{7}{2}$ E) 4

47. Si: $0 < b < a$, además:

$$k = \frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a-b)}$$

Luego, podemos afirmar que:

A) $k \leq -2$ B) $k \geq -1$ C) $k \leq 0$
D) $k \geq \sqrt{8}$ E) $k \geq \sqrt{8}-1$

48. Calcular el máximo entero de:

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$$

A) 1 998 B) 1 999 C) 2 000
D) 2 005 E) 2 006

49. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ tal que: $x + y = 1$

Determine el mayor valor de K en:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right).\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq K$$

A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

50. Si: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ..... ; x_n son positivos.

Determine el mínimo valor de:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$$

A) $n-2$ B) $n-1$ C) n
D) $n+1$ E) $n+2$

team CALAPENSHKO

Capítulo 13

Inecuaciones

CAPACIDADES

- Resolver inecuaciones racionales aplicando puntos de corte.
- Resolver inecuaciones con radicales según sea el índice del signo radical.
- Reconocer y resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

$x \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 2; \infty\rangle$

ÉVARISTE GALOIS

Évariste Galois (1811-1832) Matemático Francés. Después de realizar estudios en un liceo, ingresa en una escuela normal. A los 16 años, buen conocedor de la matemática de entonces, sufre su primera decepción al fracasar en su intento de ingreso en la Escuela Politécnica. Siguen las decepciones cuando una memoria, presentada a la Academia y puesta en manos de Cauchy se extravía, y cuando un segundo fracaso le cierra las puertas de la Politécnica.

En 1831, envuelto en los acontecimientos políticos, se le expulsa de la escuela normal, donde entonces estudiaba, y con el propósito de dedicarse a la enseñanza privada, anuncia un curso de álgebra superior que abarcaría "Una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, la teoría de números y la teoría de las funciones elípticas, tratadas por álgebra pura". El curso no tuvo oyentes y Galois ingresa en el ejército, a la vez que redacta una memoria, la última, hoy llamada "Teoría de Galois", que remite a la Academia y que Poisson califica de "incomprensible ". Más tarde es acusado de peligroso republicano y fue apresado. Acabado de salir de la cárcel muere de un pistolazo en un duelo, cuando apenas tenia 21 años de edad.

Sólo en 1846 se conoció gran parte de los escritos de Galois por obra de Joseph Liouville , y completó la publicación de sus escritos Jules Tannery a comienzos de este siglo (1908). En ellos asoma ya la idea de "cuerpo", y que luego desarrollan Rieman y Richard Dedekind, y que Galois introduce con motivo de los hoy llamados "imaginarios de Galois", concebidos con el objeto de otorgar carácter general al teorema del número de raíces de las congruencias de grado n de módulo primo.

Sin duda que la noción de grupo, en especial de grupo de substituciones que constituye el tema central de Galois, estaba ya esbozada en los trabajos de Lagrange y de Alexandre y en los de Gauss, Abel ,Ruffini y Cauchy del XIX, implícita en problemas de teoría de las ecuaciones, teoría de números y de transformaciones geométricas, pero es Galois quién muestra una idea clara de la teoría general con las nociones de subgrupo y de isomorfismo.

team CALAPENSHKO

INECUACIONES EN UNA VARIABLE

DEFINICIÓN

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Todos los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, el cual se representa en función de intervalos.

INECUACIONES RACIONALES

I. INECUACIÓN DE PRIMER GRADO (LINEAL):

Forma General: $ax + b \gtrless 0$

Donde: $a \wedge b \in \mathbb{R} / a \neq 0$

II. INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA):

Forma General: $ax^2 + bx + c \gtrless 0$

Donde: $a, b \wedge c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Propiedades:

II.1) Si: $a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

II.2) Si: $a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c < 0; \forall x \in \mathbb{R}$

III. INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR:

Forma General: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \gtrless 0$

Donde: $a_0; a_1; a_2; \ldots \wedge a_n \in \mathbb{R} / a_0 \neq 0$

$n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

IV. INECUACIÓN FRACCIONARIA:

Forma General: $\frac{F(x)}{H(x)} \gtrless 0 \ ; [H]^\circ \geq 1$

Donde: F(x) es un polinomio distinto de cero.

team CALAPENSHKO

RESOLUCIÓN DE INECUACIÓN

Se recomienda utilizar el método de los puntos de corte cuya aplicación consiste en los siguientes pasos:

1) Se trasladan todos los términos al primer miembro obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo.

2) Se factoriza totalmente a la expresión obtenida, en caso de ser fracción se factoriza cada uno de sus términos.

3) Se calculan los puntos de corte, son los valores reales de "x" obtenidos al igualar cada factor primo a cero.

4) Se ubican ordenadamente todos los puntos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más zonas.

5) Se marcan las zonas obtenidas a partir de la derecha alternando los signos (+) y (–)

6) Si el signo de relación es $>$ ó $\geq$, el conjunto solución estará conformado por todas las zonas positivas, pero si el signo de relación es $<$ ó $\leq$, el conjunto solución lo conformarán todas las zonas negativas.

Ejemplo: Resolver la inecuación: $x^2 + x > 6$

Resolución: De acuerdo con él método de los puntos de corte procedemos así:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

Factorizando: $(x + 3)(x - 2) > 0$

Hallando puntos: $x = -3 \; ; \; x = 2$

En la recta:

Marcando zonas:

Como el signo de relación es $>$ la solución viene dada por todas las zonas positivas.

$\therefore \; x \in \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Resolver: $\dfrac{9x+10}{x+2} < 2$

Resolución: Procedemos de un modo similar que en el ejemplo anterior.

$$\frac{9x+10}{x+2} - 2 < 0$$

$$\frac{7x+6}{x+2} < 0$$

Puntos: $7x+6=0 \rightarrow x = \dfrac{-6}{7}$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$\therefore\ x \in \langle -2; -6/7 \rangle$

OBSERVACIÓN

En una inecuación fraccionaria si el signo de relación es $\geq$ ó $\leq$ solo cerraremos los extremos que provienen del numerador.

Ejemplo: Resolver: $\dfrac{x^2-5}{x^2-x-12} \geq 1$

Resolución:

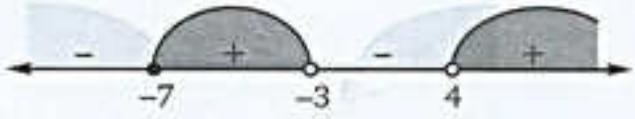
$$\frac{x^2-5}{x^2-x-12} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x+7}{x^2-x-12} \geq 0$$

Observar que: $x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$

$$\frac{x+7}{(x-4)(x+3)} \geq 0$$

Puntos: $\{-7; 4 \wedge -3\}$



$\therefore\ x \in [-7; -3\rangle \vee \langle 4; \infty\rangle$

team CALAPENSHKO

INECUACIONES IRRACIONALES

I. Forma: $\sqrt[2n]{A} > B;\ n \in \mathbb{Z}^+$

Se resuelve: $S_1 = (A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^{2n})$

$S_2 = (A \geq 0 \wedge B < 0)$

$\therefore$ $\boxed{C.S = S_1 \cup S_2}$

II. Forma: $\sqrt[2n]{A} < B\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{C.S = A \geq 0 \wedge B > 0 \wedge A < B^{2n}}$$

III. Forma: $\sqrt[2m]{A} \gtrless \sqrt[2n]{B}\ ;\ m \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

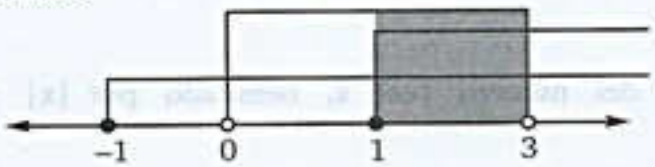
$$\boxed{C.S = A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A^n \gtrless B^m}$$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x+1} > x-1$

Resolución: De acuerdo con la forma (I) se plantea.

$$S_1 : x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x+1 > (x-1)^2$$
$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge -x^2+3x > 0$$
$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge\ x^2-3x < 0$$
$$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge\ x(x-3) < 0$$

Intersectando:

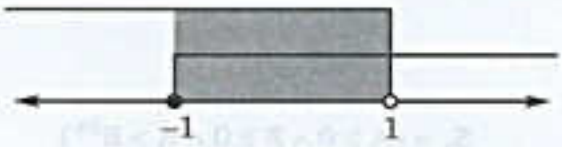


Observar que: $S_1 = [1; 3\rangle$

$S_2 : x+1 \geq 0 \ \wedge\ x-1 < 0$

team CALAPENSHKO

Intersectando:



Observar que: $S_2 = [-1; 1\rangle$

Finalmente: $C.S = S_1 \cup S_2$

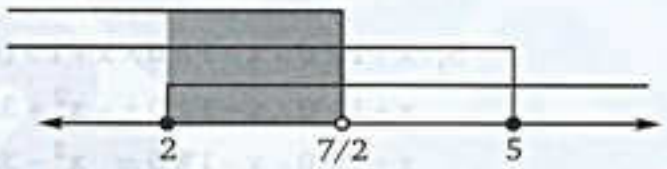
$\therefore C.S = [-1; 3\rangle$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x-2} < \sqrt{5-x}$

Resolución: De acuerdo con la forma (III) se plantea:

$$x-2 \geq 0 \wedge 5-x \geq 0 \wedge x-2 < 5-x$$
$$x-2 \geq 0 \wedge x-5 \leq 0 \wedge 2x-7 < 0$$

Intersectando:



$$\therefore C.S = \left[2; \frac{7}{2}\right\rangle$$

VALOR ABSOLUTO (V. A)

DEFINICIÓN

El valor absoluto del número real x, denotado por $|x|$ se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Según la definición:

$$|5| = 5 \quad ¿?\ 5 > 0$$
$$|-7| = -(-7) \quad ¿?\ -7 < 0$$
$$|-7| = 7$$

team CALAPENSHKO

TEOREMAS

1) $|x| \geq 0\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = |-x|;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

3) $|x\,.\,y| = |x|.|y|;\ \forall\ x \wedge y \in \mathbb{R}$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};\ x \wedge y \in \mathbb{R}\ /\ y \neq 0$

5) $|x^2| = |x|^2 = x^2;\ \forall x \in \mathbb{R}$

6) $-|x| \leq x \leq |x|;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

7) $|x + y| \leq |x| + |y|;\ \forall\ x \wedge y \in \mathbb{R}$

8) $||x| - |y|| \leq |x - y|;\ \forall\ x \wedge y \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES

1) Si: $|x + y| = |x| + |y|$
Entonces: $xy \geq 0$

2) Si: $|x - y| = |x| + |y|$
Entonces: $xy \leq 0$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Forma General: $\boxed{|x| = b;\ b > 0 \Leftrightarrow x = b \vee x = -b}$

Ejemplo: Resolver $|2x - 1| = 7$

Resolución: Observar que $b = 7 > 0$ luego tenemos.

$$2x - 1 = 7 \quad \vee \quad 2x - 1 = -7$$
$$2x = 8 \quad \vee \quad 2x = -6$$
$$x = 4 \quad \vee \quad x = -3$$
$$\therefore\ C.S = \{4; -3\}$$

Ejemplo: Resolver $|5x - 1| = 2 - x$

Resolución : Se plantea lo siguiente

$$2 - x > 0\ \wedge\ (5x - 1 = 2 - x\ \vee\ 5x - 1 = x - 2)$$
$$x - 2 < 0\ \wedge\ (6x = 3\ \vee\ 4x = -1)$$
$$x < 2\ \wedge\ \left(x = \frac{1}{2}\ \vee\ x = -\frac{1}{4}\right)$$

Observando que: $x = \frac{1}{2}$ verifica $x < 2$

$x = -\frac{1}{4}$ verifica $x < 2$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$$

team CALAPENSHKO

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

2) $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$

3) $|x| \gtrless |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) \gtrless 0$

Ejemplo: Resolver $|3x + 4| < 5$

Resolución: De acuerdo con el teorema (2) se plantea:

$$\underbrace{5 > 0}_{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{por que es una verdad}} \wedge \ (-5 < 3x + 4 < 5)$$

Luego sólo se resuelve:

$$-5 < 3x + 4 < 5$$
$$-5 - 4 < 3x < 5 - 4$$
$$-9 < 3x < 1$$
$$-3 < x < \frac{1}{3}$$
$$\therefore \ x \in \left\langle -3; \frac{1}{3} \right\rangle$$

Ejemplo: Resolver $x^2 \geq 3|x| + 4$

Resolución: Se sabe que $x^2 = |x|^2$, luego se tendrá:

$$|x|^2 \geq 3|x| + 4$$
$$|x|^2 - 3|x| - 4 \geq 0$$
$$(|x| - 4)(|x| + 1) \geq 0$$

Observar que: $|x| + 1 > 0 \ ; \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

En consecuencia
$$|x| - 4 \geq 0$$
$$|x| \geq 4$$

Por teorema (1): $x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4$

$$\therefore \ x \in \langle -\infty; -4] \cup [4; \infty\rangle$$

MÁXIMO ENTERO

DEFINICIÓN

El máximo entero de un número real x denotado por $[\![x]\!]$, se define como el mayor entero no mayor que x.

$$[\![x]\!] = \text{máx}\ \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

team CALAPENSHKO

Según la definición:

$[\![5,2]\!] = 5$ ¿Por qué? Porque 5 es el mayor entero que no es mayor que 5,2.

$[\![12]\!] = 12$ ¿Por qué? Porque 12 es el mayor entero que no es mayor que 12.

$[\![-2,7]\!] = -3$, observa que: $-3 \leq -2,7$

TEOREMAS

1) $\forall x \in \mathbb{R} : [\![x]\!] \in \mathbb{Z}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : [\![x]\!] \leq x \leq [\![x]\!] + 1$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : [\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$

4) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$:

$[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \leq x < n+1$

5) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$:

$[\![x]\!] \leq n \leftrightarrow x < n+1$

$[\![x]\!] < n \leftrightarrow x < n$

$[\![x]\!] \geq n \leftrightarrow x \geq n$

$[\![x]\!] > n \leftrightarrow x \geq n+1$

PROPIEDADES

1) $\forall x \in \mathbb{Z} : [\![x]\!] = x$

2) Si $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : [\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n$

Ejemplo: Resolver $[\![3x-1]\!] = 6$

Resolución: De acuerdo con el cuarto teorema, la igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$6 \leq 3x-1 \leq 7$$

$$7 \leq 3x \leq 8$$

$$\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$$

$$\therefore \ CS = \left[\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right\rangle$$

Ejemplo: Resolver: $\left[\!\left[\frac{1}{x+2}\right]\!\right] \leq 1$

Resolución: Por teorema se plantea:

$$\frac{1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - 2 < 0$$

$$\frac{-2x-3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+2} > 0$$

$$\therefore \ CS = \langle -\infty; -2 \rangle \cup \left[-\frac{3}{2}; \infty\right\rangle$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Ubicar en la recta real e indicar la zona respuesta en cada caso:

A) $x(x-2) \leq 0$

B) $(x-1)(x-2)(x+1) > 0$

C) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+4} < 0$

D) $\dfrac{x+4}{x-2} \geq 0$

E) $x^2 > 0$

2. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones

A) $x-1 > 3-x$ B) $\dfrac{x+2}{3} \leq \dfrac{x-1}{2}$

C) $x^2 \geq x+2$ D) $x^2+2 < 5x$

E) $x^3 \geq 4x$ F) $\dfrac{x-1}{x} > 2$

3. Resolver cada inecuación

A) $\sqrt{x-1} > 1$ B) $\sqrt[3]{x^3-1} \leq 1$

C) $\sqrt{x^2-4} < 2$ D) $\sqrt{x-7} \geq \sqrt{x}$

E) $\sqrt{x^2-2x+1} \geq 1$ F) $\sqrt{4x^2+4x+1} < 4$

4. Resolver en cada caso:

A) $[\![x+1]\!] = 2$ B) $[\![2x-1]\!] = -1$

C) $[\![[\![x]\!]]\!] = 1$ D) $[\![x-4]\!] = 10$

E) $[\![2x+7]\!] = 0$ F) $[\![x-3]\!] + x = 0$

5. Resolver en cada caso

A) $|2x-1| = 3$ B) $|2x+7| = 0$

C) $|3x+1| = |x-1|$ D) $|5x+2| > 4$

E) $|1-7x| \leq 2$ F) $|3x-1| < |x-2|$

6. Resolver en cada caso:

A) $[\![x]\!] > 2$ B) $[\![1-x]\!] \leq 4$

C) $[\![2x-3]\!] \geq 4$ D) $[\![3x+1]\!] > -1$

E) $[\![x+7]\!] < 3$ F) $[\![5-x]\!] \leq 0$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Resolver: $9x + 9 > 3x + 5$

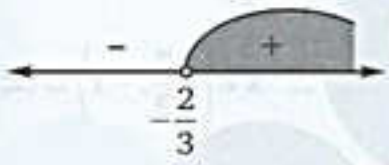
Resolución: Teniendo en cuenta al método de los puntos de corte procedemos así:

$$9x + 9 - 3x - 5 > 0$$

$$6x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2(3x + 2) > 0$$

$$3x + 2 > 0$$

$$\text{Punto} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$



$$\therefore\ x \in \left\langle -\frac{2}{3}; \infty \right\rangle$$

PROBLEMA 2 Resolver: $x^3 + x^2 \leq 4x + 4$

Resolución: Procedemos de un modo similar que en el ejercicio anterior:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 \leq 0$$

$$x^2(x+1) - 4(x+1) \leq 0$$

$$(x+1)(x^2 - 4) \leq 0$$

$$(x+1)(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore\ x \langle -\infty; -2] \cup [-1; 2]$$

PROBLEMA 3 Resolver: $\dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \geq 3$

Resolución: La inecuación dada se puede representar así:

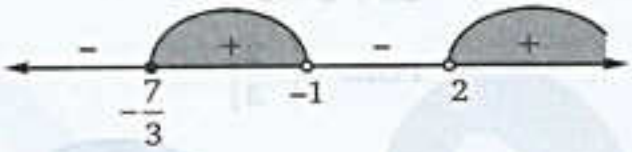
$$\frac{3x^2 + 1}{x^2 - x - 2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{3x^2+1-3x^2+3x+6}{x^2-x-2}\geq 0$$

$$\frac{3x+7}{x^2-x-2}\geq 0$$

Factorizando el denominador y teniendo en cuenta que todo denominador origina extremos abiertos se tendrá:

$$\frac{3x+7}{(x-2)(x+1)}\geq 0$$



$$\therefore\ x\in\left[-\frac{7}{3};-1\right\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$$

PROBLEMA 4 Determinar el menor entero "n" para que se verifique la siguiente relación:

$$x^2+3x+n>1\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Resolución: La desigualdad dada es:

$$x^2+3x+(n-1)>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Por la primera propiedad de inecuaciones de segundo grado, se plantea:

$$(3)^2-4(n-1)<0$$

$$4(n-1)-9>0$$

$$4n-13>0$$

$$n>\frac{13}{4}$$

$$n>3{,}25$$

$\therefore$ Menor entero "n" = 4

PROBLEMA 5 Resolver el sistema:

$$\begin{cases}(x-2)(x+1)>x+1 & .....(1)\\ x^2\leq 2x+8 & .....(2)\end{cases}$$

Resolución: De la primera inecuación:

$$(x-2)(x+1)-(x+1)>0$$

$$(x+1).(x-2-1)>0$$

$$(x+1).(x-3)>0$$

team CALAPENSHKO

En la recta real:

De la segunda inecuación : $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

$$(x-4)(x+2) \leq 0$$

En la recta real:

Intersectando tenemos:

$$CS = [-2; -1\rangle \cup \langle 3; 4]$$

PROBLEMA 6 Resolver: $|3x + 1| < 2|x - 1|$

Resolución: La inecuación se podrá representar de la manera siguiente:

$$|3x + 1| < |2(x - 1)|$$

$$|3x + 1| < |2x - 2|$$

$$[(3x + 1) + (2x - 2)][(3x + 1) - (2x - 2)] < 0$$

$$(5x - 1)(x + 3) < 0$$

$$\therefore \ x \in \left\langle -3; \frac{1}{5} \right\rangle$$

PROBLEMA 7 ¿Cuántos valores enteros "x" no satisfacen la inecuación

$$\frac{|x|}{x^2 + 2} < \frac{3}{|x|} \ ?$$

Resolución: Examinando cuidadosamente cada denominador podemos apreciar lo siguiente:

$$x^2 + 2 > 0 \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

$$|x| > 0 \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R}^* \qquad x \neq 0$$

$$\frac{|x|}{x^2+2} < \frac{3}{|x|}$$

$$|x|^2 < 3x^2 + 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se sabe que $|x|^2 = x^2$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$, luego en (1) se tendrá:

$$x^2 < 3x^2 + 6$$

$$-2x^2 - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6 > 0$$

$$2(x^2+3) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 > 0$$

Observar que estamos frente a una desigualdad absoluta, luego $x \in \mathbb{R}$

Pero recuerda que $x \neq 0$, en consecuencia el intervalo solución será:

$$C\,S = \mathbb{R} - \{0\}$$

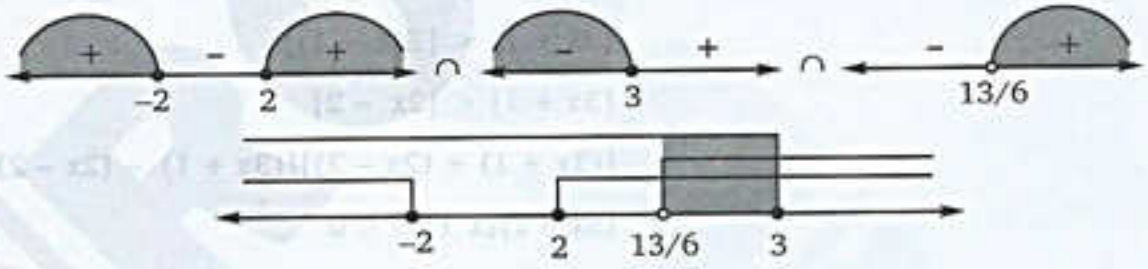
$\therefore$ Existe un valor entero x que no satisface la inecuación

PROBLEMA 8 Resolver: $\sqrt{x^2-4} > 3 - x$

Resolución: De acuerdo con la forma de la inecuación se plantea dos casos.

1° caso: $x^2 - 4 \geq 0 \wedge 3 - x \geq 0 \wedge x^2 - 4 > 9 - 6x + x^2$

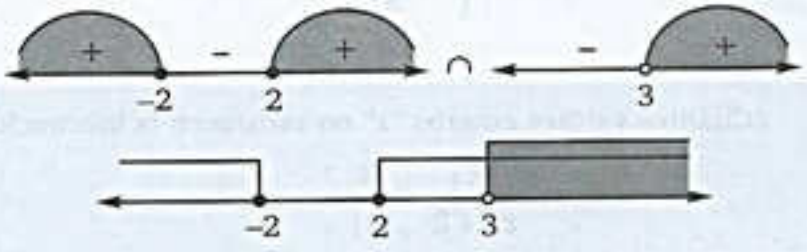
$$(x+2)(x-2) \geq 0 \wedge x - 3 \leq 0 \wedge 6x - 13 > 0$$



Observar que: $S_1 = \left\langle \frac{13}{6}; 3 \right]$

2° caso: $x^2 - 4 \geq 0 \wedge 3 - x < 0$

$$(x+2)(x-2) \geq 0 \wedge x - 3 > 0$$



Observar que: $S_2 = \langle 3; \infty \rangle$

Finalmente el conjunto solución (C S) viene dada por la unión de S_1 y S_2

$$\therefore\ C\,S = \left\langle \frac{13}{6}; \infty \right\rangle$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Resolver: $[x]^3 - 2[x]^2 + [x] = 2$

Resolución: La ecuación dada es:

$$[x]^3 - 2[x]^2 + [x] - 2 = 0$$

Factorizando tenemos:

$$([x]^2 + 1).([x] - 2) = 0$$

De donde es evidente: $[x] - 2 = 0$

$$[x] = 2$$

$$2 \le x < 3$$

$$\therefore \quad CS = [2; 3\rangle$$

PROBLEMA 10 Resolver:

$$\frac{a^2(x-1)}{2} + b^2 \ge \frac{b^2(x-3)}{2} + 2a^2,$$

siendo: $0 < a < b$

Resolución: Multiplicando a ambos miembros de la inecuación por 2 se tendrá:

$$a^2(x-1) + 2b^2 \ge b^2(x-3) + 4a^2$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, tendremos:

$$a^2x - a^2 + 2b^2 \ge b^2x - 3b^2 + 4a^2$$

Transponiendo y factorizando términos, obtenemos:

$$(a^2 - b^2)x \ge 5(a^2 - b^2) \quad \ldots\ldots(*)$$

A partir de la condición para a y b; elevamos al cuadrado:

$$0 < \underbrace{a^2 < b^2}$$

Y transponiendo términos encontramos que:

$$a^2 - b^2 < 0 \qquad \text{¡negativo!}$$

Entonces dividiendo (*) por $(a^2 - b^2)$; se obtiene:

$$x \le \frac{5(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$$

Simplificando, concluimos que: $x \le 5$

pasando a notación de intervalos diremos que:

$$\therefore \quad x \in \langle -\infty; 5]$$

PROBLEMA 11 Hallar el valor entero de "x" que satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x > -2 \quad .....(I) \\ x < 11 \quad .....(II) \\ x > 5 \quad .....(III) \\ x > 9 \quad .....(IV) \\ x < 15 \quad .....(V) \end{cases}$$

Resolución: Agrupando las inecuaciones del mismo sentido en forma separada, tendremos:

De (I), (III) $\wedge$ (IV): $\begin{cases} x > -2 \\ x > 5 \\ x > 9 \end{cases}$ Intersectando $x > 9$

De (II) y (V): $\begin{cases} x < 11 \\ x < 15 \end{cases}$ Intersectando $x < 11$

Estos resultados nos permiten afirmar que la solución del sistema viene dado por:

$$9 < x < 11$$

En esta inecuación el único "x" entero que lo satisface es:

$$\therefore \quad x = 10$$

PROBLEMA 12 ¿Cuántos valores enteros de "x" satisfacen:

$$2x - 5 < x + 3 < 3x - 7\ ?$$

Resolución: La inecuación dada es equivalente al siguiente sistema:

$$x + 3 > 2x - 5 \quad \wedge \quad x + 3 < 3x - 7$$

Por transposición de términos, tendremos:

$$-x > -8 \quad \wedge \quad -2x < -10$$

esto significa que:

$$x < 8 \quad \wedge \quad x > 5$$

Estas últimas desigualdades nos permiten afirmar que:

$$5 < x < 8$$

Finalmente los valores enteros de "x" son:

$$\therefore \quad C.S. = \{6; 7\}$$

PROBLEMA 13 Si el par $(x_0; y_0)$, de componentes enteros positivos, es solución de:

$$\begin{cases} 2x - 5y > x + 4 \quad .....(1) \\ 3x + 13 > 2y + 4x \quad ...(2) \end{cases}$$

¿Qué valor asume: $x_0 - y_0$?

team CALAPENSHKO

Resolución: Nuestra estrategia consistirá en resolver el sistema por el método de la reducción, vista en sistemas de ecuaciones. Observa:

De (1) despejamos "x" en función de "y":

$$x > 5y + 4 \quad \text{.....(3)}$$

De (2) despejamos "x" en función de "y":

$$-x > 2y - 13 \quad \text{.....(4)}$$

Sumando miembro a miembro, tendremos:

$$0 > 7y - 9$$

Despejando, obtenemos que:

$$y < 1{,}28$$

Puesto que "y" es entero positivo concluimos que:

$$0 < y < 1{,}28$$

Así el único valor entero para "y" resulta ser :

$$\boxed{y = 1} \quad \text{.....(5)}$$

Ahora de (3) y (4); se deduce que:

$$5y + 4 < x < 13 - 2y \quad \text{.....(6)}$$

Reemplazando (5) en (6) se deduce:

$$9 < x < 11$$

Como "x" es un número entero positivo, se tendrá:

$$\boxed{x = 10}$$

En consecuencia la solución entera positiva del sistema es:

$$(x_0; y_0) = (10; 1)$$

Finalmente el valor pedido será:

$$\therefore \quad x_0 - y_0 = 9$$

PROBLEMA 14 Si se cumple que: $-x^2 + nx \leq 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Determine la extensión del parámetro "n".

Resolución: Por condición tenemos:

$$-x^2 + nx \leq 2 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-x^2 + nx - 2 \leq 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Multiplicando por -1:

$$x^2 - nx + 2 \geq 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por propiedad se cumple:

$$(-n)^2 - 4(1)(2) \leq 0$$

$$n^2 - 8 \leq 0$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

$$(n+2\sqrt{2})(n-2\sqrt{2}) \le 0$$

De donde obtenemos:

$$-2\sqrt{2} \le n \le 2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ n \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$$

PROBLEMA 15 Resolver: $x^2 + 2ab < (a + 2b)x$, sabiendo que: $b > a > 0$

Resolución: La inecuación dada es:

$$x^2 - (a + 2b)x + 2ab < 0$$

$$(x-a)\,(x-2b) < 0$$

En la recta real tenemos:

$$\therefore\ CS = \langle a; 2b \rangle.$$

PROBLEMA 16 Si: $\langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; \infty\rangle$ es el CS de la siguiente inecuación:

$$(x + 1)^3 . (x^3 - 1) . (x^2 + 3x + 4) > 0$$

Calcular: $a^2 + b^2$

Resolución: La inecuación propuesta es:

$$(x + 1)^3 . (x-1) . (x^2 + x + 1) . (x^2 + 3x + 4) > 0$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 3x + 4 > 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Ahora nuestra inecuación se reduce a:

$$(x + 1)^3 . (x-1) > 0$$

Finalmente en la recta real tenemos:

$$CS = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$$

De donde podemos reconocer que:

$$a = -1 \ \wedge\ b = 1$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 = 2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 17 Resolver:

$$\frac{(x-2)^4.(x-1)^5.(x+1)^2}{(x^2+4)(x-3)^7} \leq 0$$

Resolución: Nótese que: $x^2 + 4 > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, luego nuestra inecuación se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\frac{(x-2)^4.(x-1)^5.(x+1)^2}{(x-3)^7} \leq 0$$

En la recta real:

$\therefore\ CS = [1; 3\rangle \cup \{-1\}$

PROBLEMA 18 ¿Cuántos enteros "x" verifican la inecuación:

$$\sqrt{2-\sqrt{9-x}} \geq 1\ ?$$

Resolución: De acuerdo con la teoría se debe cumplir la siguiente relación

$$2-\sqrt{9-x} \geq 0\ \wedge\ 2-\sqrt{9-x} \geq 1$$

Reescribiendo cada inecuación:

$$\sqrt{9-x} \leq 2 \quad \wedge \quad \sqrt{9-x} \leq 1$$

$$(9-x \geq 0 \wedge 9-x \leq 4)\ \wedge\ (9-x \geq 0 \wedge 9-x \leq 1)$$

$$(-x \geq -9\ \wedge -x \leq -5)\ \wedge\ (-x \geq -9 \wedge -x \leq -8)$$

$$(x \leq 9\ \wedge x \geq 5) \quad \wedge \quad (x \leq 9 \wedge x \geq 8)$$

$$5 \leq x \leq 9 \quad \wedge \quad 8 \leq x \leq 9$$

Finalmente tenemos

$$8 \leq x \leq 9$$

Como $x \in \mathbb{Z}$, tenemos:

$$x = 8 \vee x = 9$$

$\therefore$ Nº de valores = 2

PROBLEMA 19 ¿Cuántos enteros "x" verifican la inecuación:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{4-\sqrt{8-x}} > 0$$

Resolución: La inecuación dada es:

$$\sqrt{10-x} > \sqrt{4-\sqrt{8-x}}$$

$$10-x \geq 0 \wedge 4-\sqrt{8-x} \geq 0 \wedge 10-x > 4-\sqrt{8-x}$$

$$10-x \geq 0 \wedge -\sqrt{8-x} \geq -4 \wedge \sqrt{8-x} > x-6$$

$$\underbrace{x-10 \leq 0}_{\text{I}} \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} \leq 4}_{\text{II}} \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} > x-6}_{\text{III}}$$

De (I): $x-10 \leq 0 \rightarrow x \leq 10$ .....(1)

De (II): $\sqrt{8-x} \geq 4 \leftrightarrow 8-x \geq 0 \wedge 8-x \leq 16$

$$-x \geq -8 \wedge -x \leq 8$$

$$x \leq 8 \wedge x \geq -8$$

De donde obtenemos:

$-8 \leq x \leq 8$ .....(2)

De (III): $\sqrt{8-x} > x-6$

$$S_1 = 8-x \geq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge 8-x > (x-6)^2$$

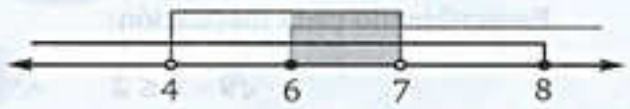
$$S_1 = 8-x \geq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge 8-x > x^2-12x+36$$

$$S_1 = 8-x \geq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge -x^2+11x-28 > 0$$

$$S_1 = x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge x^2-11x+28 < 0$$

$$S_1 = x-8 \leq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge (x-7)(x-4) < 0$$

En la recta real:

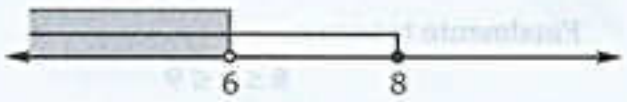


$\Rightarrow S_1 = [6;7\rangle$

$$S_2 = 8-x \geq 0 \wedge x-6 < 0$$

$$S_2 = x-8 \leq 0 \wedge x-6 < 0$$

En la recta real:



$\Rightarrow S_2 = \langle -\infty; 6\rangle$

Ahora tenemos:

$S_1 \cup S_2 = \langle -\infty; 7\rangle$ .....(3)

Finalmente tenemos:

$$CS = (1) \cap (2) \cap (3)$$

$$CS = \langle -\infty; 10] \cap [-8; 8] \cap \langle -\infty; 7\rangle$$

$$\therefore CS = [-8; 7\rangle$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 20 Calcular el producto de las soluciones de la siguiente ecuación::

$$|2x-6| + |15-5x| = 14$$

Resolución: La ecuación propuesta es:

$$|2(x-3)| + |-5(x-3)| = 14$$

Por teorema tenemos:

$$2|x-3| + 5|x-3| = 14$$
$$7|x-3| = 14$$
$$|x-3| = 2$$

Por propiedad se plantea:

$$x-3 = 2 \vee x-3 = -2$$
$$x = 5 \quad \vee x = 1$$

$\therefore$ producto de soluciones = 5

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 21 ¿Cuántos valores enteros de "x" verifican?

$$1 < \sqrt{x^2+4-4x} \leq 3$$

Resolución: La inecuación propuesta es:

$$1 < \sqrt{(x-2)^2} \leq 3$$
$$1 < |x-2| \leq 3$$

Por propiedad se plantea:

$$-3 \leq x-2 < -1 \ \vee \ 1 < x-2 \leq 3$$

Sumando dos unidades tenemos:

$$-1 \leq x < 1 \ \vee \ 3 < x \leq 5$$

Como $x \in \mathbb{Z}$, se tendrá:

$$x = -1;\ x = 0;\ x = 4;\ x = 5$$

$\therefore$ Nº de valores enteros = 4

PROBLEMA 22 Resolver: $|4-[\![x^2-x]\!]| = 0$

Resolución: Por teorema del valor absoluto, la igualdad propuesta es:

$$4-[\![x^2-x]\!] = 0 \ \Leftrightarrow \ [\![x^2-x]\!] = 4$$

Por teorema del máximo entero, la igualdad última será:

$$4 \leq x^2-x < 5$$

team CALAPENSHKO

Sumando $\frac{1}{4}$, con la finalidad de completar cuadrados, tenemos:

$$4+\frac{1}{4} \le x^2 - x + \frac{1}{4} < 5 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{17}{4} \le \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{21}{4}$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} \le \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Eliminando el valor absoluto, nuestro sistema se transforma es:

$$-\frac{\sqrt{21}}{2} < x - \frac{1}{2} \le -\frac{\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad \frac{\sqrt{17}}{2} \le x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x \le \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{17}}{2} \le x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore CS = \left\langle \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right\rangle$$

PROBLEMA 23 Luego de resolver $P^2(x) - 5P(x) + 6 \le 0$. Determine el número de valores enteros que asume x cuando $P(x) = x^2 - 1$

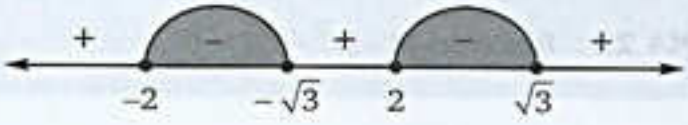
Resolución: Dando uso al criterio del aspa simple, la inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$[P(x) - 2][P(x) - 3] \le 0$$

Ahora reemplazando P(x) por $x^2 - 1$, obtenemos:

$$(x^2 - 3)(x^2 - 4) \le 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2)(x - 2) \le 0$$



$$CS = \left[-2; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; 2\right]$$

$\therefore$ Nº de valores enteros que asume $x = 2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 24 Resolver : $\sqrt{x-2}\,.\,\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$

Resolución: Por existencia del radical de índice par dentro del conjunto de los números reales se plantea:

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Ahora la inecuación:

$$\sqrt{x-2}\,.\,\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

Queda reducida así:

$$\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-9 \geq 0$$

$$(x+3)(x-3) \geq 0$$

En la recta real:

Para $x \geq 2$, luego:

$$x \geq 0 \ \vee \ x = 2$$

$$\therefore \ CS = [3;\infty\rangle \cup \{2\}$$

PROBLEMA 25 Determine la suma de soluciones reales de la ecuación:

$$|x|^3 + |x| - 3 = x^3$$

Resolución: Para resolver nuestra ecuación debemos plantear dos casos, veamos:

I. Si $x \geq 0$: $\quad x^3 + x - 3 = x^3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

$$x = 3 \ \text{¡es la solución!}$$

II. Si $x < 0$: $\quad -x^3 - x - 3 = x^3 \Leftrightarrow 2x^3 + x + 3 = 0$

Factorizando al polinomio cúbico:

$$(x+1)(2x^2-2x+3) = 0$$

Fácilmente podemos reconocer que $2x^2 - 2x + 3 > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, luego la igualdad anterior es posible si y solo si: $x + 1 = 0$

$$x = -1 \ \text{¡es la solución!}$$

$$\therefore \ \Sigma \text{soluciones} = 3 - 1 = 2$$

PROBLEMA 26 Resolver: $\left[\frac{|x-1|+2}{3}\right]=4$

Resolución: Por teorema tenemos:

$$4 \le \frac{|x-1|+2}{3} < 5$$

$$12 \le |x-1|+2 < 15$$

$$10 \le |x-1| < 13$$

Por propiedad se plantea:

$$-13 < x-1 \le -10 \quad \vee \quad 10 \le x-1 < 13$$

$$-12 < x \le -9 \quad \vee \quad 11 \le x < 14$$

$$\therefore CS = \langle -12; -9] \cup [11; 14\rangle$$

PROBLEMA 27 Resolver: $[\![3x-5]\!]=2x+1$

Resolución: Hagamos que $2x + 1 = n$; donde $n \in \mathbb{Z}$, pues es un máximo entero:

$$2x+1=n \Leftrightarrow x=\frac{n-1}{2} \qquad \text{..... (1)}$$

Reemplazando en la ecuación original, tenemos:

$$\left[\frac{3n-3}{2}-5\right]=n \Leftrightarrow \left[\frac{3n-13}{2}\right]=n$$

Por teorema del máximo entero, la igualdad será:

$$n \le \frac{3n-13}{2} < n+1$$

$$2n \le 3n-13 < 2n+2$$

$$3n-13 \ge 2n \ \wedge \ 3n-13 < 2n+2$$

$$n \ge 13 \ \wedge \ n < 15$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, tenemos $n = 13$ ó $n = 14$. Finalmente en (1) conseguimos:

$$x=\frac{13-1}{2}=\frac{12}{2}=6 \; ; \; x=\frac{14-1}{2}=\frac{13}{2}$$

$$\therefore CS=\left\{6; \frac{13}{2}\right\}$$

team CALAPENSHKO

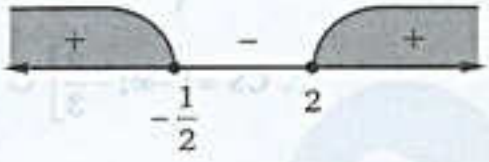
PROBLEMA 28 Resolver: $|3x-1| = |2x+1| + |x-2|$

Resolución: Una rápida inspección permite observar que la igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$|(2x+1)+(x-2)| = |2x+1| + |x-2|$$

Ahora por propiedad se cumple que:

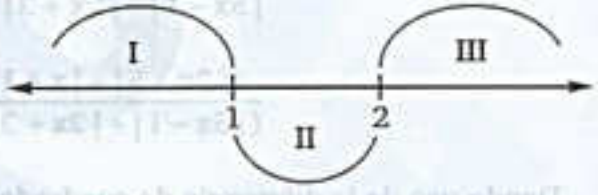
$$(2x+1)(x-2) \geq 0$$



$$\therefore \text{CS} = \left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup [2; \infty\rangle$$

PROBLEMA 29 Resolver: $|x-2| + |x-1| \geq x+5$

Resolución: Reescribiendo la inecuación según un criterio de zonas procedemos de la manera siguiente:



I. $-\infty < x < 1$:

$$\begin{aligned} |x-2| + |x-1| &\geq x+5 \\ -(x-2)-(x-1) &\geq x+5 \\ -x+2-x+1 &\geq x+5 \\ -2x+3 &\geq x+5 \\ -3x &\geq 2 \\ x &\leq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Intersectando con la zona de acción, tenemos que $x \in \left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right]$

II. $1 \leq x < 2$:

$$\begin{aligned} |x-2| + |x-1| &\geq x+5 \\ -(x-2)+x-1 &\geq x+5 \\ -x+2+x-1 &\geq x+5 \\ 1 &\geq x+5 \\ -x &\geq 4 \\ x &\leq -4 \end{aligned}$$

Observa que al intersectar con la zona de acción obtenemos conjunto vacío, luego $x \in \varnothing$.

III. $2 \le x < \infty$: $|x-2| + |x-1| \ge x+5$

$$x-2+x-1 \ge x+5$$
$$2x-3 \ge x+5$$
$$x \ge 8$$

Intersectando con la zona de acción, tenemos que $x \in [8; \infty\rangle$.

Finalmente el conjunto solución de la inecuación viene dado por la unión de todos los casos planteados, veamos:

$$CS = \left\langle -\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \varnothing \cup [8; \infty\rangle$$

$$\therefore CS = \left\langle -\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [8; \infty\rangle$$

PROBLEMA 30 Resolver: $\dfrac{|3x+5|-|x+1|}{|5x-1|-|2x+3|} \ge 0$

Resolución: Con la finalidad de eliminar al valor absoluto, multiplicaremos a ambos miembros de la inecuación por la siguiente expresión positiva:

$$\frac{|3x+5|+|x+1|}{|5x-1|+|2x+3|}$$

$$\frac{(|3x+5|+|x+1|)(|3x+5|-|x+1|)}{(|5x-1|+|2x+3|)(|5x-1|-|2x+3|)} \ge 0$$

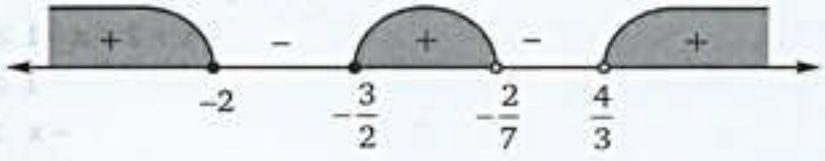
Dando uso de la diferencia de cuadrados, tenemos:

$$\frac{(3x+5)^2-(x+1)^2}{(5x-1)^2-(2x+3)^2} \ge 0$$

$$\frac{(3x+5+x+1)(3x+5-x-1)}{(5x-1+2x+3)(5x-1-2x-3)} \ge 0$$

$$\frac{(4x+6)(2x+4)}{(7x+2)(3x-4)} \ge 0$$

Finalmente llevando los puntos de corte a la recta real, tenemos:



$$\therefore CS = \langle -\infty; -2] \cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{7}\right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}; \infty\right\rangle$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El número entero "x" que cumple la desigualdad:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{12}{19} < \frac{x+1}{x+2}$$

es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. Resolver:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3-7x}{10} + \dfrac{x+1}{2} > 4 - \dfrac{7-3x}{2} \\ 7(3x-6) + 4(17-x) > 11 - 5(x-3) \end{cases}$$

A) $\langle 1; 3\rangle$ B) $\langle 2; 8\rangle$ C) $\langle 0; 9\rangle$
D) $\left\langle \frac{1}{2}; 5\right\rangle$ E) $\langle 1; 7\rangle$

3. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{x+50}{5} > \dfrac{x}{2} & .....(1) \\ (3-x)^3 + x^3 < 8 + (3x+1)^2 & .....(2) \\ (x+2)^2 > (x+1)^2 + 2 & .....(3) \end{cases}$$

A) $\left\langle \frac{6}{11}; \frac{100}{3}\right\rangle$ B) $\left[\frac{6}{11}; \frac{100}{3}\right]$ C) $\left\langle \frac{5}{11}; 20\right\rangle$
D) $\left\langle \frac{4}{11}; 17\right\rangle$ E) $\varnothing$

4. La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen al siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{13x-5}{2} + \dfrac{3x-8}{5} > \dfrac{2x+7}{3} + 1 & .....(1) \\ \dfrac{3x-1}{5} - 1 < \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{7} & .....(2) \end{cases}$$

es:

A) 5 B) 9 C) 14
D) 20 E) 27

5. Hállese el menor número real "M" tal que se cumpla:

$$6 + 6x - x^2 \le M \; ; \; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

A) 12 B) 15 C) 19
D) 21 E) 20

6. Hallar el menor número real "n" tal que se cumpla:

$$n \le x^2 - 4x + 41 \; ; \; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

A) 32 B) 37 C) 39
D) 41 E) 40

7. Hállese el valor de "K" si:

I. $x \in [-6; -4]$

II. $K = \dfrac{|8x+94| - |-3x+94|}{x}$

A) 8 + 188x
B) 5 + 188x
C) 11
D) Tiene 2 soluciones
E) 11 + x

8. Resolver:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| < \frac{4}{3}$$

A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$
B) $\left\langle -\frac{5}{3}; 1\right\rangle$
C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{5}{3}\right\}$
D) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
E) $\mathbb{R}$

9. Si: $x \in \langle 0; 3\rangle$

Calcular:

$$M = \frac{|17x+2| - |13x+2|}{x}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Sabiendo que:

$$b > 0 \ \wedge \ |x-a| < 2b$$

Hallar el intervalo al que pertenece:

$$\frac{b}{x-a+3b}$$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\left\langle -1; \frac{1}{5}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{5}; 1\right\rangle$
D) $\langle -5; 1\rangle$ E) $\langle -5; -1\rangle$

11. Resolver:

$$|6 - 2x| \geq 7$$

A) $\langle -\infty; 1/2] \cup [13/2; \infty\rangle$
B) $\langle -\infty; 1/2\rangle \cup \langle 13/2; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; 3/2] \cup [15/2; \infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 3] \cup \langle 5; \infty\rangle$
E) $\langle -\infty; 3\rangle \cup [5; \infty\rangle$

12. Resolver:

$$|x + 4| \leq |2x - 6|$$

A) $\langle -\infty; 2/3] \cup [10; \infty\rangle$
B) $[2/3; 10\rangle$
C) $\langle 2/3; 10]$
D) $\langle -\infty; 2/3\rangle \cup \langle 10; \infty\rangle$
E) $\langle -\infty; 0] \cup \{10\}$

13. Si:

$$|11 - 2x| \leq 3$$

Hállese "M", $(M > 0)$ tal que:

$$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| \leq M$$

A) 5/2 B) 3/2 C) 7/2
D) 11/2 E) 5/11

14. Hallar el menor valor de "M" que satisface la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2x+1}{x-2} - \frac{1}{2}\right| \leq M$$

para $x \in [4; 7]$

A) 7/21 B) 25/4 C) 4
D) 4/25 E) 7

15. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > \dfrac{x-4}{x+1} & \text{.....(1)} \\ \dfrac{x-1}{x+5} > \dfrac{x-2}{x+2} & \text{.....(2)} \end{cases}$$

A) $\langle 1{,}5; 3{,}5\rangle$
B) $\langle -1; 1\rangle \cup \langle 3; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle -2; 4\rangle$
D) $\langle -1; 1\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$
E) N.A.

16. Resolver la inecuación:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-5} > \sqrt{3x}$$

para luego indicar el intervalo solución.

A) $\left\langle -3; \frac{5}{2}\right\rangle$ B) $[5; \infty\rangle$ C) $[-3; \infty\rangle$
D) $\left\langle -\frac{5}{2}; \infty\right\rangle$ E) $\left[\frac{5}{2}; \infty\right\rangle$

team CALAPENSHKO

17. Resolver:

$$\sqrt{\sqrt{x+10}-\sqrt{3-x}}>-5$$

A) $[-3;2]$ B) $\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{2}\right]$

C) $\left[-\frac{7}{2};\frac{15}{4}\right]$

D) $\left[-\frac{7}{2};3\right]$ E) $\left[-\frac{7}{2};4\right]$

18. Resolver:

$$x(2x+1)(x-2)(2x-3)>63$$

A) $\langle-\infty;2\rangle\cup\langle3;\infty\rangle$

B) $\left\langle-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle3;\infty\rangle$

C) $\langle0;\infty\rangle$

D) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle2;\infty\rangle$

E) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle1;\infty\rangle$

19. Resolver:

$$\frac{(x-5)^8(x+1)^{11}(x-2)^5}{(2x^2+x+5)(x-3)^7}\geq 0$$

A) $[-1;2]\cup\langle3;\infty\rangle$

B) $[-2;3\rangle\cup\langle3;5\rangle$

C) $[-1;2\rangle\cup\langle3;\infty\rangle$

D) $\langle3;7\rangle\cup\langle7;\infty\rangle$

E) $\langle-1;2\rangle\cup\langle3;7\rangle$

20. Resolver:

$$\frac{(x^2+2x+15)(x^2-1)(x-1)(x+7)}{(x-5)(x^2-4)(x-2)(x^2+3)}\leq 0$$

A) $\langle-\infty;7]\cup\langle1;2]\cup\langle3;\infty\rangle$

B) $[-7;-2\rangle\cup[-1;2\rangle\cup\langle2;5\rangle$

C) $\langle-7;-2]\cup\langle-1;2\rangle\cup\langle2;\infty\rangle$

D) $\langle-7;-2\rangle\cup\langle-1;2\rangle\cup\langle2;5]$

E) $\langle-7;0\rangle\cup\langle1;2\rangle\cup[2;\infty\rangle$

21. Sea "S" el conjunto solución de:

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{1-3x}>\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$$

Entonces:

A) $S\subset[-4;1\rangle$

B) $S=\langle-3;-1\rangle\cup\left\langle0;\frac{1}{2}\right\rangle$

C) $S\subset[-5;0\rangle$

D) $S=\langle-3;1\rangle\cup\left\langle0;\frac{1}{3}\right\rangle$

E) $S\subset\langle-2;2\rangle$

22. Resolver:

$$2<|x^2-x-1|<|x^2+x|$$

A) $\left\langle\frac{1+\sqrt{13}}{2};\infty\right\rangle$

B) $\langle3;\infty\rangle$

C) $\left\langle\frac{\sqrt{13}-1}{2};\infty\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right\rangle$

E) $\left[\frac{1}{2};\infty\right\rangle$

23. Resolver la desigualdad:

$$2x+\sqrt{x-\frac{1}{x}-\left|x+\frac{1}{x}\right|}+\sqrt{4-x}\leq 0$$

A) $\langle-4;4\rangle$ B) $\langle-\infty;4\rangle$ C) $\langle2;7\rangle$

D) $\langle-\infty;0\rangle$ E) $\langle-\infty;7\rangle$

24. Resolver:

$$\frac{|3x-x^2|-4}{4-|x|}>-1$$

A) $\langle-4;0\rangle\cup\langle1;2\rangle$

B) $\langle-2;2\rangle$

C) $\langle-4;0\rangle\cup\langle0;2\rangle$

D) $\langle-4;2\rangle$

E) $\langle-4;-2\rangle$

25. Resolver:

$$\frac{x-|x-4|}{25-x^2}>0$$

A) $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$

B) $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 0; 4\rangle$

C) $\langle 0; 4\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

D) $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 5; \infty\rangle$

E) $\langle 0; 5\rangle$

26. Calcular "M" para que se verifique para todo valor real de "x" la siguiente igualdad:

$$-3<\frac{x^2-Mx+1}{x^2+x+1}<3$$

A) $M \in \langle -\infty; 0\rangle$ B) $M \in \langle -\infty; -1\rangle$

C) $M \in \langle -5; 1\rangle$

D) $M \in \langle 1; 5\rangle$ E) $M \in \langle 1; \infty\rangle$

27. Indique el menor valor natural de "x" que cumpla con la siguiente inecuación:

$$\frac{\sqrt[5]{x^2-2x-15}\,(x^3-6x^2+9x)}{(x-1)^4(x-2)^7}\le 0$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

28. "A" es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{|3x-1|-|2x|-|x-1|}+2x\ge 1$$

Entonces, el conjunto "A" es:

A) $\left[\frac{1}{2}; \infty\right\rangle$ B) $[1; \infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 1]$

D) $\langle -\infty; 1\rangle$ E) $\langle -\infty; 0]$

29. Resolver:

$$\frac{|x|}{\sqrt{|x^2-16|}}<\frac{x}{\sqrt{|x|-4}}$$

A) $x \in \langle 0; 4\rangle$

B) $x \in \langle 4; +\infty\rangle$

C) $x \in \langle 0; 4\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

D) $x \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

E) $x \in \langle -4; 0\rangle \cup \langle 0; 4\rangle$

30. El conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{2-|x|}\,.\,(1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)}\ge 0 \text{ es:}$$

A) $\langle 2; 2\rangle$

B) $[1; 2\rangle$

C) $[1; 1]$

D) $\langle -2; 1]$

E) $\langle -2; -1] \cup [1; 2\rangle$

31. Resolver:

$$\sqrt[8]{\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}}}\ge\frac{x-3}{x-7}$$

A) $x \in [3; 4\rangle$

B) $x \in [3; 4] \cup [5; 7]$

C) $x \in [3; 9$

D) $x \in [3; 4\rangle \cup [5; 7\rangle$

E) $x \in \mathbb{R}$

32. Al resolver la inecuación:

$$\sqrt{x^2-24x+144}-\sqrt{x^2-12x+36}\ge\sqrt{x^2-6x+9}$$

Se obtiene un conjunto solución de la forma: $[a; b]$. Hallar: $a + b$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

team CALAPENSHKO

33. Resolver:

$$\frac{|x-3|-|4-x|}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}} < \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{|x-4|+|3-x|}$$

A) $x \in [2;1\rangle$ B) $x \in [2;-1\rangle$
C) $x \in [-2;-1\rangle$
D) $x \in [-2;1\rangle$ E) $x \in \langle 2;1]$

34. Resolver la desigualdad:

$$|x-4| + |2x+6| > 10$$

Dar como respuesta la suma entre el mayor valor entero negativo y el menor entero positivo que verifica la desigualdad.

A) 5 B) –4 C) 1
D) –2 E) 3

35. Identifica un intervalo solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \geq 0$$

A) $\left[-11;-\frac{9}{5}\right\rangle$ B) $\langle 0;2\rangle$ C) $\langle -11;0\rangle$
D) $\left\langle \frac{7}{5};\frac{5}{3}\right]$ E) $\left\langle \frac{5}{3};\infty\right\rangle$

36. Resolver: $2\sqrt{2}x + \frac{5}{\sqrt{2x}} \leq 3\sqrt{2}$

A) $\left\langle -\infty;\sqrt{21}\right\rangle$ B) $\langle 0;\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;0\rangle$
D) $\left[\sqrt{2};\infty\right\rangle$ E) $\varnothing$

37. Proporcionar un intervalo solución de la inecuación

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-8} > 3$$

A) $[8;12\rangle$ B) $\langle 8;16\rangle$ C) $[8;12]$
D) $\langle 8;12\rangle$ E) $\varnothing$

38. Determine la suma de los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$||x|-1| = x$$

A) 2 B) 0 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

39. Si al doble de la edad de cierta persona se le resta 17 años resulta menor que 35; pero si a la mitad de la edad de esta persona se le suma 3 el resultado es menor que 15. ¿Cuál es su edad?

A) 20 B) 23 C) 25
D) 22 E) 21

40. Un muchacho empezó comiendo un cierto número de naranjas, después compró cinco más qué también se las comió resultando que había comido más de 10 naranjas. Compró ocho naranjas más y al comérselas observó que había comido en total más del triple de naranjas que comió la primera vez. ¿Cuántas naranjas comió en total el muchacho?

A) 6 B) 11 C) 17
D) 19 E) 21

41. Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió 70 y le quedaron más de la mitad, al día siguiente le devolvieron seis, pero logró vender 36 después de lo cuál le quedaron menos de 42. ¿Cuántos artículos adquirió el comerciante?

A) 138 B) 139 C) 140
D) 141 E) 142

42. Si a un número de tres cifras múltiplo de 11 se le resta 396 se obtiene otro mayor que el mismo número, invertido, se pide el valor de la cifra de las decenas sabiendo que la suma de sus cifras extremas es superior a 12.

A) 7 B) 4 C) 2
D) 6 E) 5

43. En un número de 4 cifras: a la cifra de las unidades se le suma tantas veces la cifra de unidades como la cifra lo indica y se le agrega 187 veces el valor de la cifra entonces será menor que 4 veces. El cuadrado de dicha cifra más 480 unidades. ¿Cuáles podrían ser las cifras de las unidades de dicho número?

A) 9, 8, 7 B) 8, 7, 6 C) 7, 5, 4
D) 1, 0, 2 E) 3, 4, 5

44. A 3 hermanos A, B y C les regalaron el mismo número de granadas, "A" comió los 7/12 de las suyas más la mitad de una, "B" comió la mitad de las que tenía más una y "C" comió 1/3 de una y la mitad del número que resultaría si le hubieran regalado, una más. "A" comió menos que "B" y más qué "C". ¿Cuántas granadas recibió cada hermano?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

45. Indicar la suma de las cifras del menor valor de "n", de modo que, para todo "x" real se verifique:
$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-n| \geq 2\,004$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

46. Resolver: $\left[\left[\frac{2x-1}{x+3}\right]\right]=4$

A) $\left[-\frac{13}{2};-\frac{16}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{13}{2};4\right]$
C) $\langle 2;5\rangle$
D) $\left\langle-\frac{13}{2};\frac{16}{3}\right\rangle$ E) $\left[-\frac{11}{2};-\frac{16}{3}\right]$

47. Resolver: $\left[\left[\frac{3x+2}{x-1}\right]\right]\leq\frac{13}{3}$

A) $\langle-\infty;1\rangle\cup\left[\frac{7}{2};\infty\right\rangle$ B) $\langle-\infty;1\rangle\cup\left\langle\frac{7}{2};\infty\right\rangle$
C) $\left\langle-\infty;\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 3;\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;1\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$ E) $\left\langle-\frac{7}{2};\infty\right\rangle$

48. Resolver: $\left[\left[x^2-8\right]\right]>\frac{1}{2}$

A) $\langle-\infty;-3]\cup[3;\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$
C) $\langle-\infty;-3]\cup\langle 3;\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 4;\infty\rangle$ E) $\langle-\infty;-3\rangle\cup[3;\infty\rangle$

49. Resolver: $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{2-x}}}{x^2-[[x]]|x|-\frac{3}{4}}\leq 0$

A) $\left\langle 0;\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$ B) $\langle 4;\infty\rangle$
C) $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle\cup\left[1;\frac{3}{2}\right\rangle$
D) $\langle 7;\infty\rangle$ E) $\left\langle\frac{3}{2};4\right\rangle\cup\langle 5;\infty\rangle$

50. Resolver: $\dfrac{\sqrt{4-|x|}}{[[x^2-2x+7]]}>0$

A) $\langle-4;-2]$ B) $\langle-\infty;2\rangle$
C) $\langle 2;5\rangle\cup\langle 6;\infty\rangle$
D) $[-4;\infty\rangle$ E) $\langle 2;4]$

team CALAPENSHKO

Capítulo 14

Relaciones y Funciones-I

CAPACIDADES:

- Identificar funciones de relaciones
- Determinar dominio, rango y gráfica de funciones elementales.
- Construir gráficas de funciones a partir de una gráfica dato.

$$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = F(x)\ ;\ x \in D_F \ \wedge\ y \in R_F\right\}$$

AGUSTÍN CAUCHY

El estudio de las funciones reales constituye el armazón de toda la matemática real y consecuentemente de toda la ciencia y tecnología moderna.

La definición moderna del concepto de función se debe al matemático francés Agustín – Louis Cauchy (1 789 – 1 857). Cauchy inció la sistematización de la teoría de grupos, imprescindible en el Álgebra Moderna y fue uno de los precursores de la rigurosidad en matemáticas.

La idea de función es uno de los conceptos más importantes de la matemática, la cual se sustenta en esto: si a cada elemento de un conjunto corresponde un único elemento de un segundo conjunto entonces esta correspondencia se llama función. Por ejemplo la correspondencia entre las computadoras de una marca determinada y su número de serie es una función. Así esta establecida una correspondencia entre el conjunto de todas las computadoras de esa marca con el conjunto de números enteros (serie).

De la misma manera a cada cantidad de una mercancía le corresponde una cierta suma de dinero como precio de venta y a cada número de páginas de este libro, la cantidad de letras que aparecen en ella.

En cualquiera de los casos anteriores y otros de similar naturaleza podríamos representar los resultados en forma gráfica; ellos constituirá una descripción aproximada de la función.

team CALAPENSHKO

RELACIONES

DEFINICIONES PREVIAS

I. PAR ORDENADO: Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden, si los elementos del par ordenado son a y b al conjunto se le denota por (a; b) y se define de la manera siguiente:

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Donde: a = Primera componente
b = Segunda componente

Propiedades:

1) $(a; b) \neq (b; a);\ \forall\ a \neq b$

2) $(a; b) = (c; d) \rightarrow a = c \wedge b = d$

II. PRODUCTO CARTESIANO: Dados dos conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano de A por B (en ese orden) se denota así A × B y se define de la manera siguiente:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Donde: A = Conjunto de partida
B = Conjunto de llegada

Ejemplo: Dados los conjuntos

$$A = \{1; 2; 3\} \ \wedge \ B = \{-1; 2\}$$

Determinar $A \times B \ \wedge \ B \times A$

Resolución: Para A × B tenemos: $A \times B = \{1; 2; 3\} \wedge \{-1; 2\}$

$$A \times B = \{(1; -1), (1; 2), (2; -1), (2; 2), (3; -1), (3, 2)\}$$

Para B × A tenemos: $B \times A = \{-1; 2\} \wedge \{1; 2; 3\}$

$$B \times A = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$$

Propiedades:

1) En general el producto cartesiano no es conmutativo.

$$A \times B \neq B \times A$$

2) El número de elementos de A × B es igual al número de elementos de B × A y se obtiene según la fórmula:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

team CALAPENSHKO

RELACIÓN BINARIA

I. DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se dice que R es una relación de A en B (en ese orden) si y solo si R es un subconjunto de $A \times B$, es decir: $R \subset A \times B$.

$$R = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B \wedge aRb\}$$

Donde: a R b indica la relación que existe entre las componentes a y b

Ejemplo: Dados los conjuntos

$$A = \{1; 2; 4\} \quad \wedge \quad B = \{2; 3\}$$

Determinar la relación R de A en B definida de la manera siguiente:

$$R = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}$$

Resolución: Hallemos el producto cartesiano de A por B

$$A \times B = \{1; 2; 4\} \times \{2; 3\}$$

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (4; 2), (4; 3)\}$$

Observar que los elementos de R son todos los pares $(a; b) \in A \times B / a < b$, luego tenemos:

$$R = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\}$$

II. RELACIÓN EN A: Dado el conjunto no vacío A, se dice que R es una relación en A si y solamente si $R \subset A \times A$.

III. CLASES DE RELACIÓN: Sea R una relación en A, luego R es:

1) Reflexiva:

Si: $\forall a \in A : (a; a) \in R$

2) Simétrica:

Si: $(a; b) \in R \rightarrow (b; a) \in R$

3) Transitiva:

Si: $(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \rightarrow (a; c) \in R$

4) De Equivalencia:

Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Dado el conjunto $A = \{1; 2; 3\}$ se define una relación en A de la manera siguiente:

$$R = \{(1; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1)\}$$

¿R es una relación de equivalencia?

Resolución: Si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez:

Reflexiva: $\forall\, a \in A \rightarrow (a; a) \in R$

$1 \in A \rightarrow (1; 1) \in R$ ¡Correcto!

$2 \in A \rightarrow (2; 2) \in R$ ¡Correcto!

$3 \in A \rightarrow (3; 3) \in R$ ¡Correcto!

$\rightarrow$ R es reflexiva

Simétrica: $(a; b) \in R \rightarrow (b; a) \in R$

$(1; 2) \in R \rightarrow (2; 1) \in R$ ¡Correcto!

Los demás casos son evidentes.

$\rightarrow$ R es simétrica

Transitiva: $(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \rightarrow (a; c) \in R$

$(1; 1) \in R \wedge (1; 2) \in R \rightarrow (1; 2) \in R$ ¡Correcto!

$(1; 2) \in R \wedge (2; 2) \in R \rightarrow (1; 2) \in R$ ¡Correcto!

$(1; 2) \in R \wedge (2; 1) \in R \rightarrow (1; 1) \in R$ ¡Correcto!

$\rightarrow$ R es transitiva.

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

FUNCIONES

DEFINICIÓN

Dada una relación F de A en B ($F \subset A \times B$), se dice que F es una función de A en B, si y sólo si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$ tal que el par $(x; y) \in F$, es decir que dos pares pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplo: ¿Cuál o cuales de las siguientes relaciones son funciones?

$$R_1 = \{(2; 1), (9; 3), (-1; 7)\}$$

$$R_2 = \{(3; 0), (4; 0). (5; 1)\}$$

$$R_3 = \{(5; 1), (4; -1), (4; 2)\}$$

Resolución: De acuerdo con la definición se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función ¿Por qué? Porque (4; –1) y (4; 2) son pares ordenados distintos con la misma primera componente

team CALAPENSHKO

PROPIEDAD: Siendo F una función se verifica lo siguiente:

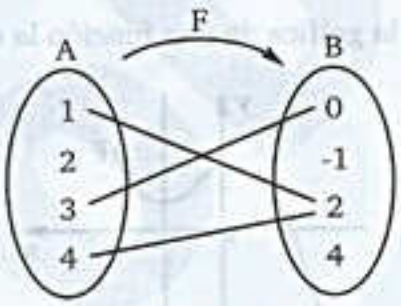
$$(x; y) \in F \wedge (x; z) \in F \rightarrow y = z$$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN F

I. **Dominio de F = Dom(F):** (D_F) Denominado también conjunto de pre – imagenes, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida.

II. **Rango de F = Ran(F):** (R_F) Denominado también conjunto de imágenes, recorrido o contradominio, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada.

Ejemplo: Dada la relación funcional representada por el diagrama sagital



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución: Del diagrama se tiene:

$$F = \{(1; 2), (3; 0), (4; 2)\}$$

De donde: $D_F = \{1; 3; 4\} \wedge R_F = \{2; 0\}$

PROPIEDAD: Sea F una función de A en B, es decir $F: A \rightarrow B$ se cumple:

$$D_F \subset A \wedge R_F \subset B$$

APLICACIÓN

Dada una función F de A en B, $F: A \rightarrow B$; se dice que F es una aplicación si y sólo si su dominio es igual al conjunto de partida.

$$F \text{ es aplicación} \leftrightarrow D_F = A$$

team CALAPENSHKO

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

DEFINICIÓN

Dada una función F de A en B, F: A → B, si A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se afirmará que F es una función real de variable real.

$$F: A \to B, A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$$

Debido a ello F tendrá una representación gráfica en el plano cartesiano (x o y), la cual viene dada por un conjunto de puntos generados al establecer la relación de correspondencia entre la variable independiente "x" y su imagen la variable dependiente "y", es decir:

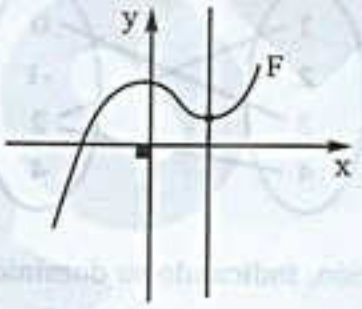
$$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D_F \wedge y = F(x)\right\}$$

La igualdad mostrada: y = F(x) expresa la regla de correspondencia de la función real F.

TEOREMA

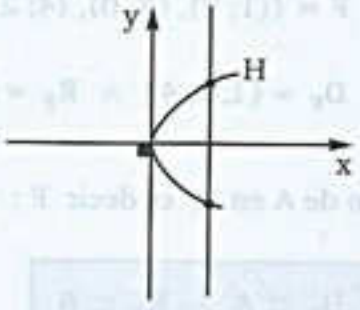
Toda recta vertical trazada a la gráfica de una función la corta a lo más en un solo punto.

Fig (1):



F corresponde a la gráfica de una función.

Fig (2):



H no corresponde a la gráfica de una función.

twitter.com/calapenshko

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL DOMINIO Y EL RANGO

1) **Para el Dominio** se despeja la variable y, para luego analizar la existencia de su equivalente

2) **Para el Rango** se despeja la variable x, para luego analizar la existencia de su equivalente. A veces el rango se determina a partir del dominio.

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

Frecuentemente para determinar dominios y rangos es necesario reconocer la existencia de las expresiones dadas dentro del conjunto de los números reales, así pues tenemos:

- $\frac{A}{B} \in \mathbb{R} \leftrightarrow B \neq 0$
- $\sqrt{A} \in \mathbb{R} \leftrightarrow A \geq 0$

Ejemplo: Determinar el dominio y el rango de la función F, donde:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big/ y = F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Resolución: De acuerdo con los criterios

Para el dominio: $y = \frac{2x+1}{x-3}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x - 3 \neq 0$$
$$x \neq 3$$
$$x \in \mathbb{R} - \{3\}$$
$$\therefore D_F = \mathbb{R} - \{3\}$$

Para el rango: $y = \frac{2x+1}{x-3}$

Despejamos x:

$$xy - 3y = 2x + 1$$
$$xy - 2x = 3y + 1$$
$$(y-2)x = 3y + 1$$
$$x = \frac{3y+1}{y-2}$$
$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow y - 2 \neq 0$$
$$y \neq 2$$
$$y \in \mathbb{R} - \{2\}$$
$$\therefore R_F = \mathbb{R} - \{2\}$$

Ejemplo: Determinar el rango de la función F, la cual viene dada por

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = 2x - 3; x \in \langle 5; 10]$$

Resolución: Observar que el rango se puede encontrar a partir del dominio, pues con $x \in \langle 5; 10]$, bastará determinar la extensión de $y = 2x - 3$, veamos:

Por condición	$x \in \langle 5; 10]$
De donde tenemos	$5 < x \leq 10$
Multiplicando por 2	$10 < 2x \leq 20$
Sumando –3	$7 < 2x - 3 \leq 17$
Observar que	$y \in \langle 7; 17]$

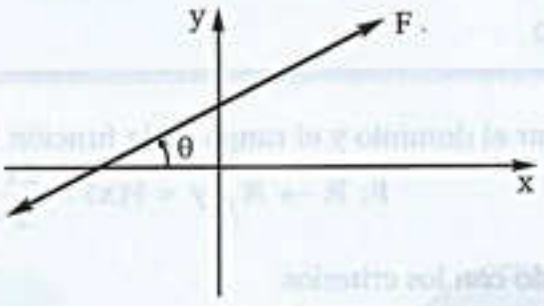
$$\therefore R_F = \langle 7; 17]$$

FUNCIONES ESPECIALES

I. FUNCIÓN LINEAL:

$$F: y = F(x) = mx + b$$

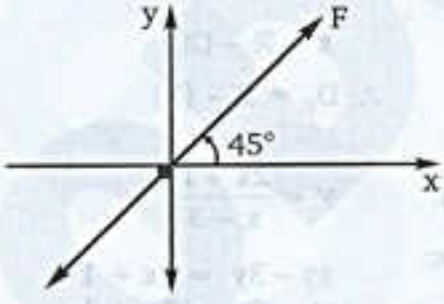
m = pendiente
$m = \tan\theta$



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

II. FUNCIÓN IDENTIDAD:

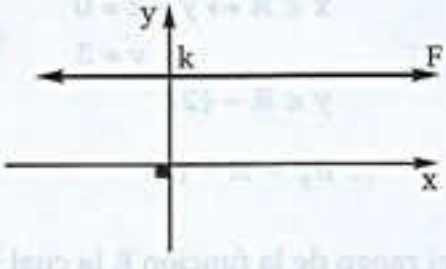
$$F: y = F(x) = x$$



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

III. FUNCIÓN CONSTANTE:

$$F: y = F(x) = k\ ;\ k \in \mathbb{R}$$

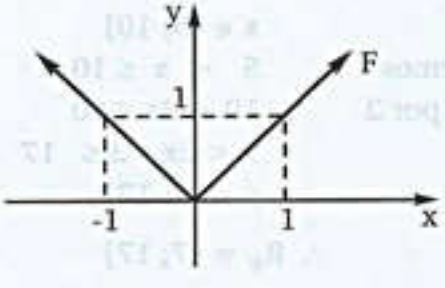


$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \{k\}$

IV. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:

$$F: y = F(x) = |x|$$

$$y = |x| = \begin{cases} x\ ;\ x > 0 \\ 0\ ;\ x = 0 \\ -x\ ;\ x < 0 \end{cases}$$



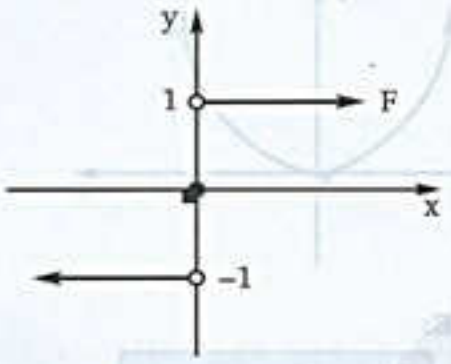
$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = [0; \infty\rangle$

team CALAPENSHKO

V. FUNCIÓN SIGNO:

$$F: y = F(x) = Sgn(x)$$

$$y = Sgn(x) = \begin{cases} -1 ; & x < 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ 1 ; & x > 0 \end{cases}$$

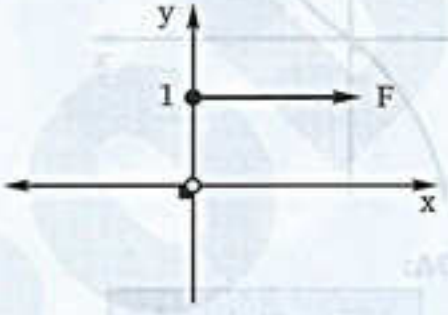


$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \{-1; 0; 1\}$

VI. FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO:

$$F: y = F(x) = U(x)$$

$$y = U(x) = \begin{cases} 0 ; & x < 0 \\ 1 ; & x \geq 0 \end{cases}$$



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \{0; 1\}$

VII. FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO:

$$F: y = F(x) = [\![x]\!]$$

TEOREMA:

$[\![x]\!] = y \leftrightarrow y \leq x < y + 1 ; y \in \mathbb{R}$

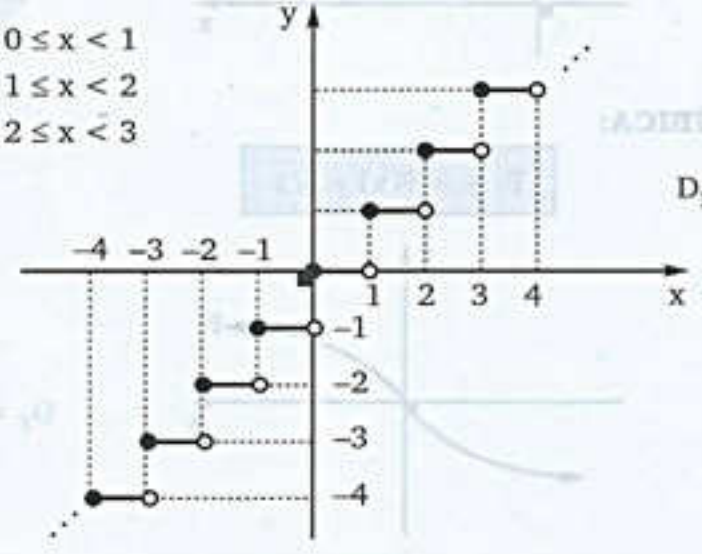
Asi:

$y = [\![x]\!] = 0$ para $0 \leq x < 1$

$y = [\![x]\!] = 1$ para $1 \leq x < 2$

$y = [\![x]\!] = 2$ para $2 \leq x < 3$

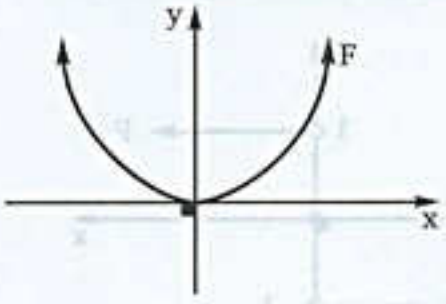
⋮



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{Z}$

VIII. FUNCIÓN CUADRÁTICA SIMPLE:

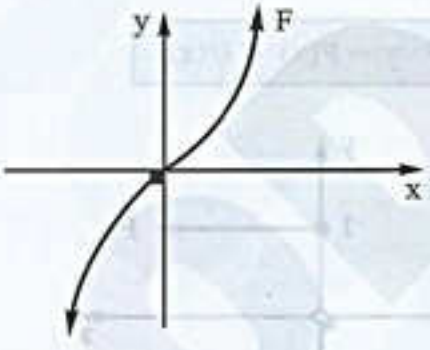
$$F: y = F(x) = x^2$$



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = [0; \infty\rangle$

IX. FUNCIÓN CÚBICA SIMPLE:

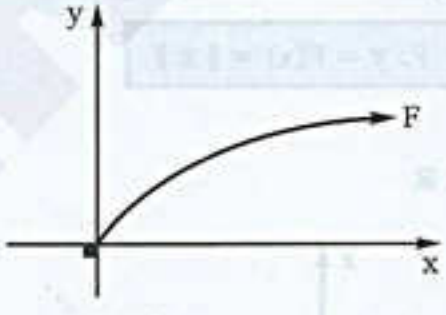
$$F: y = F(x) = x^3$$



$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

X. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA:

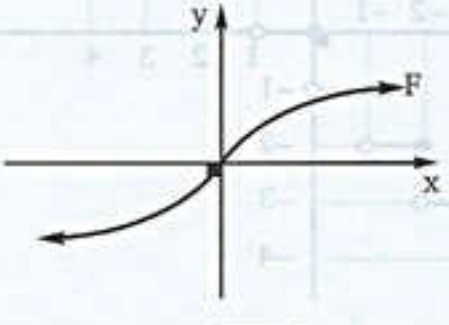
$$F: y = F(x) = \sqrt{x}$$



$D_F = [0; \infty\rangle$; $R_F = [0; \infty\rangle$

XI. FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA:

$$F: y = F(x) = \sqrt[3]{x}$$

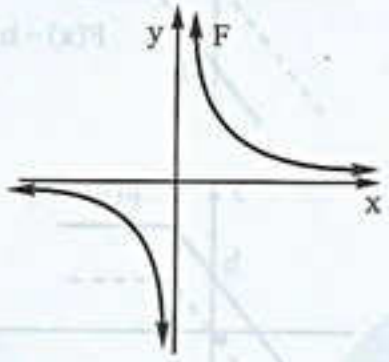


$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

team CALAPENSHKO

XII. FUNCIÓN INVERSO MULTIPLICATIVO:

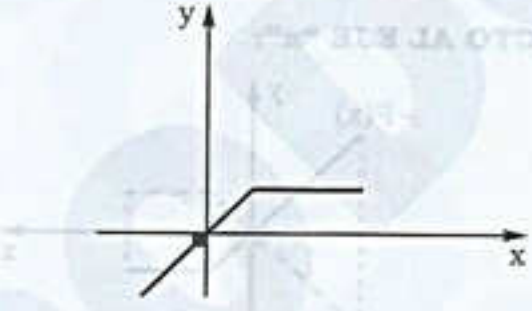
$$F: y = F(x) = \frac{1}{x}$$



$D_F = \mathbb{R} - \{0\}$; $R_F = \mathbb{R} - \{0\}$

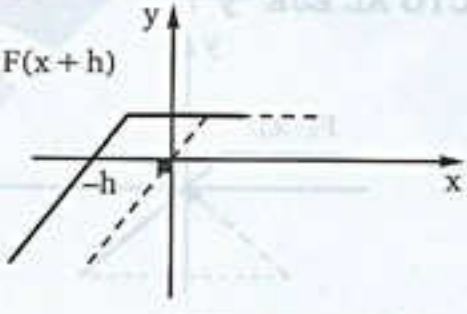
DESPLAZAMIENTOS Y REFLEJOS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Conociendo la gráfica de la función F, donde F: y = F(x)

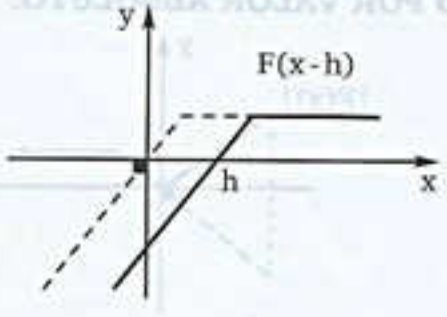


Y considerando un número positivo h, tenemos:

I. DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL:

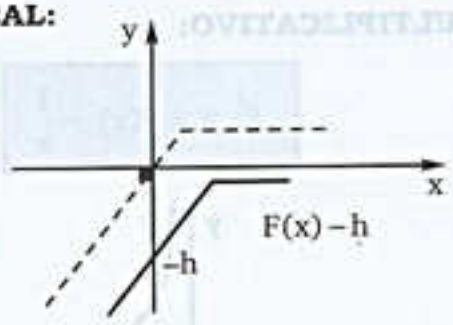


"h" unidades hacia la izquierda

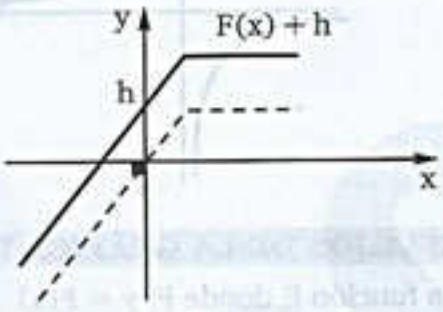


"h" unidades hacia la derecha

II. DESPLAZAMIENTO VERTICAL:

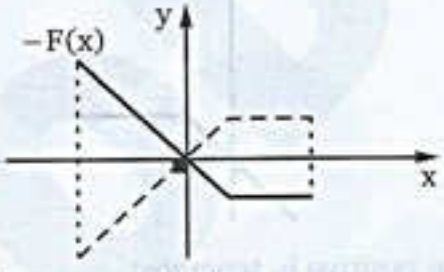


"h" unidades hacia abajo



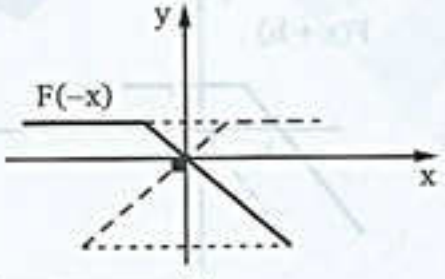
"h" unidades hacia arriba

III. REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "x":



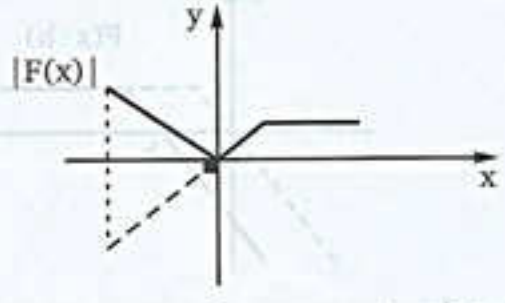
"El eje "x" se comporta como si fuese un espejo"

IV. REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "y":



"El eje "y" se comporta como si fuese un espejo"

V. REFLEJO PRODUCIDO POR VALOR ABSOLUTO:



"La parte de la gráfica debajo del eje x, se refleja por encima del mismo"

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Calcular m . n en cada caso:

A) $(7;m-2) = (n+1;10)$

B) $(m+2;n) = (5;m-1)$

C) $(m-1;7) = (n;m+2)$

D) $(m-4;n+2) = (5;-4)$

E) $(m^2-1;7) = (8;n^2-2)$

2. Determine el cardinal del conjunto A x B en cada caso.

A) $A = \{-1;0;1\}$ y $B = \{-2;0;2\}$

B) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 3\}$

C) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x-1}{x-5} \leq 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\}$

3. dado el conjunto $A = \{-1;0;1\}$ determine los conjuntos:

A) $R_1 = \{(a;b) \in A^2 \mid a = b\}$

B) $R_2 = \{(a;b) \in A^2 \mid a > b\}$

C) $R_3 = \{(a;b) \in A^2 \mid 2a \leq 3b\}$

4. Colocar un visto (√) en cada recuadro que corresponda a una función:

A) $F = \{(2;0), (7;-2), (0;2)\}$ ☐

B) $F = \{(5;1), (7;1), (-1;1)\}$ ☐

C) $F = \{(4;1), (4;2), (4;3)\}$ ☐

D) $F = \{(1;2), (1;2), (1;2)\}$ ☐

E) $F = \{(0;0), (1;1), (3;3)\}$ ☐

5. Determine el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

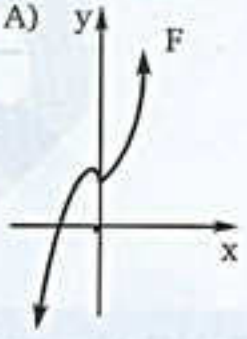
A) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \frac{x-1}{2x-3}$

B) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \sqrt{x+8}$

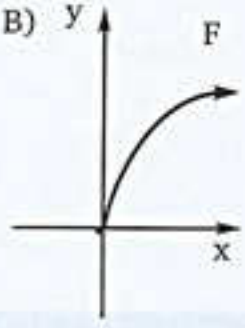
C) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \sqrt{2-x-x^2}$

6. Identifica la gráfica que corresponde a una función:

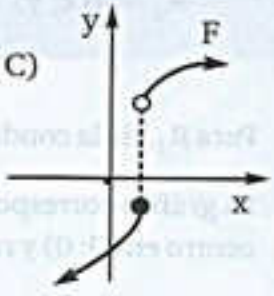
A)



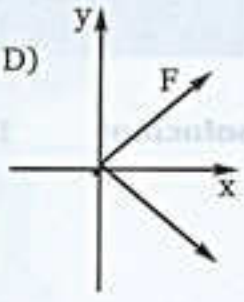
B)



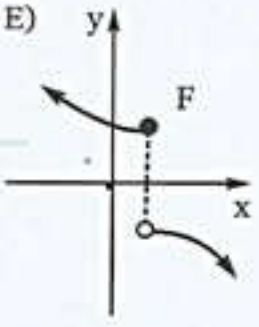
C)



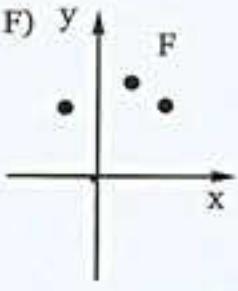
D)



E)



F)



team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Determine el dominio, rango y la gráfica de la siguiente relación:

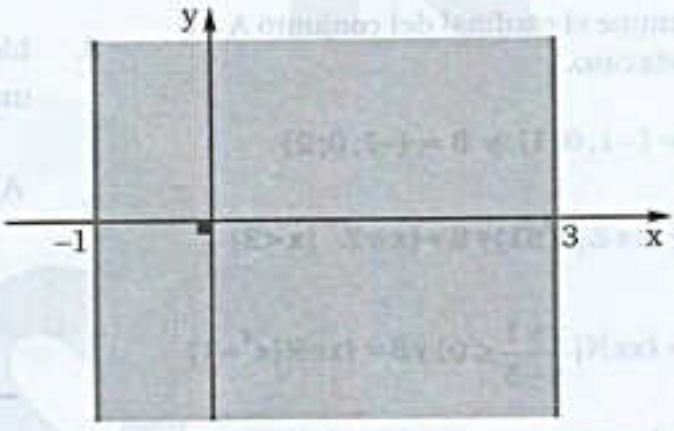
$$R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x-1| \leq 2\}$$

Resolución: De la condición podemos observar que el dominio de la relación se obtiene a partir de:

$$|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2$$
$$-1 \leq x \leq 3$$

También podemos notar que el rango de la relación es el conjunto de todos los números reales.

Finalmente la gráfica de la relación será:



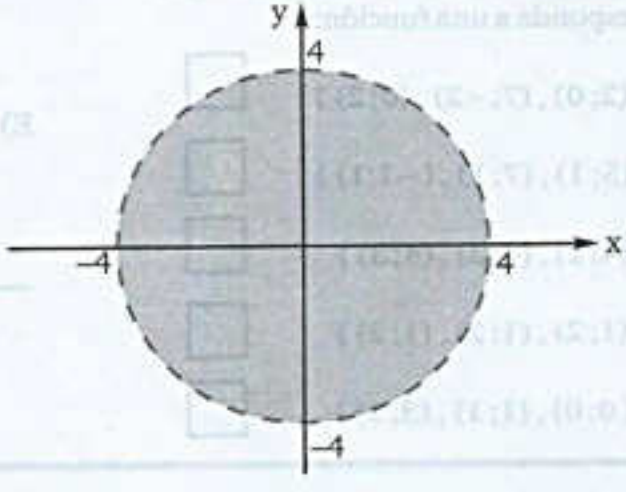
PROBLEMA 2 Graficar la intersección de las gráficas de las relaciones:

$$R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 16\} \ ; \ R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \leq x^2\}$$

Resolución:

I. Para R_1, de la condición: $x^2 + y^2 < 16$.

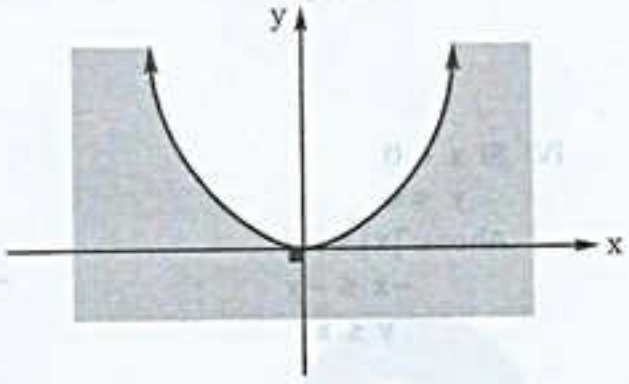
La gráfica corresponde a la parte interna de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4^2$, con centro en (0; 0) y radio igual a 4.



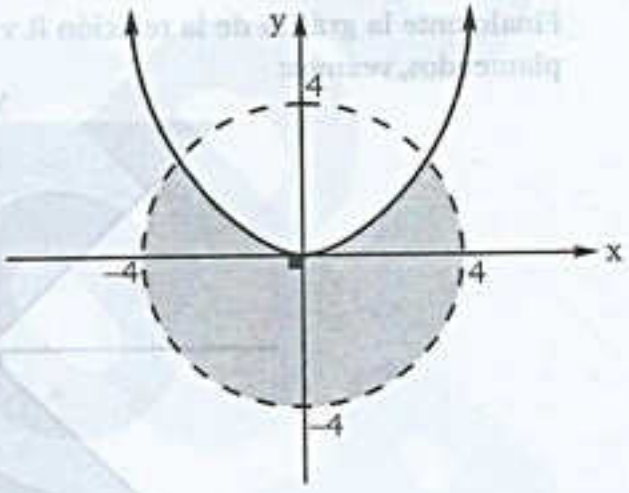
team CALAPENSHKO

II. Para R_2, de la condición: $y \leq x^2$

La gráfica corresponde a la parte inferior de la parábola $y = x^2$, incluyendo su contorno.



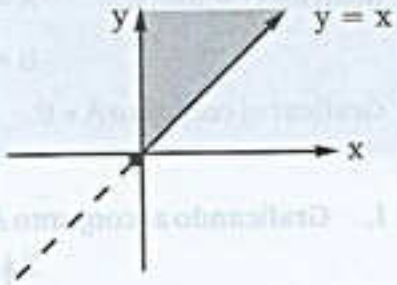
III. Finalmente la intersección de R_1 y R_2 viene dada por:



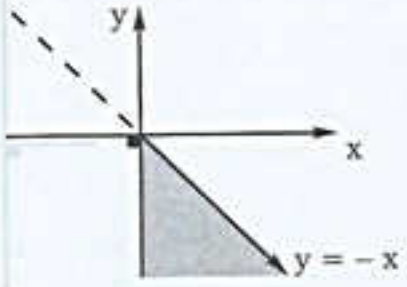
PROBLEMA 3 Graficar la siguiente relación: $R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq |y|\}$

Resolución:

I. Si $x \geq 0$
$y \geq 0$
Ahora: $|x| \leq |y|$
$x \leq y$

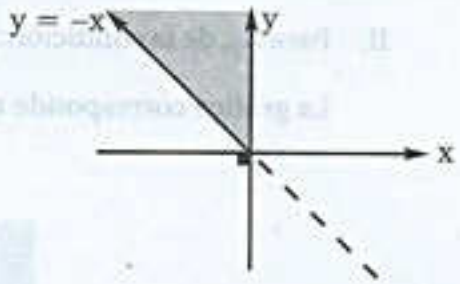


II. Si $x \geq 0$
$y > 0$
Ahora: $|x| \leq |y|$
$x \leq -y$
$y \leq -x$

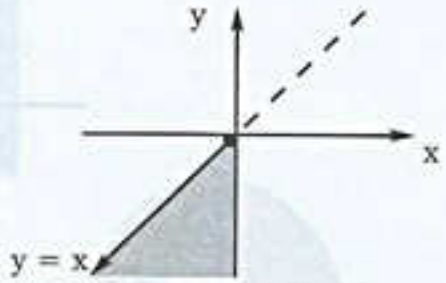


team CALAPENSHKO

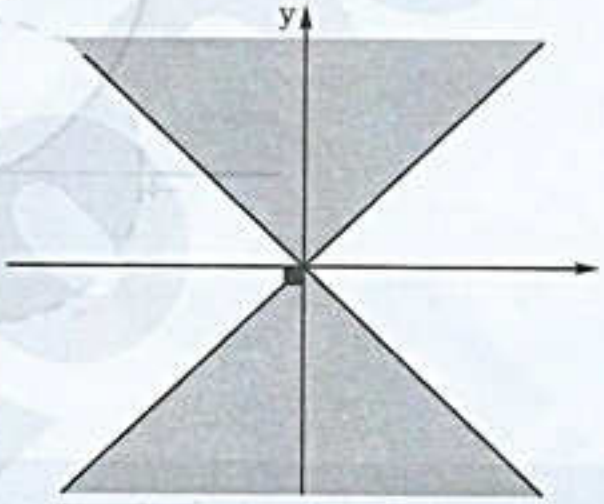
III. Si $x < 0$
$y \geq 0$
Ahora: $|x| \leq |y|$
$-x \leq y$



IV. Si $x < 0$
$y < 0$
Ahora: $|x| \leq |y|$
$-x \leq -y$
$y \leq x$



Finalmente la gráfica de la relación R viene dada por la unión de todos los caos planteados, veamos:

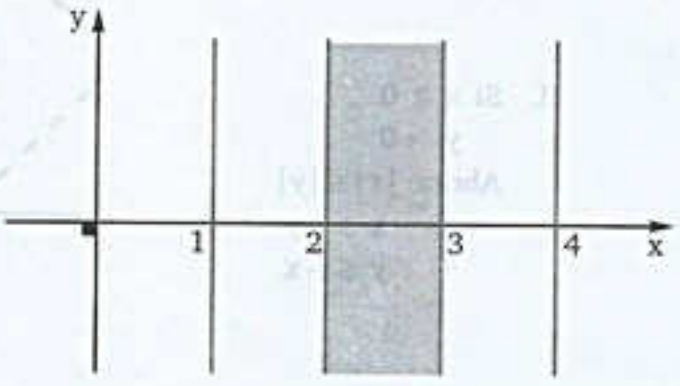


PROBLEMA 4 Sean los conjuntos: $A = \{1;4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

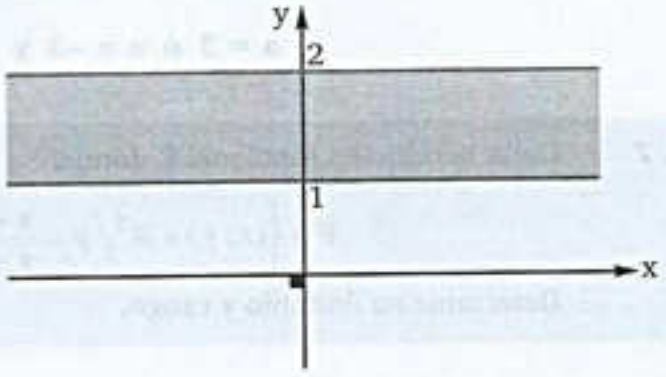
Graficar el conjunto $A \times B$.

Resolución: I. Graficando al conjunto A.

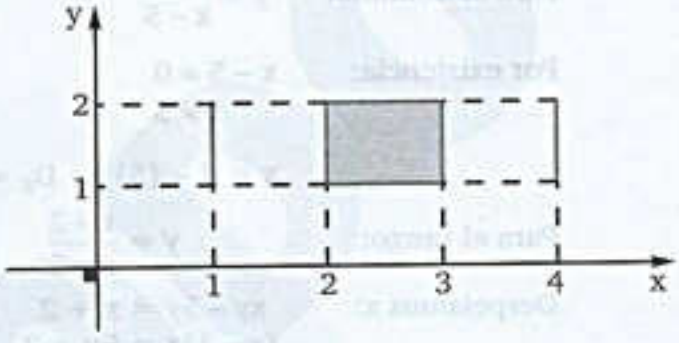


team CALAPENSHKO

II. Para graficar al conjunto B debemos tener en cuenta que por ser el conjunto de llegada sus elementos se comportan como si fuesen ordenadas, veamos:



III. Finalmente la gráfica del conjunto A × B viene dada por la intersección de las gráficas anteriores, veamos.



PROBLEMA 5 Dados los conjuntos:

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4)\}$$
$$C = \{1; 5; 6\}$$

Determinar: $(A - C) \cup B$

Resolución: Una rápida inspección en el producto cartesiano A × B permite reconocer a los conjuntos A y B, veamos:

$$\begin{matrix} A = \{1; 2\} \\ B = \{2; 3; 4\} \end{matrix} \Rightarrow A - C = \{2\}$$

$$\therefore\ (A - C) \cup B = \{2; 3; 4\}$$

PROBLEMA 6 Determine los valores de a y b de modo que el conjunto:

$$F = \{(2; 5), (-1; 4), (2; 2a^2 - b), (-1; b - a^2)\}$$

sea una función.

Resolución: Como F es una función se debe cumplir lo siguiente:

$$\begin{cases} 2a^2 - b = 5 \\ b - a^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 = 9 \\ a = 3 \ \text{ó} \ a = -3 \end{matrix}$$

team CALAPENSHKO

Como: $b - a^2 = 4 \Rightarrow b = a^2 + 4$

$b = 13$

$\therefore\ a = 3\ \text{ó}\ a = -3\ \text{y}\ b = 13$

PROBLEMA 7 Dada la relación funcional F, donde:

$$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ y = \frac{x+2}{x-5}\right\}$$

Determine su dominio y rango.

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos a calcular el dominio y el rango de F.

Para el dominio: $y = \dfrac{x+2}{x-5}$

Por existencia: $x - 5 \neq 0$

$x \neq 5$

$x \in \mathbb{R} - \{5\} \Rightarrow D_F = \mathbb{R} - \{5\}$

Para el rango: $y = \dfrac{x+2}{x-5}$

Despejamos x: $xy - 5y = x + 2$

$(y - 1)x = 5y + 2$

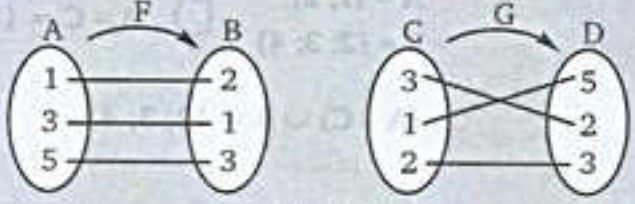
$x = \dfrac{5y+2}{y-1}$

Por existencia: $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

$y \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow R_F = \mathbb{R} - \{1\}$

$\therefore\ D_F = \mathbb{R} - \{5\} \ \wedge\ R_F = \mathbb{R} - \{1\}$

PROBLEMA 8 Dadas las funciones:



Calcular: $K = \dfrac{F(1)+G(3)}{F(G(1)) + F(G(2))}$

Resolución: De acuerdo con la correspondencia del diagrama sagital para cada una de las funciones, además considerando $y = f(x)$ tenemos:

$$K = \frac{2+2}{F(5)+F(3)} = \frac{4}{3+1} = \frac{4}{4}$$

$\therefore\ K = 1$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

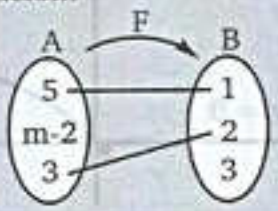
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Determine la suma de todos los valores que asume "m" de modo que la relación de A en B sea una aplicación:



Resolución: F es una aplicación si y sólo si: $D_F = A$, en consecuencia debemos plantear lo siguientes:

$$\{5;3\} = \{5; m-2; 3\}$$

Para que la igualdad se cumpla:

$$m-2=5 \text{ ó } m-2=3$$
$$m=7 \text{ ó } m=5$$

$$\therefore \ \Sigma \text{ Valores de } m = 12$$

PROBLEMA 10 Determine el dominio de la función F, donde:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \sqrt{2+x-x^2}$$

Resolución: Por condición de existencia:

$$2+x-x^2 \geq 0$$

Multiplicando todo por -1:

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$
$$(x-2).(x+1) \leq 0$$

En la recta real se tendrá:

$$x \in [-1; 2]$$

$$\therefore \ D_F = [-1; 2]$$

PROBLEMA 11 Esbozar la gráfica de la función F, donde:

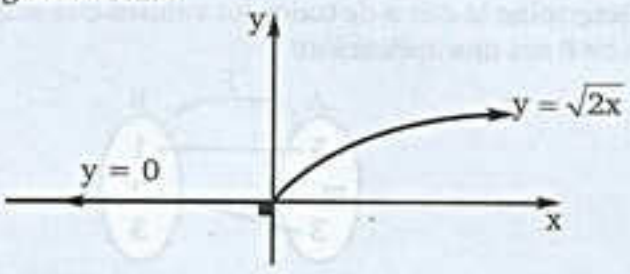
$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ y = F(x) = \sqrt{x+|x|}$$

Resolución: Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

team CALAPENSHKO

Finalmente la gráfica será:



PROBLEMA 12 Si: $y = u(x)$ es una función escalón unitario, reducir:

$$E = u(-\pi) + u(0) + u(\pi)$$

Resolución:

Se sabe que: $y = u(x) = \begin{cases} 0 ; x < 0 \\ 1 ; x \geq 0 \end{cases}$

Ahora tenemos: $U(-\pi) = 0 ; \ U(0) = 1 ; \ U(\pi) = 1$

Luego: $E = 0 + 1 + 1$

$\therefore \quad E = 2$

PROBLEMA 13 Esbozar la gráfica de la función real de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$F : y = F(x) = x^2 . Sgn(x)$$

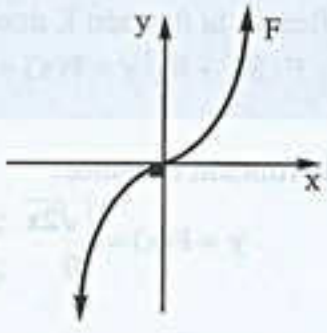
Resolución:

Se sabe que: $Sgn(x) = \begin{cases} -1 ; & x < 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ 1 ; & x > 0 \end{cases}$

Ahora redefiniendo la función F, se tendrá:

$$y = F(x) = \begin{cases} -x^2 ; & x < 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ x^2 ; & x > 0 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica de F será:



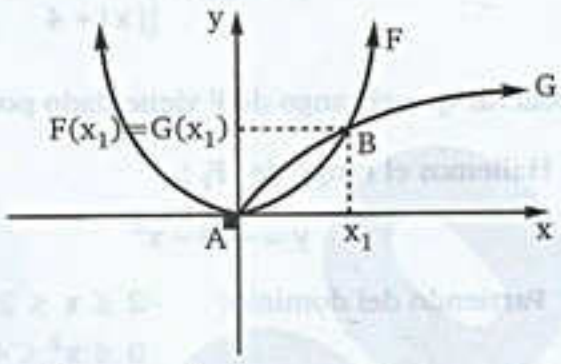
twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 14 Determine la longitud del segmento de recta que une los puntos de intersección de las funciones F y G, donde:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = x^2$$
$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = G(x) = \sqrt{x}$$

Resolución: Graficando a las funciones F y G tenemos:



Hallemos la abcisa del punto de intersección, para lo cual basta con igualar las ecuaciones de F y G es decir:

$$x^2 = \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado : $x^4 = x$

$$x^4 - x = 0$$
$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

De donde los valores reales de x son:

$$x = 0 \ ; \ x = 1$$

Ahora hallemos las ordenadas, para lo cual basta con reemplazar en la fórmula de F o de G los valores obtenidos para la abscisa.

Con la fórmula de F:

$$y = F(x) = x^2$$

Si : x = 0, entonces : y = 0

Si : x = 1, entonces : y = 1

Los puntos de intersección:

$$A(0;0) \text{ y } B(1;1)$$

Finalmente por la fórmula de distancia entre dos puntossetiene

$$d(A; B) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2}$$
$$d(A; B) = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\therefore \quad d(A; B) = \sqrt{2}$$

PROBLEMA 15 Determinar el rango de la función F:

$$y = F(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & ; |x| \le 2 \\ |x| + 4 & ; |x| > 2 \end{cases}$$

Resolución: La función dada se puede representar así:

$$y = F(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & ; -2 \le x \le 2 \ldots\ldots F_1 \\ |x| + 4 & ; |x| > 2 \quad \ldots\ldots F_2 \end{cases}$$

Observar que el rango de F viene dado por la unión de los rangos de F_1 y F_2

- Hallemos el rango de F_1 :

$$y = -\sqrt{4-x^2}$$

Partiendo del dominio:

$$\begin{aligned} -2 &\le x \le 2 \\ 0 &\le x^2 \le 4 \\ -4 &\le -x^2 \le 0 \\ 0 &\le 4 - x^2 \le 4 \\ 0 &\le \sqrt{4-x^2} \le 2 \\ -2 &\le -\sqrt{4-x^2} \le 0 \\ -2 &\le y \le 0 \end{aligned}$$

Observar que el rango de F_1 es:

$[-2; 0]$

- Hallemos el rango de F_2: $y = |x| + 4$

Partiendo del dominio:

$$\begin{aligned} |x| &> 2 \\ |x| + 4 &> 6 \\ y &> 6 \end{aligned}$$

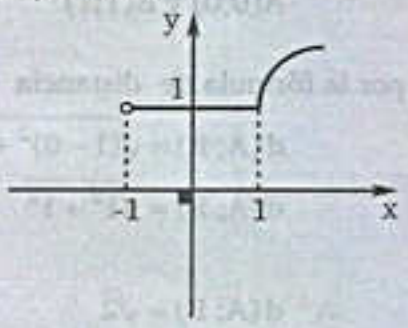
Observar que el rango de F_2 $\langle 6; \infty \rangle$

$$\therefore \quad R_F = [-2; 0] \cup \langle 6; \infty \rangle$$

PROBLEMA 16 Esbozar la gráfica de la función F, donde:

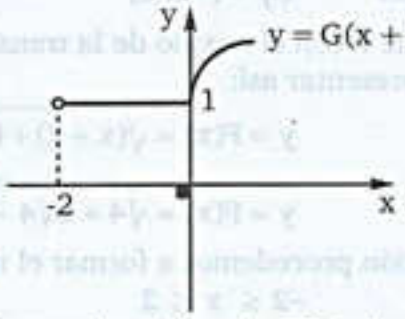
$$F(x) = -G(x + 1) \; ; x \in \mathbb{R}$$

Siendo la gráfica de $y = G(x)$

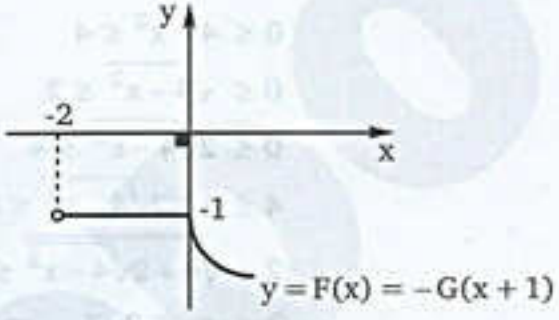


team CALAPENSHKO

Resolución: Observar que la gráfica de G(x + 1) se consigue desplazando una unidad hacia la izquierda la gráfica de G(x), veamos:



Finalmente para obtener la gráfica de F(x) bastara reflejar sobre el eje x la gráfica de G(x + 1), veamos:



PROBLEMA 17 ¿Cuántos puntos de discontinuidad posee la siguiente función:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \Big|\ y=F(x)=\frac{x^5+x+1}{(x^2+10)(|x|-2)}\ ?$$

Resolución: Tenga en cuenta que los puntos de discontinuidad son generados por aquellos valores que asume x (variable independiente) de tal manera que "y" (variable dependiente) no este bien definida, en consecuencia:

$$y=F(x)=\frac{x^5+x+1}{(x^2+10)(|x|-2)}$$

No está bien definida si:

$$\underbrace{x^2+10=0}_{\phi}\ \vee\ |x|-2=0$$

$$\to\ x=2\ \text{ó}\ x=-2$$

Como existen dos valores de la abscisa "x" se podrá afirmar que existen 2 puntos de discontinuidad para la función F.

PROBLEMA 18 Considerar a la función real de variable real con dominio maximal, cuya fórmula es:

$$y=F(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$$

Determine el rango de dicha función

Resolución: Hallemos el dominio de la función F, para lo cual se plantea:

$$2 + x \geq 0 \ \wedge \ 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Observar que: $D_F = [-2; 2]$

La fórmula de F con el auxilio de la transformación de radicales simples a dobles se podrá representar así:

$$y = F(x) = \sqrt{(x+2) + (2-x) + 2\sqrt{(2+x)(2-x)}}$$

$$y = F(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{4 - x^2}}$$

A continuación procedemos a formar el rango a partir del dominio:

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq x^2 \leq 4$$
$$-4 \leq -x^2 \leq 0$$
$$0 \leq 4 - x^2 \leq 4$$
$$0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$$
$$0 \leq 2\sqrt{4 - x^2} \leq 4$$
$$4 \leq 4 + 2\sqrt{4 - x^2} \leq 8$$
$$2 \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{4 - x^2}} \leq 2\sqrt{2}$$
$$2 \leq y \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y \in [2; 2\sqrt{2}]$$

$\therefore R_F = [2; 2\sqrt{2}]$

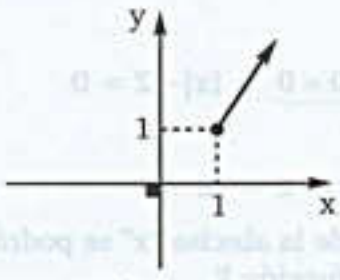
PROBLEMA 19 Esbozar la gráfica de la función real de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = |x - 1| + x$$

Resolución: Con la finalidad de eliminar al valor absoluto se plantea dos casos:

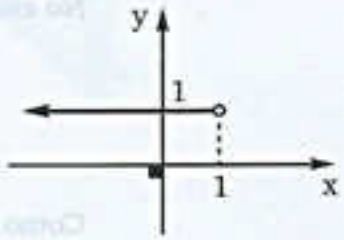
1° caso: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$y = (x - 1) + x \Leftrightarrow y = 2x - 1$

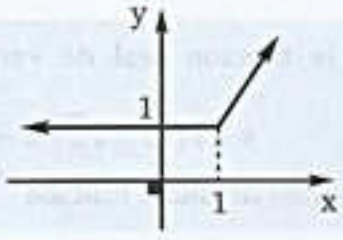


2° caso: $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$y = -(x - 1) + x \Leftrightarrow y = 1$



Finalmente la gráfica pedida viene dada por la unión de los casos analizados.



team CALAPENSHKO

PROBLEMA 20 Sea F la función definida por:

$$F(x) = \operatorname{sen}\sqrt{(x^2 - a^2)|x^2 - b^2|}\,;$$

donde: a ∧ b son constantes tal que a < b ¿Cuál es el dominio de F?

Resolución:

Para que la función F(x) exista, se debe cumplir que:

$$(x^2 - a^2).|x^2 - b^2| \geq 0 \quad \text{.....(*)}$$

En (*) reconocemos que el valor absoluto es siempre positivo, luego:

$$|x^2 - b^2| \geq 0$$

De aquí, se deduce que:

$$x = \pm b$$

Asimismo en (*), se debe cumplir que:

$$x^2 - a^2 \geq 0$$

Al factorizar nos queda:

$$(x + a).(x - a) \geq 0$$

Hasta aquí hemos encontrado que:

$$x \in \langle -\infty ; -a] \cup [a ; \infty \rangle \vee x = \pm b$$

Para concluir, debemos reconocer que:

$$\therefore \text{ Dom (F)} = x \in \langle -\infty ; -a] \cup [a ; \infty \rangle$$

PROBLEMA 21 Las funciones F, G y H tienen las siguientes reglas de correspondencia:

$$F(x) = -x^2 \;;\; G(x) = -x \text{ y } H(x) = \frac{1}{x}\,;$$

Las gráficas de F y G se cortan en los puntos P y Q y las gráficas de F y H en el punto R respectivamente, entonces dichos puntos son:

Resolución:

Teniendo en cuenta que las coordenadas en los puntos de corte, satisfacen las reglas de correspondencia; los punto de corte de F(x) y G(x) se obtienen haciendo:

$$F(x) = G(x)$$

Sustituyendo las relaciones dadas:

$$-x^2 = -x \;\Rightarrow\; x \,.\, (x - 1) = 0$$

Resolviendo, se tienen las abscisas:

$$x = 0 \;\wedge\; x = 1$$

Luego las ordenadas correspondientes serán :

$$F(0) = 0 \;\wedge\; F(1) = -1$$

En consecuencia los puntos de corte P y Q son:

$$P = (0; 0) \;\wedge\; Q = (1; -1)$$

Análogamente para hallar el punto de corte entre F(x) y H(x) hacemos:

$$F(x) = H(x)$$

Sustituyendo las relaciones dadas, tendremos:

$$-x^2 = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = 0$$

Resolviendo se logra obtener:

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad F(-1) = -1$$

En consecuencia el punto R es:

$$R = (-1; -1)$$

Finalmente los puntos P , Q y R son:

$$\therefore \ (0\,;0) \ , \ (1\,;-1) \ \wedge \ (-1\,;-1)$$

PROBLEMA 22 Si el rango de F(x):

$$F(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,;$$

es: [a ; b⟩ luego el valor de " a + b " es:

Resolución:

La función dada: $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Puede expresarse así: $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

Hallemos el rango de F partiendo de: $0 \le x^2 < \infty \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

Sumando 1: $1 \le x^2 + 1 < \infty$

Invirtiendo: $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \le 1$

Multiplicando por – 1: $-1 \le -\dfrac{1}{x^2+1} < 0$

Sumando 1: $0 \le \underbrace{1 - \dfrac{1}{x^2+1}}_{F(x)} < 1$

Observar que: $0 \le F(x) < 1$

Es decir: $\text{Ran}(F) = [0;1\rangle$

Por condición: $\text{Ran}(F) = [a;b\rangle$

Luego comparando se tendrá: $a = 0 \ \wedge \ b = 1$

$$\therefore \ a + b = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Hallar el rango de la siguiente función:

$$F(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

Resolución: Hallemos el dominio de la función para luego a partir de él formar el rango. Veamos:

En base al 1er criterio de Resolución de Ecuaciones, diremos que la función F(x), está definida, siempre que:

$$1-\sqrt{1-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1 \geq x$$

Despejando en cada caso se obtiene:

$$1 \geq \sqrt{1-x} \qquad \wedge \qquad x \leq 1$$

Elevando al cuadrado y despejando, se tiene:

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

De estos resultados se puede afirmar que:

$$\text{Dom } (F) = x \in [\,0\,;\,1\,]$$

Ahora formaremos el rango a partir del Dom (F) :

$$0 \leq x \leq 1$$

Multiplicando por -1, y reacomodando se tiene:

$$-1 \leq -x \leq 0$$

Sumando 1 a cada miembro tendremos:

$$0 \leq 1-x \leq 1$$

Extrayendo raíz cuadrada, se establece que:

$$0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$$

Multiplicando por -1, y reacomodando:

$$-1 \leq -\sqrt{1-x} \leq 0$$

Sumando 1 a cada miembro, se tendrá:

$$0 \leq 1-\sqrt{1-x} \leq 1$$

Extrayendo otra vez raíz cuadrada:

$$0 \leq \underbrace{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}_{F(x)} \leq 1$$

Finalmente reconocemos que:

$$\therefore \text{ Ran } (F) = [\,0\,;\,1]$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 24 Dada la función:

$$F(x) = mx;$$

y la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1;$$

¿En qué intervalo debe variar "m" para que la gráfica de la función F tenga puntos comunes con la circunferencia?

Resolución: De acuerdo al enunciado se debe establecer que:

$$\left.\begin{aligned} F(x) = y = mx \quad &.....(I) \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad &.....(II) \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo (I) en (II): $(x-2)^2 + (mx+1)^2 = 1$

Efectuando las potencias indicadas: $(m^2+1)x^2 + 2(m-2)x + 4 = 0$

Luego para que la ecuación admita soluciones reales, su discriminante deberá ser mayor o igual a cero, es decir: $[2(m-2)]^2 - 4(m^2+1).(4) \geq 0$

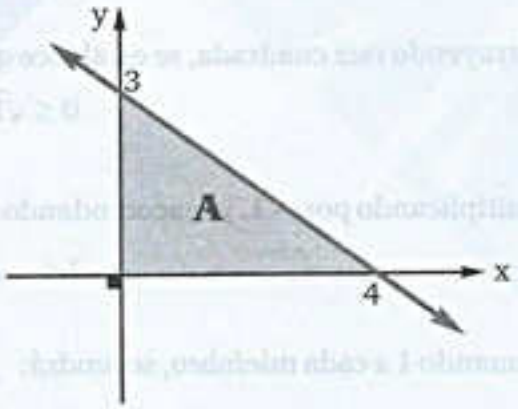
Efectuando obtenemos: $m.(3m+4) \leq 0$

Invirtiendo la ecuación, concluimos que:

$$\therefore \quad m \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$$

PROBLEMA 25 Calcular el área de la región triangular que se forma en el primer cuadrante con los ejes coordenados y la gráfica de la función lineal. F: $y = F(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

Resolución: De acuerdo con el enunciado, la gráfica será:



Finalmente tenemos:

$$A = \frac{(4)(3)}{2} = \frac{12}{2}$$

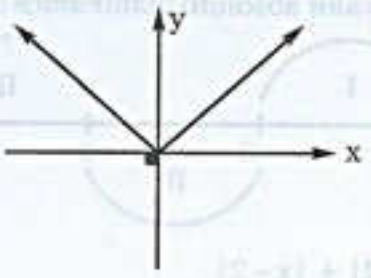
$$\therefore A = 6u^2$$

PROBLEMA 26 Esbozar la gráfica de la función real de variable real F, cuya regla de correspondencia es: $y = F(x) = ||x+1| - 2$

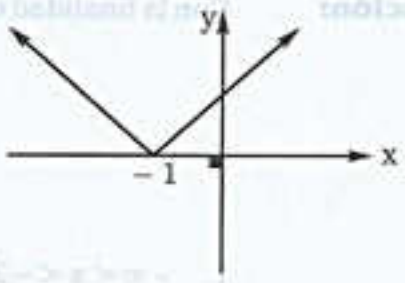
team CALAPENSHKO

Resolución: Según desplazamientos y reflejos de la gráfica de una función procedemos de la manera siguiente:

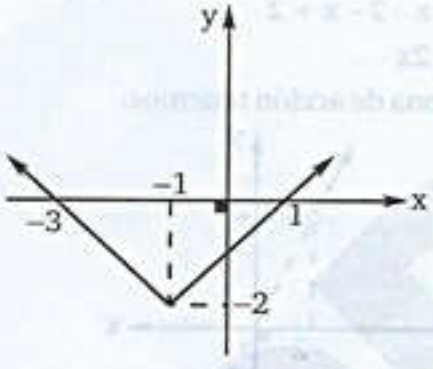
I. $y = F_1(x) = |x|$



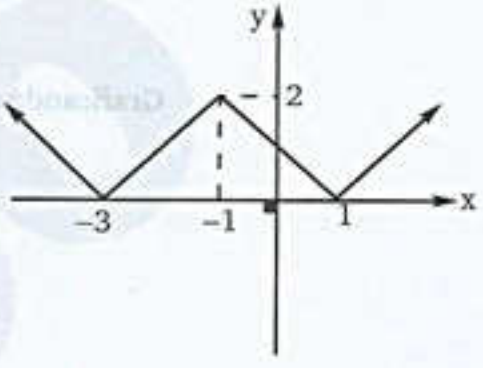
II. $y = F_2(x) = |x+1|$



III. $y = F_3(x) = |x+1|-2$



IV. $y = F(x) = ||x+1|-2|$



PROBLEMA 27 Esbozar la gráfica de la siguiente función:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \text{Sgn}([\![x+3]\!]-2)$$

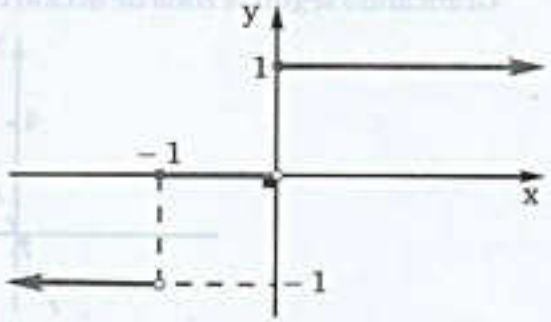
Resolución: Redefiniendo la función signo de la manera siguiente:

$$y = F(x) = \text{Sgn}([\![x+3]\!]-2) = \begin{cases} -1\,; & [\![x+3]\!]-2<0 \\ 0\,; & [\![x+3]\!]-2=0 \\ 1\,; & [\![x+3]\!]-2>0 \end{cases}$$

De acuerdo con los teoremas acerca del máximo entero, la función se puede reescribir así:

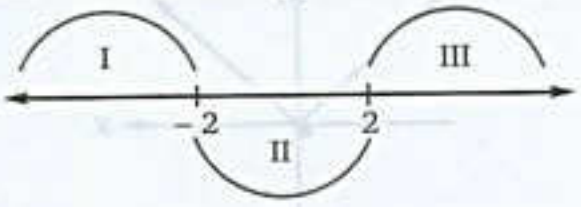
$$y = F(x) = \begin{cases} -1\,; & x<-1 \\ 0\,; & -1 \le x < 0 \\ 1\,; & x \ge 0 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica de la función será:



PROBLEMA 28 Esbozar la gráfica de la función: $y = F(x) = |x+2| + |x-2|$

Resolución: Con la finalidad de eliminar el valor absoluto planteamos un criterio de zonas:



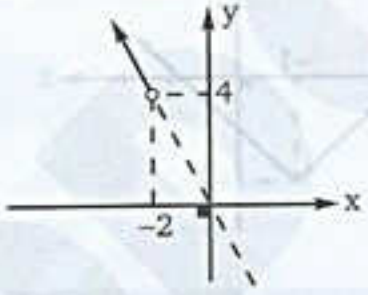
I. $-\infty < x < -2$: $y = |x+2| + |x-2|$

$y = -(x+2) - (x-2)$

$y = -x-2-x+2$

$y = -2x$

Graficando según la zona de acción tenemos:



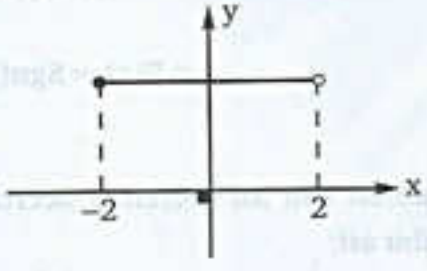
II. $-2 \leq x < 2$: $y = |x+2| + |x-2|$

$y = x+2-(x-2)$

$y = x+2-x+2$

$y = 4$

Graficando según la zona de acción tenemos:

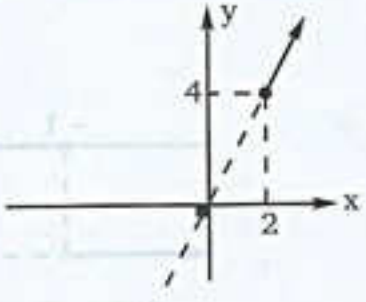


III. $2 \leq x < \infty$: $y = |x+2| + |x-2|$

$y = x+2+x-2$

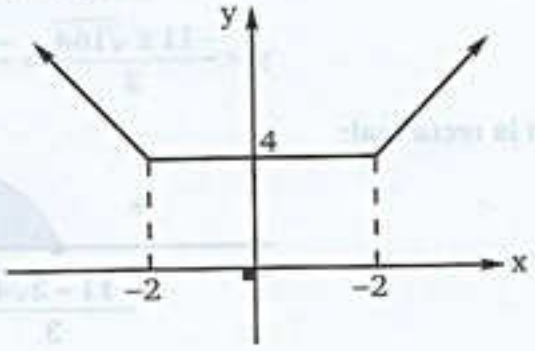
$y = 2x$

Graficando según la zona de acción tenemos:



team CALAPENSHKO

IV. Finalmente la gráfica de la función F viene dada por la unión de todas las gráficas anteriores, veamos:



PROBLEMA 29 Determine el rango de la siguiente función:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,y=F(x)=\frac{x^2-x-5}{x^2+x+1}$$

Resolución: La función es: $y=\dfrac{x^2-x-5}{x^2+x+1}$

Fácilmente podemos reconocer que $x^2+x+1>0;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Ahora procedemos a formar una ecuación cuadrática en x:

$$y(x^2+x+1)=x^2-x+5$$

$$yx^2+yx+y=x^2-x+5$$

$$yx^2-x^2+yx+x+y-5=0$$

$$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-5)=0$$

Observa que la cuadrática en x formada tiene raíces reales, pues $x\in\mathbb{R}$, por tanto se debe cumplir que $\Delta\geq 0$:

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y-5)$$

$$\Delta=y^2+2y+1-4y^2-24y-20$$

$$\Delta=-3y^2-22y-19$$

Por condición tenemos:

$$-3y^2-22y-19\geq 0$$

$$\underbrace{3y^2+22y+19}_{*}\leq 0$$

* por fórmula:

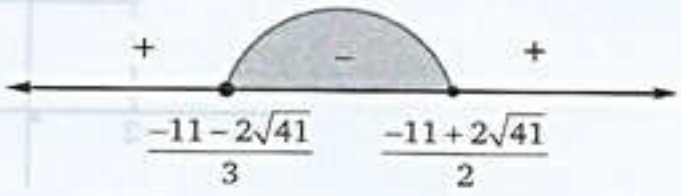
$$y=\frac{-22\pm\sqrt{(22)^2-4(3)(19)}}{2(3)}$$

team CALAPENSHKO

$$y = \frac{-22 \pm \sqrt{656}}{6} = \frac{-22 \pm 2\sqrt{164}}{6}$$

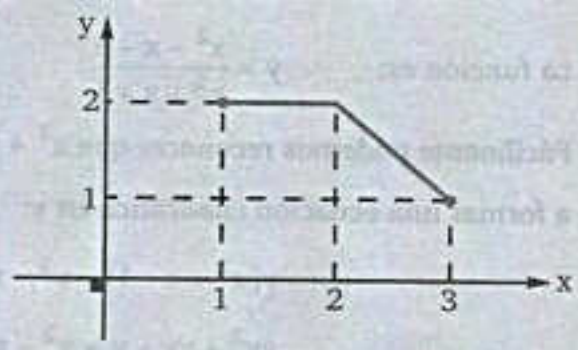
$$y = \frac{-11 \pm \sqrt{164}}{3} = \frac{-11 \pm 2\sqrt{41}}{3}$$

En la recta real:



$$\therefore \text{Ran}(F) = \left[\frac{-11-2\sqrt{41}}{3}; \frac{-11+2\sqrt{41}}{2}\right]$$

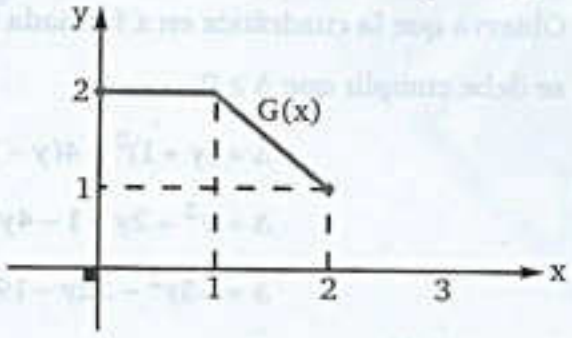
PROBLEMA 30 A continuación se muestra la gráfica de $y = F(x)$:



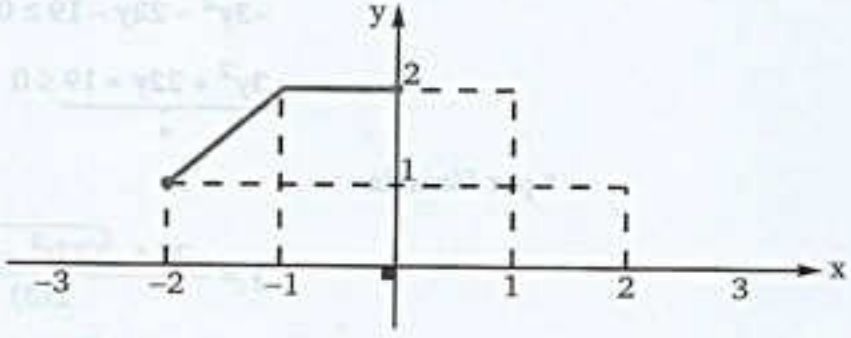
Esbozar la gráfica de $y = F(-x + 1)$

Resolución:

I. Según desplazamiento horizontal, graficamos $y = G(x) = F(x + 1)$



II. Según reflejo con respecto al eje y graficamos $G(-x)$, pues: $G(-x) = F(-x + 1)$



team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular "P" si:

$$P = F(2) + F(4) - F(-3) + F(-1)$$

Donde:

$$F(x) = \begin{cases} 3x-1 \ ; \ x>3 \\ x^2-1 \ ; \ -2 \le x \le 3 \\ 2x+3 \ ; \ x<-2 \end{cases}$$

A) 10 B) 12 C) 14
D) 17 E) 13

2. Calcular el valor de "$a + b^2$" si el conjunto:

$F=\left[(8; 2),(2; a),(a^2-1; b),(2; 2a-3),(3; 5)\right]$

es una función:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

3. Hallar el dominio de:

$$F(x) = \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+6x+8}$$

A) $\mathbb{R}$
B) $\mathbb{R} - \{-2; -4\}$,
C) $\mathbb{R}^-$
D) $[-2; -4], [$
E) $\mathbb{Z}^-$

4. Determinar el dominio de:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

A) $(-1; 1)$ B) $\langle -1; 1\rangle$
C) $\langle -\infty, 1\rangle \langle 1; +\infty\rangle$
D) $\mathbb{R}$ E) $(1; 5)$

5. Dada la función:

$$F(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

Determine los puntos de discontinuidad.

A) -2 y -3 B) -2 y 3 C) 2 y -3
D) $\mathbb{R} - \{2; 3\}$ E) 2 y 3

6. Determinar el dominio de la función real de variable real cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = \frac{1}{\sqrt{x-8}} + \sqrt[4]{12-x} + x^6$$

A) $\langle 8; \infty\rangle$ B) $\langle 8; 12]$ C) $\langle 8; 12\rangle$
D) $\langle -\infty; 12]$ E) $\langle -\infty; 8\rangle$

7. Determine el rango de:

$$F(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}$$

A) $\langle -\infty; 0\rangle$ B) $\langle 0; \infty\rangle$ C) $\mathbb{R}$
D) $\{-2; 2\}$ E) $\langle -2; 2\rangle$

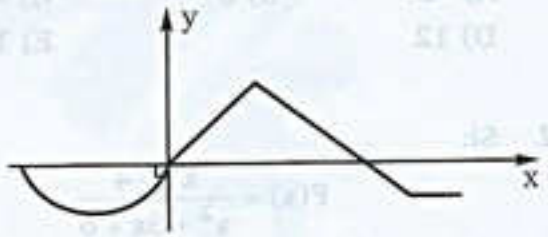
8. Determine el mínimo de la función F, donde:

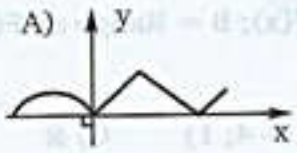
$$F(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

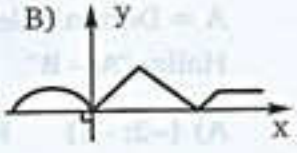
A) 1/2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}/2$
D) 1 E) 3/2

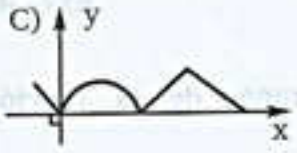
9. Del gráfico de F(x) graficar:

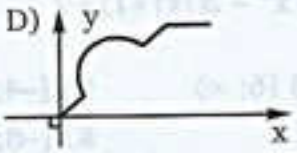
$$h(x) = |F(x)| \ ; \ x \in D_F$$

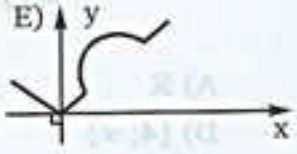


A)


B)


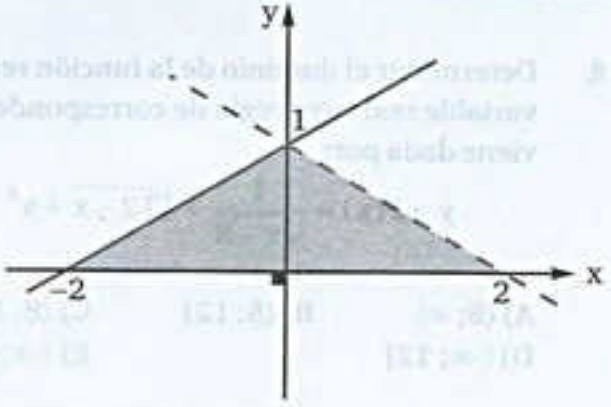
C)


D)


E)


team CALAPENSHKO

10. La región sombreada:



representa la relación:

A) $y>0 \vee 2y-x-2<0 \vee 2y+x-2<0$

B) $y \geq 0 \vee 2y < x+2 \vee 2y+x \leq 2$

C) $y \geq 0 \vee 2y < x+2 \wedge 2y+x \leq 2$

D) $y \geq 0 \vee 2y-2 \leq x \wedge 2y+x<2$

E) $y>0 \vee x-2y+2 \geq 0 \wedge x<2-2y$

11. Determinar los puntos de intersección de la gráfica de las funciones:

$$F(x)=x^2 \quad \wedge \quad G(x)=3|x|-2$$

Para luego indicar la suma de todas las ordenadas.

A) –2 B) 6 C) –6
D) 12 E) 10

12. Si:

$$F(x)=\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

A = Dominio de F(x); B = Rango de F(x)
Hallar "A – B"

A) $\{-2;-3\}$ B) $\{-4;1\}$ C) $\mathbb{R}$
D) $\langle-\infty;-4\rangle$ E) $\langle-4;1\rangle$

13. Determinar el rango de la función F definida así:

$$F(x)=x^2-2(|x|+1)+7$$

A) $\mathbb{R}$ B) $[6;\infty\rangle$ C) $[-4;4]$
D) $[4;\infty\rangle$ E) $[-8;3\rangle$

14. Determinar el dominio de la función F, donde:

$$F: R \to R / y=F(x)=\sqrt{3+\sqrt{2-\sqrt{x}}}$$

A) $[0;\infty\rangle$ B) $[0;\infty\rangle$ C) $[0;4]$
D) $[0;4\rangle$ E) $[-4;4]$

15. Hallar el rango de la función F, donde:

$$F(x)=\frac{x^2+1}{|x|}$$

Si: $x \in \mathbb{R}$

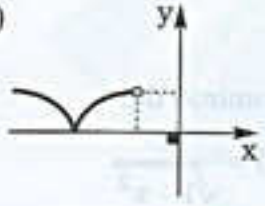
A) $[0;\infty\rangle$
B) $[1;\infty\rangle$
C) $\langle-\infty;-2] \cup [2;\infty\rangle$
D) $[-2;2\rangle$
E) $[2;\infty\rangle$

16. La gráfica aproximada de la función:

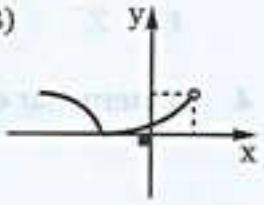
$$F(x) \equiv |2-\sqrt{1-x}|$$

es:

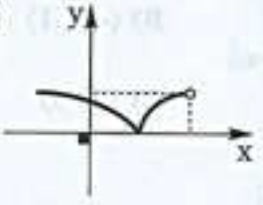
A)



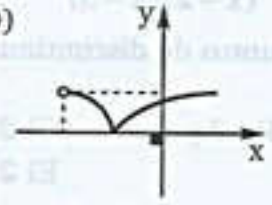
B)



C)



D)



E)

17. Sea: F una función definida en; $\langle -4; 2\rangle$ según:

$$F(x) = \frac{1+|x-3|}{|x+1|-3}$$

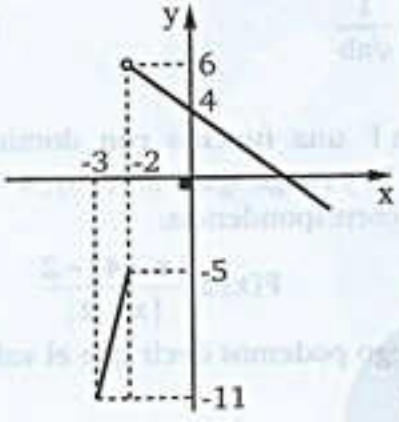
indicar su rango:

A) $\langle -\infty; 5/3\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{5}{3}\right]$

C) $\langle -\infty; -2]$

D) $\mathbb{R}$ E) ϕ

18. Dada la gráfica de la función "F":



Calcular el valor de:

$$F(-\sqrt[3]{9}) - 3F(2\sqrt[3]{9})$$

A) 3 B) –3 C) 5
D) –5 E) 7

19. Si: $F(x+1) = F(x) + x$ y $F(2) = 5$
Calcular:

$$\frac{F(4)}{F(0)}$$

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2
D) 1 E) 7/2

20. Sea la función:

$$F(x) = \frac{|x+3|-|x+5|}{|x+1|-4}\ ;\ x \in \langle -5; 2]$$

Hallar el rango de "F":

A) $\langle -\infty; -2\rangle$ B) $\langle -\infty; 2]$ C) $\langle -\infty; 1\rangle$
D) $\langle -\infty; 0\rangle$ E) $\langle -2; 2\rangle$

21. Sea la función:

$$F(x) = \frac{|x+3|-|x+5|}{|x+1|-4}\ ;\ x \in \langle -5; 2]$$

Hallar el rango de "F"

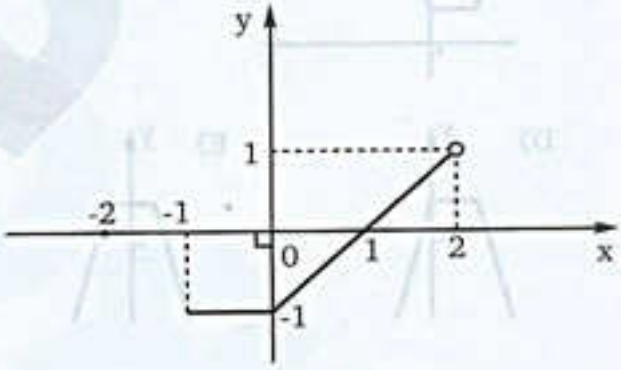
A) $\langle -\infty; -2\rangle$ B) $\langle -\infty; 2]$ C) $\langle -\infty; 1\rangle$
D) $\langle -\infty; 0\rangle$ E) $\langle -2; 2\rangle$

22. Si: $x \in \langle -1; 3\rangle$. Determine la extensión de:

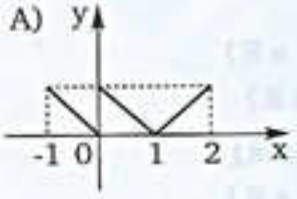
$$F(x) = \frac{|x+5|+|x-4|}{|x+6|}$$

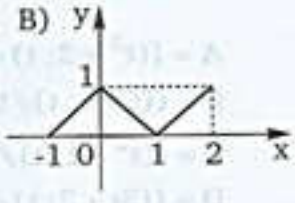
A) [1; 9/5] B) ⟨1; 9/5] C) [1; 9/5⟩
D) ⟨1; 9/5⟩ E) [1; 5/2⟩

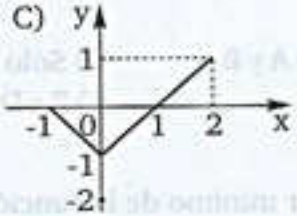
23. Sea la función F cuya gráfica es:

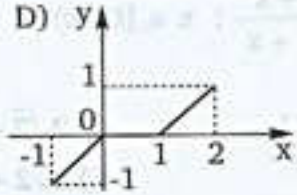


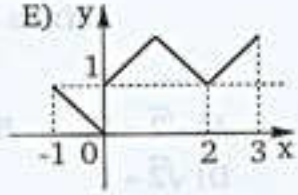
Esbozar el gráfico de $g(x) = F(|x|)$; $x \in D_F$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

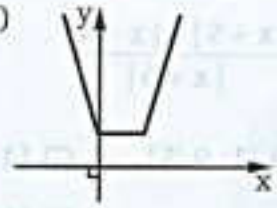
team CALAPENSHKO

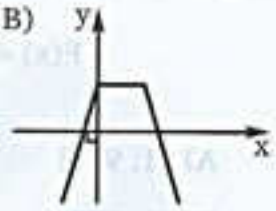
24. Encontrar el rango de la función:

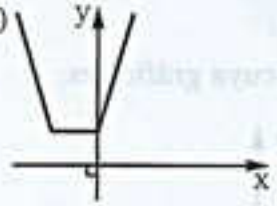
$$F(x) = |x| + |x-1|$$

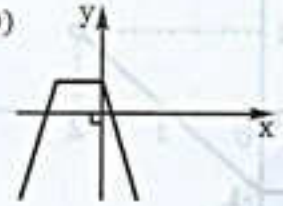
A) $\mathbb{R}$ B) $\langle 1; \infty\rangle$ C) $[1; \infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 1]$ E) $\langle -\infty; 1]$

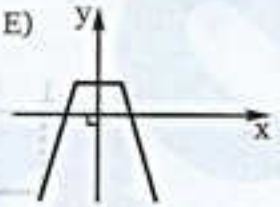
25. Esbozar la gráfica de la función del problema anterior.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

26. ¿Qué conjuntos de pares ordenados son funciones?

$A = \{(t^2+3; t)/t \in \mathbb{R}\}$
$B = \{(t+5; t)/t \in \mathbb{R}\}$
$C = \{(t^2-1; t)/t \in \mathbb{R}\}$
$D = \{(3t+2; t)/t \in \mathbb{R}\}$

A) Sólo B B) A y B C) Sólo B
D) Todos E) B y D

27. Determine el valor mínimo de la función:

$$F(x) \cong \frac{1+x^2}{1+x}\ ;\ x \in [0; \infty\rangle$$

A) $\sqrt{2}-1$ B) 1 C) $2\sqrt{2}-2$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $2\sqrt{2}+1$

28. Determinar el rango de la función:

$$F(x) = (|x-5|+1+x)\sqrt{5-x}$$

A) $[0; \infty\rangle$ B) $\langle -1; \infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 0]$
D) $\mathbb{R}$ E) $\langle -\infty; 4]$

29. Determine el valor máximo de la función:

$$F(x) = \frac{x}{x^2+b};\ a, b \in \mathbb{R}^+$$

A) $\frac{1}{4\sqrt{ab}}$ B) $\frac{1}{3\sqrt{ab}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$
D) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ E) $\frac{1}{5\sqrt{ab}}$

30. Sea F una función con dominio igual a: $[a; b\rangle$ y rango igual a: $\langle c, 0]$; $a > 0$ y rango de correspondencia.

$$F(x) \cong \frac{|x-4|-2}{|x+2|}$$

Luego podemos decir que el valor de abc^{-1} es:

A) 16 B) –12 C) –16
D) –24 E) –36

31. Dada la función:

$$F(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$$

Siendo el intersecto con el eje y: (0; 2)
Además: Domf = R:Ranf = $[1; +\infty\rangle$
Calcular: $S = \frac{11ab^2}{91a^2 - 5b^4}$

A) 1 B) 2 C) 4
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

32. Sea, F una función lineal, tal que:

$$F(x+y) = F(x) + F(y); F(3) = 6$$

Dicha función lineal, geométricamente, representa una línea recta. ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

A) –1 B) 1 C) -2
D) 2 E) 3

team CALAPENSHKO

33. Determine el dominio de:

$$F(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-9}}{x|x-3|-x}$$

A) $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

B) $\langle -\infty; -3]$

C) $\langle -\infty; -3\rangle \cup [3; +\infty) - \{4\}$

D) $\mathbb{R} - \{4\}$

E) $\mathbb{R} - \langle -3; 3\rangle$

34. Sea: $y = F(x)$, que expresa el área de un rectángulo de base x y cuya longitud del perímetro es "2p". Hallar el dominio y el rango de F.

A) $\langle 0; p\rangle; \langle 0; p^2/2]$ B) $\langle 0; 2p\rangle, \langle 0; p/4\rangle$

C) $\langle 0; p\rangle, \langle 0; p^2/4]$

D) $\langle 0; p\rangle, \langle p; 2p\rangle$ E) $\langle -p; p\rangle, \langle 0; p^2]$

35. Hallar el dominio de la función:

$$F(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{[\![1-x]\!]}$$

A) $\left\langle \frac{1}{2}; 1\right\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$ B) $\langle 2; +\infty\rangle$

C) $\langle 1; +\infty\rangle$

D) $\left\langle \frac{1}{2}; 1\right\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$ E) $\left[\frac{1}{2}; 1\right\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

36. Encontrar el valor de "a – b" si el rango de la función:

$$F(x)=\sqrt{x-b}+\sqrt[4]{a-x}$$

es [0; 6]

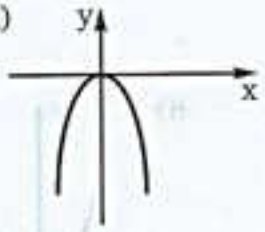
A) 16 B) 11 C) 14

D) 12 E) 18

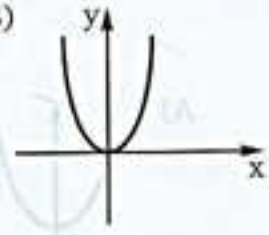
37. Graficar aproximadamente:

$$F(x) \cong -(3x^2-|x|)$$

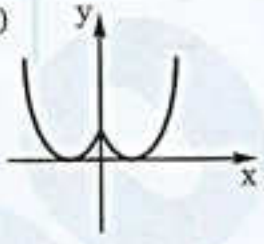
A)



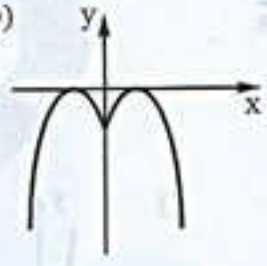
B)



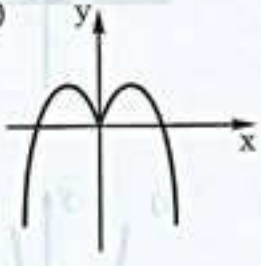
C)



D)



E)



38. Sea F una función constante tal que:

$$\frac{F(n-1)+F(n+1)}{F(2n)-3}=5$$

Calcular:

$$F(n^2-1)+F(n^3-1)$$

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

39. Determine el producto de todos los valores que asume "m", de modo que F sea una aplicación de A en B.

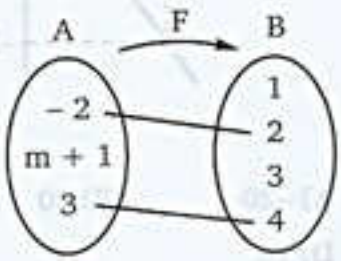
A) 6

B) – 6

C) 4

D) 0

E) – 4



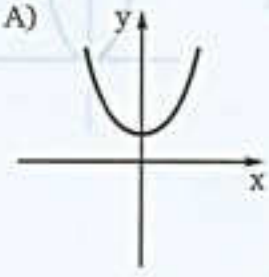
team CALAPENSHKO

40. Graficar:

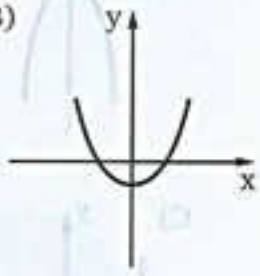
$$F(x) = x^2 + 2mx + m^2$$

si: $m < 0$

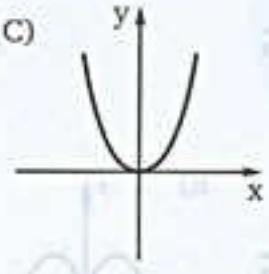
A)



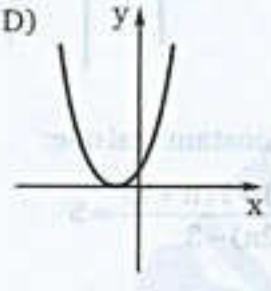
B)



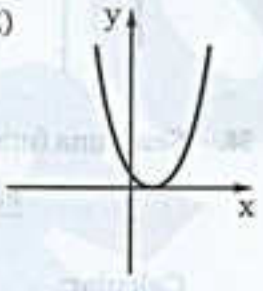
C)



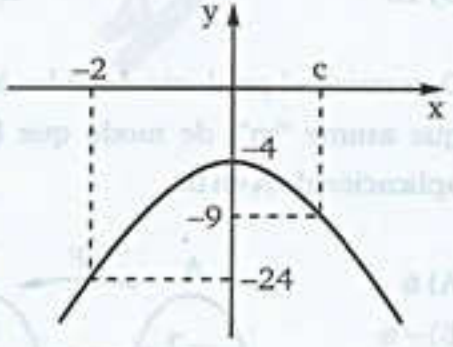
D)



E)



41. Dada la función cuadrática: $F(x) = ax^2 + b$ cuya gráfica se muestra, calcular abc.



A) –20 B) 20 C) –24

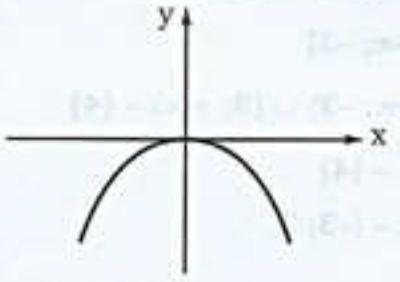
D) 18 E) –12

42. La gráfica de la función:

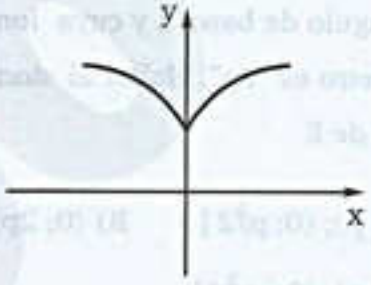
$$F(x) = x|x|$$

es:

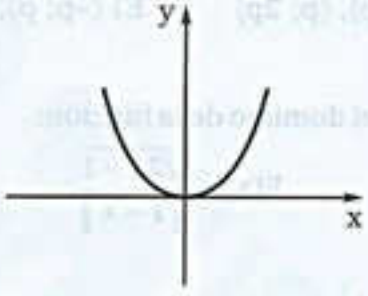
A)



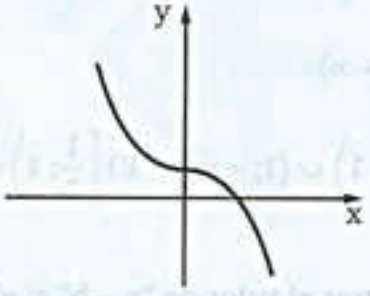
B)



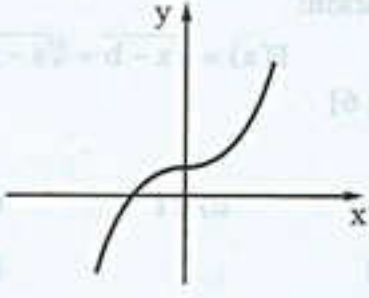
C)



D)



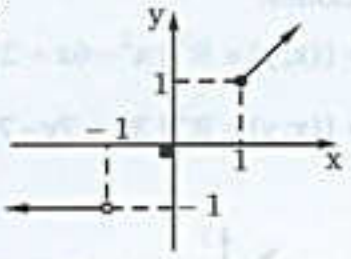
E)



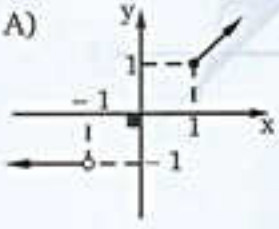
twitter.com/calapenshko

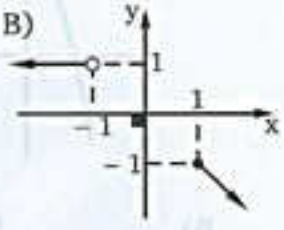
team CALAPENSHKO

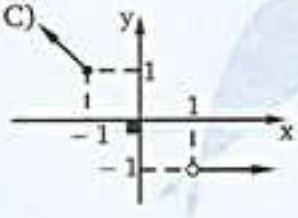
43. A continuación se muestra la gráfica de: $y = F(x)$:

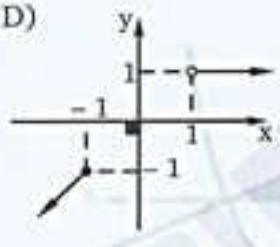


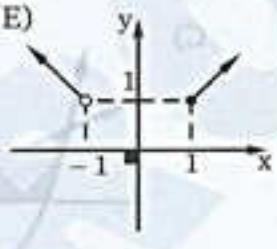
Esbozar la gráfica de: $y = -F(-x)$

A)


B)


C)


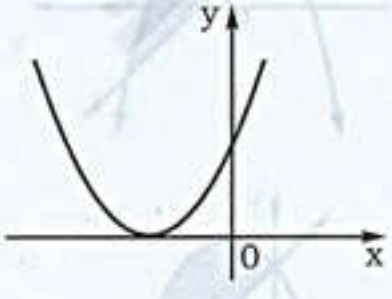
D)


E)


44. Determine el valor (o valores) del parámetro real "p"; para que la gráfica de la función:

$$F(x) = (p+1)x^2 + (5p-3)x + 2p + 3$$

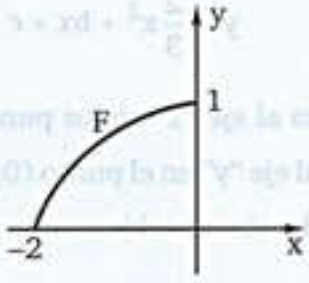
Sea:



A) 3 B) $\frac{1}{17}; -3$ C) $-\frac{1}{17}; 3$

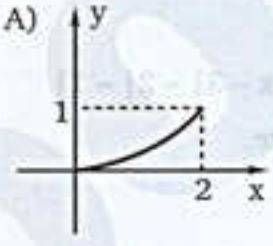
D) 17 E) −3

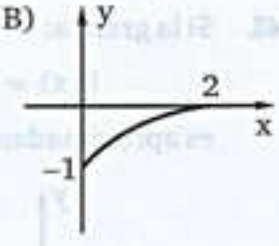
45. Según la gráfica de "f"

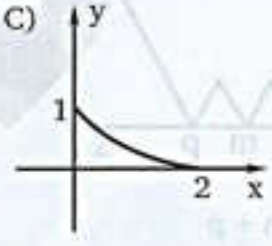


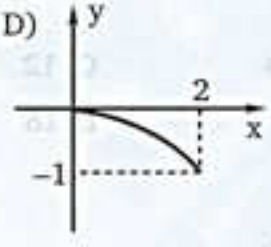
Indicar la gráfica de:

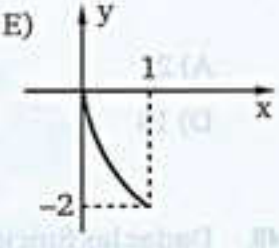
$$H(x) = f(-x) - 1$$

A)


B)


C)


D)


E)


46. Se tiene la función cuadrática:

$$F(x) = \frac{-x^2}{2} + bx + c \;;\; x \in \mathbb{R}$$

Cuyo conjunto de imágenes viene dada por la región $]-\infty; 5]$. Calcular el valor de la constante entera "k", tal que $F(k) = 5$ y $F(4) = 3$; si se sabe además que las raíces de F son positivas.

A) 11 B) 7 C) 10

D) 6 E) 12

team CALAPENSHKO

47. La gráfica de la función:

$$y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$$

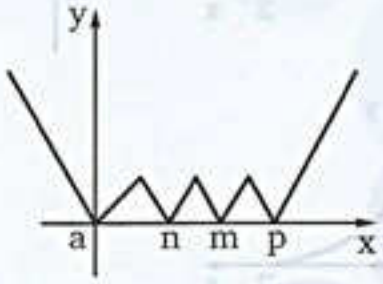
intersecta al eje "x" en los puntos (–2; 0) y (5; 0) y al eje "y" en el punto (0; k). Calcular el valor de: (b + c + k)

A) 23/5 B) –23/5 C) –46/3
D) 46/3 E) 50/3

48. Si la gráfica:

$$F(x) = |||x-3|-2|-1|$$

es aproximadamente.



Calcular: a + m + n + p

A) 2 B) 4 C) 12
D) 14 E) 18

49. Dadas las funciones:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

$$g(x) = -7x^2 - 3px + p$$

Se elige "p", de manera que sus gráficas tengan un único punto en común. Entonces, las coordenadas (x; y) de dicho punto son:

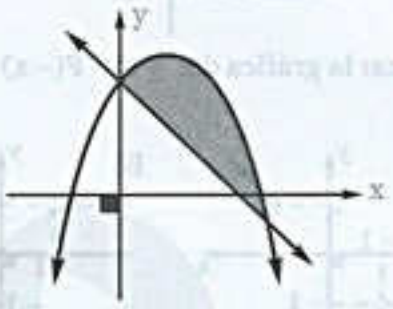
A) (0; 0) B) (1; 1) C) (–1; 3)
D) (1; 3) E) (1; –3)

50. Graficar la intersección de las siguientes relaciones:

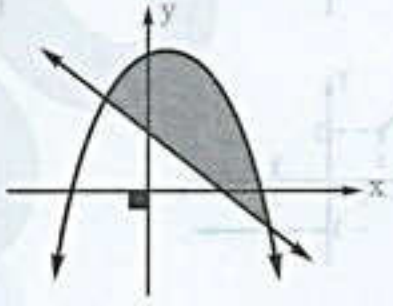
$$R_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 6x + 2y - 1 \le 0\}$$

$$R_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 7y - 7 \ge 0\}$$

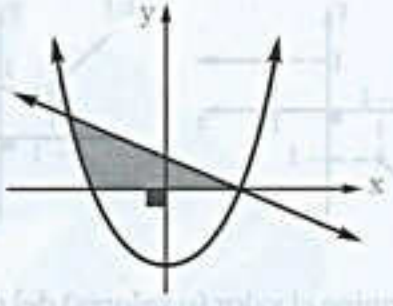
A)



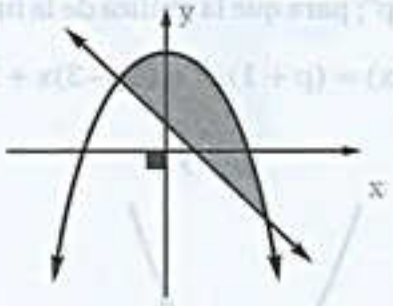
B)



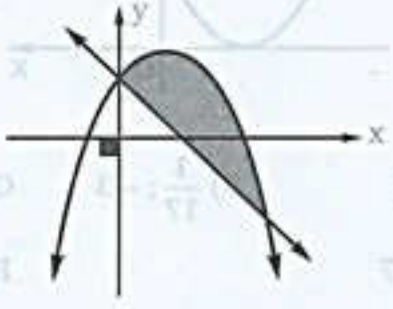
C)



D)



E)



team CALAPENSHKO

Capítulo 15

Funciones II

CAPACIDADES:

- Reconoce funciones notables e identificar sus propiedades.
- Efectuar operaciones con funciones en un dominio permisible.
- Determinar funciones inversas a partir de funciones inyectivas.

$$\frac{F}{G}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/y=\left(\frac{F}{G}\right)(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$D_{\frac{F}{G}}=D_F\cap D_G-\{x/G(x)=0\}$$

JOHANN DIRICHLET

JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (Düren, actual Alemania, 13 de febrero de 1805 - Gotinga, actual Alemania, 5 de mayo de 1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función.

Dirichlet nació en Düren, donde su padre era el jefe de la oficina de correos. Fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Gotinga, en donde ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte. Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Fourier. Su primera publicación comprendió una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso n=5, que también fue completada por Adrien-Marie Legendre, uno de sus revisores. Dirichlet completó su propia prueba casi al mismo tiempo; más adelante completó también la prueba para n=14. Aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

Fueron estudiantes suyos Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker y Rudolf Lipschitz. Tras la muerte de Dirichlet, su amigo y colega matemático Richard Dedekin recopiló, editó y publicó sus lecciones y otros resultados en teoría de números bajo el título Vorlesungen über Zahlentheorie (Lecciones sobre Teoría de Números).

team CALAPENSHKO

CLASES DE FUNCIONES

1. FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Dada la función $F : A \to B$, F es inyectiva si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio.

Ejemplo: ¿Cuál de las funciones:

$$F_1 = \{(2;1), (7;0), (3;-1), (5;4)\}$$

$$F_2 = \{(1;0), (2;3), (5;-1), (4;3)\}$$

es inyectiva?

Resolución: De acuerdo con la definición F_2 no es inyectiva, pues para el elemento 3 de su rango le corresponde dos elementos en su dominio 2 y 4.

$\therefore$ Sólo F_1 es inyectiva

Definición Práctica: Dada la función:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x),\ x \in D_F$

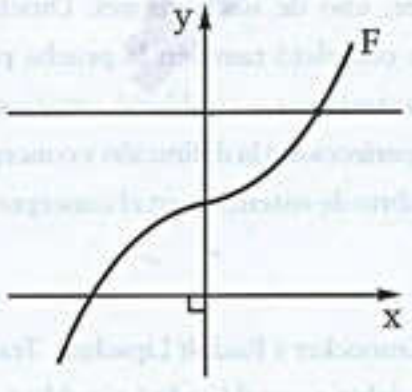
F será inyectiva si verifica la condición:

$$\text{Para cada } x_1,\ x_2 \in D_F \,/\, F(x_1) = F(x_2) \to x_1 = x_2$$

Propiedad:

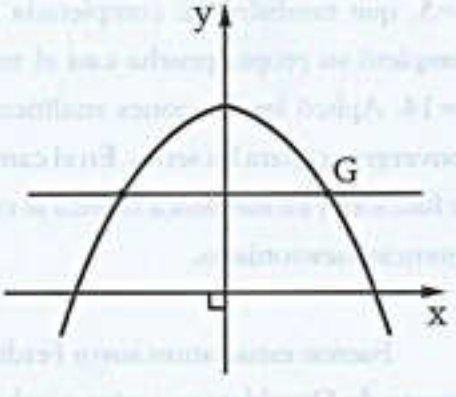
Toda recta horizontal trazada a la gráfica de una función inyectiva la corta en un solo punto.

Fig (1)



F corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

Fig (2)



G no corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

team CALAPENSHKO

2. FUNCIÓN SURYECTIVA, SOBREYECTIVA O EPIYECTIVA

Dada la función F, donde $F : A \to B$, se dice que F es suryectiva si el rango de F coincide con el conjunto de llegada, es decir:

$$F \text{ es Suryectiva} \leftrightarrow R_F = B$$

3. FUNCIÓN BIYECTIVA

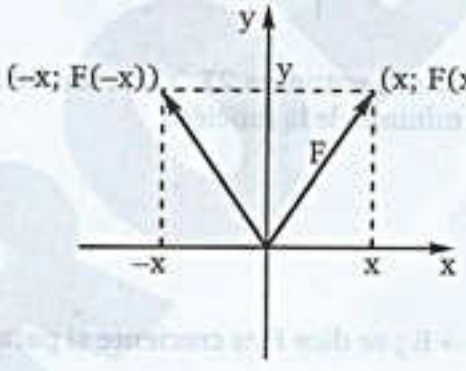
Dada la función F, donde $F : A \to B$, se dice que F es biyectiva si y sólo si F es inyectiva y suryectiva a la vez.

FUNCIONES NOTABLES

1. FUNCIÓN PAR

Dada la función F, donde $F : A \to B$; de modo que $x \in D_F \wedge (-x) \in D_F$ y además $F(x) = F(-x)$, entonces se dirá que F es una función par.

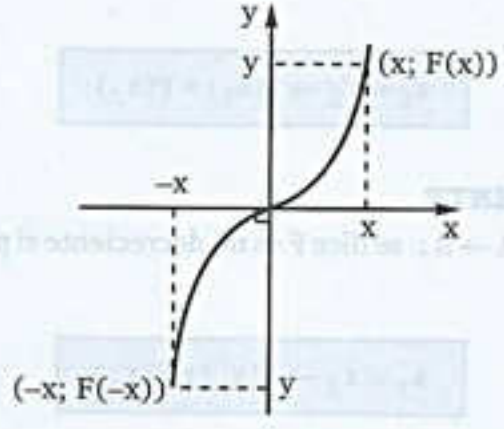
Propiedad:
La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje de ordenadas (eje y)



2. FUNCIÓN IMPAR

Dada la función F, donde $F : A \to B$; de modo que $x \in D_F \wedge (-x) \in D_F$ y además $F(-x) = -F(x)$, entonces se dirá que F es una función impar.

Propiedad:
La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas.



A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

3. FUNCIÓN PERIÓDICA

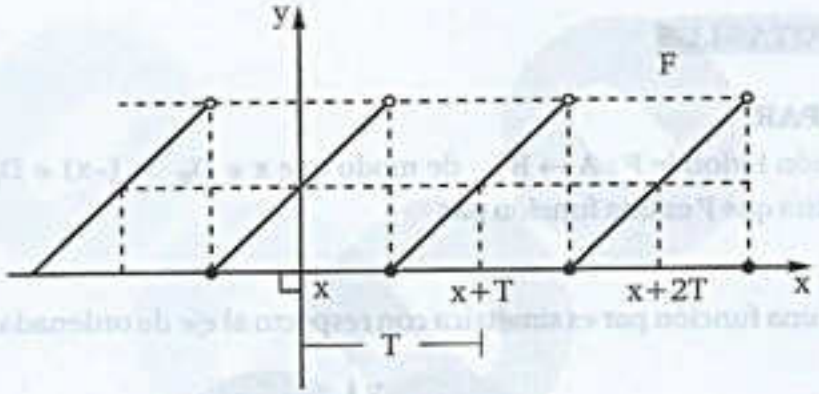
Dada la función F, donde $F: A \to B$; se dice que F es una función periódica si existe un número real $T \neq 0$ denominado período de modo que verifique simultáneamente las condiciones:

I) $x \in D_F \rightarrow (x + T) \in D_F$

II) $F(x + T) = F(x); \ \forall x \in D_F$

Propiedad:

Toda función periódica tiene su gráfica de tal manera que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T se repite horizontalmente y periódicamente en el anterior y posterior intervalo de longitud T.



Observar que si T es un período de F, entonces 2T, 3T, ... también son períodos de F. Al menor T positivo se le denomina período mínimo de la función.

FUNCIONES MONÓTONAS

1. FUNCIÓN CRECIENTE

Dada la función F, donde $F: A \to B$; se dice F es creciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

2. FUNCIÓN DECRECIENTE

Dada la función F, donde $F: A \to B$; se dice F es decreciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2)$$

3. FUNCIÓN NO DECRECIENTE

Dada la función F, donde $F: A \to B$; se dice F es no decreciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

team CALAPENSHKO

4. FUNCIÓN NO CRECIENTE

Dada la función F, donde $F: A \to B$; se dice F es no creciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \to F(x_1) \geq F(x_2)$$

Propiedad:
Si una función F es creciente o decreciente, F será una función inyectiva.

IGUALDAD DE FUNCIONES

1. DEFINICIÓN

Dadas las funciones F y G, tal que:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x);\ x \in D_F$$

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x);\ x \in D_G$$

Se dice que estas son iguales: F = G, si y sólo si verifican simultáneamente las condiciones:

I) $D_F = D_G$

II) $F(x) = G(x)\ ; \forall\, x \in D_F = D_G$

Ejemplo: Dadas las funciones:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x) = \frac{1}{x}$$

¿son iguales?

Resolución: De acuerdo con la definición veamos si se verifican las condiciones

I) Para F: $y = \dfrac{x}{x^2}$

$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x^2 \neq 0$

$x \neq 0 \to x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore\ D_F = \mathbb{R} - \{0\}$

Para G: $y = \dfrac{1}{x}$

$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \neq 0$

$x \neq 0 \to x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore\ D_G = \mathbb{R} - \{0\}$

Observar que $D_F = D_G$

II) Regla de correspondencia para F: $F: y = F(x) = \dfrac{x}{x^2}$

Como $x \neq 0$; $F(x) = \dfrac{1}{x}$

Regla de correspondencia para G: $G: y = G(x) = \dfrac{1}{x}$

Observar que $F(x) = G(x)$

$\therefore$ F ∧ G son iguales

team CALAPENSHKO

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones F y G, donde:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x);\ x \in D_F$$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x);\ x \in D_F$$

Tales que $D_F \cap D_G \neq \varnothing$, se define:

1. ADICIÓN

$$F + G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = (F+G)(x) = F(x) + G(x)$$

$$D_{F+G} = D_F \cap D_G$$

2. SUSTRACCIÓN

$$F - G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = (F-G)(x) = F(x) - G(x)$$

$$D_{F-G} = D_F \cap D_G$$

3. MULTIPLICACIÓN

$$F.G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = (F.G)(x) = F(x).G(x)$$

$$D_{F.G} = D_F \cap D_G$$

4. DIVISIÓN

$$\frac{F}{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = \left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$D_{\frac{F}{G}} = D_F \cap D_G - \{x / G(x) = 0\}$$

Ejemplo: Dadas las funciones:

$$F = \{(2;4), (1;-1), (5;2), (4;0), (3;3)\}$$

$$G = \{(1;2), (7;4), (2;1), (0;-4), (3;0)\}$$

Determinar:

$$F + G, F - G, F.G \wedge F/G$$

Resolución: Veamos los dominios de F y G

$$D_F = \{2;1;5;4;3\}$$

$$D_G = \{1;7;2;0;3\}$$

Observar que: $D_F \cap D_G = \{1;2;3\}$

Para F + G:

$$F + G = \{(1; F(1) + G(1)), (2; F(2) + G(2)), (3; F(3) + G(3)\}$$

$$F + G = \{(1; -1 + 2), (2; 4 + 1), (3; 3 + 0)\}$$

$$\therefore\ F + G = \{(1;1), (2;5), (3;3)\}$$

Para F − G:

$$F - G = \{(1; F(1) - G(1)), (2; F(2) - G(2)), (3; F(3) - G(3)\}$$

$$F - G = \{(1; -1 - 2), (2; 4 - 1), (3; 3 - 0)\}$$

$$\therefore\ F - G = \{(1; -3), (2; 3), (3; 3)\}$$

team CALAPENSHKO

Para F . G: $F.G = \{(1; F(1).G(1)), (2; F(2).G(2)), (3; F(3).G(3))\}$

$F.G = \{(1; -1.2), (2; 4.1), (3; 3.0)\}$

$\therefore \quad F.G = \{(1; -2), (2; 4), (3; 0)\}$

Para F/G: $\dfrac{F}{G} = \left\{\left(1; \dfrac{F(1)}{G(1)}\right), \left(2; \dfrac{F(2)}{G(2)}\right)\right\} = \left\{\left(1; \dfrac{-1}{2}\right), \left(2; \dfrac{4}{1}\right)\right\}$

$\therefore \quad \dfrac{F}{G} = \left\{\left(1; -\dfrac{1}{2}\right), \left(2; 4\right)\right\}$

NOTA

Para $x = 3$: $\dfrac{F(3)}{G(3)}$ no esta bien definido

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. DEFINICIÓN

Dadas las funciones F y G:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x);\ x \in D_F$$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x);\ x \in D_G$$

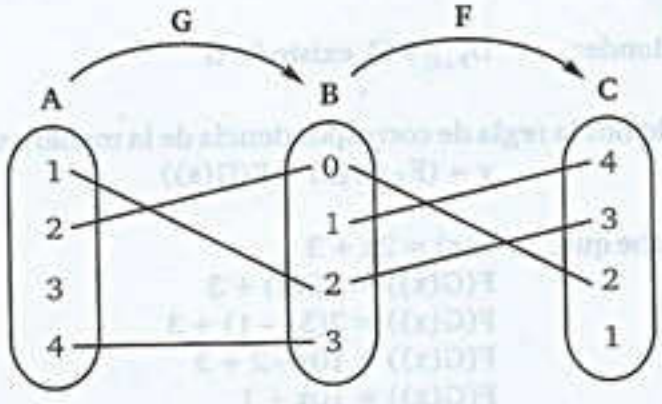
Se define la función F compuesta con G (en ese orden), denotada por $F \circ G$ de la manera siguiente:

$$F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

Siendo su dominio:

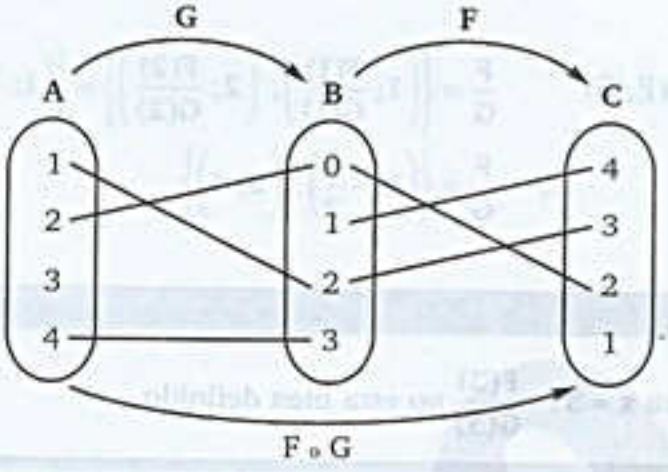
$$D_{F \circ G} = \{x / x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\}$$

Ejemplo: Del gráfico adjunto:



Determinar $F \circ G$

Resolución: Los elementos de $F \circ G$ son aquellos pares $(x; y) / x \in A \wedge y \in C$, cuyas líneas realicen un recorrido directo desde A hasta C pasando por B, veamos:



$$\therefore\ F \circ G = \{(1; 3), (2; 2)\}$$

Ejemplo: Determine la función $F \circ G$, sabiendo que:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = 2x + 3\ ;\ x \in \langle -4; 5]$$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x) = 5x - 1\ ;\ x \in [-2; 0\rangle$$

Resolución: Hallemos el dominio de F o G de la manera siguiente:

$$D_{F \circ G} = \{x / x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\}$$

$$x \in [-2; 0\rangle \wedge (5x - 1) \in \langle -4; 5]$$

$$-2 \le x < 0 \wedge -4 < 5x - 1 \le 5$$

$$-2 \le x < 0 \wedge -3 < 5x \le 6$$

$$-2 \le x < 0 \wedge -\frac{3}{5} < x \le \frac{6}{5}$$

$$-\frac{3}{5} < x < 0 \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{3}{5}; 0 \right\rangle$$

De donde: $D_{F \circ G} \neq \varnothing$, existe $F \circ G$

Hallemos la regla de correspondencia de la manera siguiente:

$$y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

Se sabe que: $F(x) = 2x + 3$

$$F(G(x)) = 2G(x) + 3$$

$$F(G(x)) = 2(5x - 1) + 3$$

$$F(G(x)) = 10x - 2 + 3$$

$$F(G(x)) = 10x + 1$$

$$\therefore\ y = (F \circ G)(x) = 10x + 1\ ;\ x \in \left\langle -\frac{3}{5}; 0 \right\rangle$$

team CALAPENSHKO

2. PROPIEDADES

Para las funciones F, G y H:

I) $\exists\ F \circ G \leftrightarrow R_G \cap D_F \neq \varnothing$

II) En general $F \circ G \neq G \circ F$

III) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

IV) $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$

V) $(F \,.\, G) \circ H = (F \circ H) \,.\, (G \circ H)$

VI) Siendo I la función identidad $F \circ I = F \wedge I \circ F = F$

FUNCIÓN INVERSA

1. DEFINICIÓN

Sea F una función inyectiva definida por:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x);\ x \in D_F$$

Luego existe su función inversa denotada por $F^* = F^{-1}$ y definida así:

$$F^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x = F(y);\ x \in D_F$$

Lo cual quiere decir que F* es el conjunto de pares ordenados obtenidos al intercambiar el primer elemento por el segundo elemento en cada par ordenado de F.

Ejemplo: Dada la función

$$F = \{(1;0), (2;3), (-1;7)\}$$

Determinar F*, si existe.

Resolución: Una rápida inspección permite observar que F es inyectiva, luego existe F* y viene dada por:

$$F^* = \{(0;1), (3;2), (7;-1)\}$$

2. PROPIEDADES

Siendo F y G funciones inyectivas y la función identidad I, tenemos:

I) $D_F{}^* = R_F$ y $R_F{}^* = D_F$

II) $(F^*)^* = F$

III) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

IV) $F^* \circ F = I$, sobre D_F

V) $F \circ F^* = I$, sobre $D_F{}^*$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Determinar la inversa de F, si existe

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = 2x - 3 \; ; \; x \in \langle -4; 1 \rangle$$

Resolución: Fácilmente podemos observar que F es inyectiva (función lineal), luego procedemos a calcular su rango pues $R_F = D_F{}^*$

Formaremos: $y = 2x - 3$

A partir de: $x \in \langle -4; 1 \rangle$

$$-4 < x < 1$$
$$-8 < 2x < 2$$
$$-11 < 2x - 3 < -1$$
$$-11 < y < -1$$
$$y \in \langle -11; -1 \rangle$$

Observar que: $R_F = D_F{}^* = \langle -11; -1 \rangle$

Ahora hallaremos la regla de correspondencia de F*

$$F \; : \; y = 2x - 3$$

$$F^* \; : \; x = 2y - 3$$

$$2y = x + 3$$

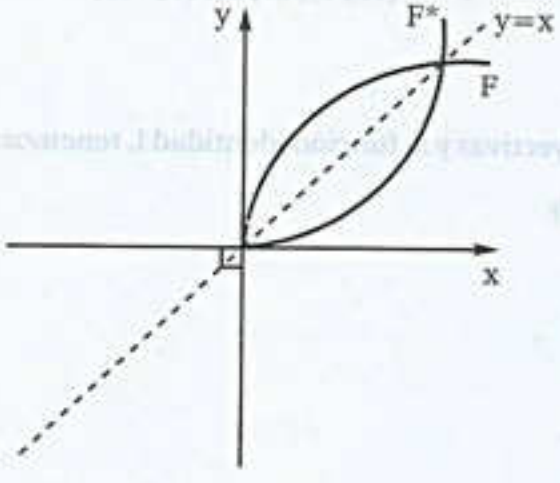
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Observar que: $F^*(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\therefore \; y = F^*(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \; ; \; x \in \langle -11; -1 \rangle$$

3. TEOREMA

Siendo F una función inyectiva, las gráficas de F y F* son simétricas con respecto a la recta identidad y = x



team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $F = \{(2; 1), (3; 0), (-1; -1)\}$ es una función inyectiva .....( )

II. $H = \{(4; 0), (5; 1), (7; 2)\}$ es una función biyectiva. .....( )

III. $G = \{(-2; 1), (-2; 1), (-2; 1)\}$ es una función univalente. .....( )

2. Coloca un visto (√) en el recuadro que corresponde a una función par.

A) $y = F(x) = x^2; x \in \langle -1; 1\rangle$ .....☐

B) $y = G(x) = x^4; x \in \langle -2; 2]$ .....☐

C) $y = H(x) = x^2 - 1; x \in [-2; 2]$ .....☐

D) $y = R(x) = 4; x \in \langle -7; 7\rangle$ .....☐

E) $y = Q(x) = x; x \in \langle -5; 5\rangle$ .....☐

3. Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $y = F(x) = 2x^3; x \in [-4; 4]$ es una función impar. .....( )

II. $y = G(x) = \text{sen}(x); x \in \mathbb{R}$ es una función periódica. .....( )

III. $y = H(x) = x^4 + x^2 + 1; x \in \mathbb{R}$ es una función par. .....( )

4. Dadas las funciones:

$F = \{(2; 1), (3; 0), (-2; 7), (-1; 5)\}$

$G = \{(-1; 2), (5; 0), (3; 5), (2; 0)\}$

Determine.

A) $F + G$ B) $F - G$

C) $F.G$ D) $F \div G$

E) F^2 F) $2F + G^2$

5. Si: $y = F(x) = 2x - 1; x \in \langle -2; 4]$

$y = G(x) = x + 4; x \in \langle -1; 5\rangle$

Determine:

A) $F \circ G$ B) $G \circ F$

C) $F \circ F$ D) $G \circ G$

E) $F^2 \circ G$ F) $G^2 \circ F$

6. Determine la función inversa de cada función dada a continuación:

A) $y = F(x) = 2x + 7; x \in \langle -1; 5\rangle$

B) $y = F(x) = x^2 - 1; x \in \langle -6; 1]$

C) $y = F(x) = x^3 + x; x \in \langle 1; 4\rangle$

D) $y = F(x) = \sqrt{x}; x \in [2; 6]$

E) $y = F(x) = x - \sqrt{-x}; x \in \langle -\infty; -4\rangle$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Si: $F(x+1) = x+1$ y $G(x-1) = x^2$

Calcular:

$$F(G(-1)) + G(F(-1))$$

Resolución:

Para calcular $G(-1)$ en $G(x-1)$ hacemos $x = 0$, luego:

$$G(-1) = 0$$

Para calcular $F(-1)$ en $F(x+1)$ hacemos $x = -2$, luego:

$$F(-1) = -1$$

Ahora si el valor pedido es "K", tenemos:

$$K = F(0) + G(-1)$$

Para calcular $F(0)$ en $F(x+1)$ hacemos $x = -1$, luego:

$$F(0) = 0$$

Finalmente obtenemos: $K = 0 + 0$

$$\therefore \quad K = 0$$

PROBLEMA 2 Si: $F(2x-1) = 4x^2 - 4x$ y $G(x-2) = F(2x)$

Calcular:

$$K = 5\sqrt{\frac{(F \circ G)(0)}{14}}$$

Resolución:

Reescribiendo la función F :

$$F(2x-1) = 4x^2 - 4x + 1 - 1$$
$$F(2x-1) = (2x-1)^2 - 1$$
$$F(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Por condición tenemos : $G(x-2) = F(2x)$

Se pide calcular el valor de :

$$K = 5\sqrt{\frac{F(G(0))}{14}} = 5\sqrt{\frac{F(F(4))}{14}}$$
$$K = 5\sqrt{\frac{F(15)}{14}} = 5\sqrt{\frac{16 \,.\, 14}{14}} = 5\sqrt{16}$$

$$\therefore \quad K = 20$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 3 Determine la función $\frac{F}{G}$, sabiendo que:

$$F(x)=\begin{cases} x & ; x>0 \\ x^2 & ; x<0 \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} x-2 ; & x<0 \\ x+2 ; & x>0 \end{cases}$$

Resolución: Reescribiendo las funciones F y G, tenemos:

$$F(x)=\begin{cases} x & ; x>0 \quad \ldots\ldots F_1 \\ x^2 & ; x<0 \quad \ldots\ldots F_2 \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} x-2 ; & x<0 \quad \ldots\ldots G_1 \\ x+2 ; & x>0 \quad \ldots\ldots G_2 \end{cases}$$

En busca de F/G:

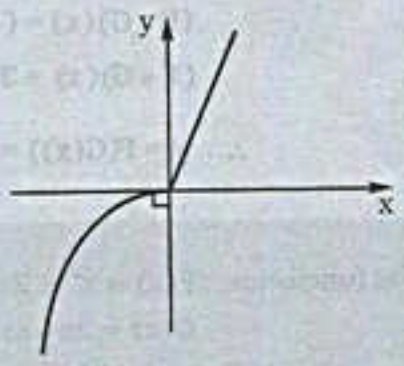
Existe F_1 / G_2 en el intervalo $\langle 0; \infty \rangle$

Existe F_2 / G_1 en el intervalo $\langle -\infty; 0 \rangle$

Finalmente:

$$\therefore \left(\frac{F}{G}\right)(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & ; x>0 \\ \dfrac{x^2}{x-2} & ; x<0 \end{cases}$$

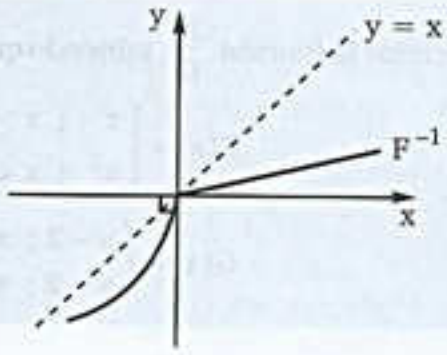
PROBLEMA 4 A continuación se muestra la gráfica de una función F



Esbozar la gráfica de F^{-1}, si existe

Resolución: Una rápida inspección permite afirmar que F es una función inyectiva ¿por qué? por que al trazar cualquier recta horizontal a su gráfica siempre la corta en un solo punto. Finalmente la gráfica F^{-1} se obtiene reflejando sobre la recta identidad $y = x$ la gráfica de F, veamos:

team CALAPENSHKO



PROBLEMA 5 Sea: $F(x) = x^2 + 1$ y $G(x) = \sqrt{2-x}$

Determinar $(F \circ G)(x)$, si existe

Resolución: Determinando los dominios de las funciones dadas tenemos:

$$F(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \sqrt{2-x} \quad ; \quad x \in \langle -\infty ; 2]$$

Hallemos el dominio de $F \circ G$:

$$D_{F\circ G} = \{x / x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\}$$

$$D_{F\circ G} = \{x / x \in \langle -\infty ; 2] \wedge \underbrace{\sqrt{2-x} \in \mathbb{R}}_{x \leq 2}\}$$

$$D_{F\circ G} = \langle -\infty ; 2]$$

Hallemos la regla de correspondencia de $F \circ G$:

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(\sqrt{2-x})$$

$$(F \circ G)(x) = (\sqrt{2-x})^2 + 1 = 2 - x + 1$$

$$(F \circ G)(x) = 3 - x$$

$$\therefore \quad y = F(G(x)) = 3 - x \; ; \; x \in \langle -\infty ; 2]$$

PROBLEMA 6 Sean las funciones: $F(x) = x^2 + 2x$

$G(x) = 2x - m \; ; \; m < 0$

Para que valor de "m" se verifica:

$$(F \circ G)(2) = (G \circ F)(m-2)$$

Resolución: Reescribiendo la función F:

$$F(x) = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{} - 1$$

$$F(x) = (x+1)^2 - 1$$

team CALAPENSHKO

Por condición tenemos :

$$G(x) = 2x - m \ ; \ m < 0$$

Hallemos $(F \circ G)(2)$: $(F \circ G)(2) = F(G(2)) = F(4 - m)$

$$(F \circ G)(2) = (5 - m)^2 - 1$$

Hallemos $(G \circ F)(m - 2)$:

$$(G \circ F)(m - 2) = G(F(m - 2)) = G((m - 1)^2 - 1)$$

$$(G \circ F)(m - 2) = 2(m - 1)^2 - 2 - m$$

Por condición se debe cumplir:

$$(5 - m)^2 - 1 = 2(m - 1)^2 - 2 - m$$

$$m^2 - 10m + 24 = 2m^2 - 5m$$

$$m^2 + 5m - 24 = 0$$

De donde obtenemos : $m = 3$ ó $m = -8$, pero como $m < 0$

$$\therefore \quad m = -8$$

PROBLEMA 7

Sean: $F = \{(1;2), (3;4), (2;6), (5;7)\}$

$G = \{(2;3), (4;1), (3;6), (5;9)\}$

$H(x) = x + 2 \ ; \ x \in \langle -2; 2]$

Determine el rango de $(F + G) \circ H$

Resolución:

Hallemos $F + G$, para lo cual notamos que: $D_F \cap D_G = \{2; 3; 5\}$

$$F + G = \{(2; F(2)+G(2)), (3; F(3)+G(3)), (5; F(5)+G(5))\}$$

$$F + G = \{(2; 9), (3; 10), (5; 16)\}$$

Hallemos el dominio de $(F + G) \circ H$, para lo cual se plantea:

$$D_{(F+G)\circ H} = \{x / x \in D_H \ \wedge \ H(x) \in D_{F+G}\}$$

$$D_{(F+G)\circ H} = \{x / x \in \langle -2; 2] \ \wedge \ x + 2 \in \{2; 3; 5\}\}$$

$$D_{(F+G)\circ H} = \{x / x \in \langle -2; 2] \ \wedge \ x \in \{0; 1; 3\}\}$$

$$D_{(F+G)\circ H} = \{0; 1\}$$

Hallemos los elementos del rango de $(F + G) \circ H$

Si $x = 0$ entonces: $[(F + G) \circ H](0) = (F + G)(H(0)) = (F + G)(2)$

$$[(F + G) \circ H](0) = 9$$

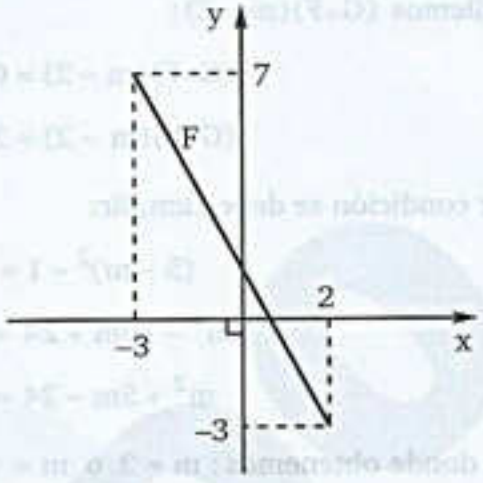
Si $x = 1$ entonces: $[(F + G) \circ H](1) = (F + G)(H(1)) = (F + G)(3)$

$$[(F + G) \circ H](1) = 10$$

$$\therefore \quad R_{(F+G)\circ H} = \{9; 10\}$$

PROBLEMA 8 Si la función $F: [-3; 2] \to [-3; 7]$ es lineal, biyectiva y decreciente.
Calcular: $F^*(3)$

Resolución: La función $F: [-3; 2] \to [-3; 7]$, lineal, biyectiva y decreciente es:



Sea la función : $F(x) = ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} F(-3) = -3a + b \to -3a + b = 7 \\ F(2) = 2a + b \to 2a + b = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \end{array}$$

$$F(x) = -2x + 1$$

Hallemos F^* : $x = -2y + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$$F^*(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$F^*(3) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore F^*(3) = -1$$

PROBLEMA 9 Determine el conjunto B, sabiendo que la siguiente función:
$F: [-1; 3] \to B \mid F(x) = |2x| + 1 - x$ es sobreyectiva

Resolución: Como F es sobreyectiva, B es el rango de F

Observar que: $[-1; 3] = [-1; 0\rangle \cup [0; 3]$

Para $x \in [-1; 0\rangle$: $F(x) = -(2x) + 1 - x \to F(x) = -3x + 1$

Ahora formamos: $F(x) = -3x + 1$ a partir de $x \in [-1; 0\rangle$

team CALAPENSHKO

Por condición: $-1 \le x < 0 \Leftrightarrow 0 < -3x \le 3$

$1 < -3x+1 \le 4 \Leftrightarrow 1 < F(x) \le 4$

Para $x \in [0;3]$: $F(x) = (2x) + 1 - x$

$F(x) = x + 1$

Ahora formamos: $F(x) = x + 1$ a partir de $x \in [0;3]$

Por condición: $0 \le x \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 4$

$1 \le F(x) \le 4$

Finalmente: $R_F = \langle 1;4] \cup [1;4]$

$\therefore B = [1;4]$

PROBLEMA 10 Sea

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Determine $F^*(x)$ si existe.

Resolución: Inicialmente debemos averiguar si F es inyectiva, de no ser inyectiva se podrá asegurar que no existe F^*, veamos:

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} \; ; \; D_F = \mathbb{R}$$

Ahora se plantea :

$$x_1; x_2 \in D_F \; / \; \underbrace{F(x_1) = F(x_2)}$$

$$\frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$x_1x_2^2 + x_1 = x_1^2x_2 + x_2$$

$$x_1x_2(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1) = 0$$

De donde se obtiene :

$$x_1 = x_2 \; \vee \; x_1x_2 = 1$$

Con lo cual podemos asegurar que F no es inyectiva.

$\therefore$ No existe F^*

PROBLEMA 11 Dada la función $F(x) = x + |x|$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Existe F^*

II) $F(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

III) F es acotada

Resolución: Reescribiendo: $F(x) = x + |x|$

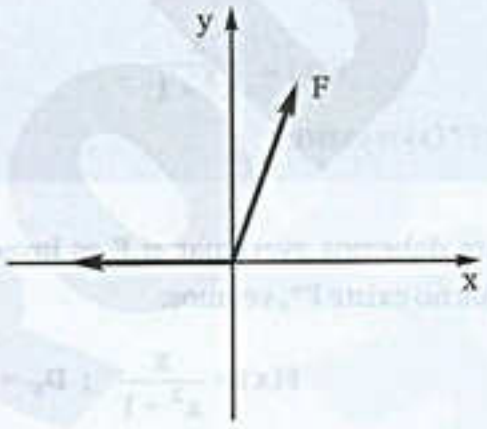
$$F(x) = \begin{cases} 2x \; ; \; x \geq 0 \\ 0 \; ; \; x < 0 \end{cases}$$

I) FALSO $y = 0$ es la función nula y no es inyectiva

II) VERDADERO Por definición de F:

$F(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

III) FALSO Veamos la gráfica



De donde $R_F = [0; \infty)$ indica que F no es acotada.

PROBLEMA 12 Sean las funciones: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F(x) = |x - 2010|$

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid G(x) = x^2 - 36$

$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid H(x) = 4(x + 2011)$

Determine el valor de verdad:

I) F es suryectiva

II) G es inyectiva

III) H es biyectiva

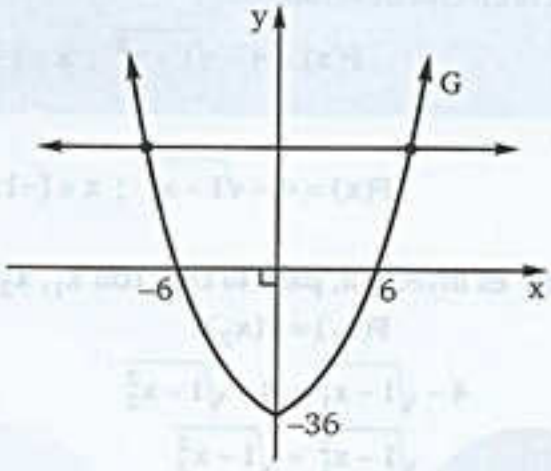
Resolución: I) FALSO

$\forall x \in \mathbb{R}: |x - 2010| \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq 0$

Con lo cual $R_F = [0; \infty\rangle \neq \mathbb{R}$

team CALAPENSHKO

II) FALSO



III) VERDADERO

$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid H(x) = 4(x + 2007)$

Observar que H es lineal, luego es inyectiva. Además $R_H = \mathbb{R}$, con lo cual H es suryectiva

$\therefore$ H es biyectiva

PROBLEMA 13 Determine la regla de correspondencia de F* si existe, donde:

$$F(x) = (|x - 31| - 30 + x)\sqrt{62 - 2x}$$

Resolución: Por condición de existencia:

$$62 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 31$$

Con lo cual F(x) será : $F(x) = (-x + 31 - 30 + x)\sqrt{62 - 2x}$

$$F(x) = \sqrt{62 - 2x} \; ; x \leq 31$$

Fácilmente podemos notar que F es inyectiva, luego existe F*

$$F : y = \sqrt{62 - 2x}$$

$$F^* : x = \sqrt{62 - 2y} \Leftrightarrow x^2 = 62 - 2y$$

$$2y = 62 - x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(62 - x^2)$$

$$\therefore \; F^*(x) = \frac{1}{2}(62 - x^2)$$

PROBLEMA 14 Determine la inversa de la función:

$$F(x) = 4 - \sqrt{1-x^2} \;;\; x \in [-1; 0]$$

Resolución:

$$F(x) = 4 - \sqrt{1-x^2} \;;\; x \in [-1; 0]$$

Veamos si F es inyectiva, para lo cual con $x_1, x_2 \in D_F$ planteamos:

$$F(x_1) = F(x_2)$$
$$4 - \sqrt{1-x_1^2} = 4 - \sqrt{1-x_2^2}$$
$$\sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2}$$
$$1 - x_1^2 = 1 - x_2^2$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$$
$$|x_1| = |x_2|$$

Por condición $x_1, x_2 \in [-1; 0] = D_F$

$$-x_1 = -x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Lo cual garantiza que F es inyectiva, en consecuencia existe F*

$$F : y = 4 - \sqrt{1-x^2}$$
$$F^* : x = 4 - \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = 4 - x$$
$$1 - y^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 - (4-x)^2$$
$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-(4-x)^2} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{1-(4-x)^2}$$

Recuerde que $D_F = R_{F^*}$, es decir $y \in [-1; 0]$

$$-y = \sqrt{1-(4-x)^2} \Leftrightarrow y = -\sqrt{1-(4-x)^2}$$

$$\therefore \; F^*(x) = -\sqrt{1-(4-x)^2}$$

PROBLEMA 15 Determine el grado de validez de cada una de las siguientes proposiciones:

I) Existen funciones que son pares e impares a la vez.

II) La función F definida por $F(x) = \left(x|x| - \frac{1}{x}\right)\operatorname{sen} x^4$ es impar.

III) Toda función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede reescribir como la adición de una función par y otra función impar.

team CALAPENSHKO

Resolución:

I) VERDADERO:

Por ejemplo la función $F(x) = 0$; $x \in \langle -3; 1\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$

Veamos las condiciones:

* $\forall x \in Dom(F)$; $-x \in Dom(F)$ ¡Si se cumple, ver dominio !
* $F(-x) = -F(x)$ como $F(x) = 0$, luego $F(-x) = 0$ ¡Si se cumple!

$\therefore$ F es par e impar a la vez

II) VERDADERO:

De acuerdo con la definición tenemos:

* $Dom(F) = \mathbb{R} - \{0\} : \forall x \in Dom(F)$; $-x \in Dom(F)$
* $$F(-x) = \left[(-x)|-x| - \frac{1}{(-x)}\right]\text{sen}(-x)^4$$

$$F(-x) = \left[-x|x| + \frac{1}{x}\right]\text{sen}\,x^4$$

$$F(-x) = -\underbrace{\left(x|x| - \frac{1}{x}\right)\text{sen}\,x^4}_{\text{es } F(x)}$$

$$F(-x) = -F(x)$$

$\therefore$ La función F es impar

III) VERDADERO:

Sean las funciones F, G y H tales que G es par y H es impar

Se plantea lo siguiente: $F(x) = G(x) + H(x)$ .....(1)

$Dom(F) = Dom(G) = Dom(H) = \mathbb{R}$: $F(-x) = G(-x) + H(-x)$

Como G es par $G(x) = G(-x)$: $F(-x) = G(x) + H(-x)$

Como H es impar $H(-x) = -H(x)$: $F(-x) = G(x) - H(x)$ .....(2)

Sumando (1) y (2) obtenemos: $G(x) = \dfrac{F(x) + F(-x)}{2}$

Restando (1) y (2) obtenemos: $H(x) = \dfrac{F(x) - F(-x)}{2}$

Con lo cual se cumple en (1): $F(x) = \dfrac{F(x) + F(-x)}{2} + \dfrac{F(x) - F(-x)}{2}$

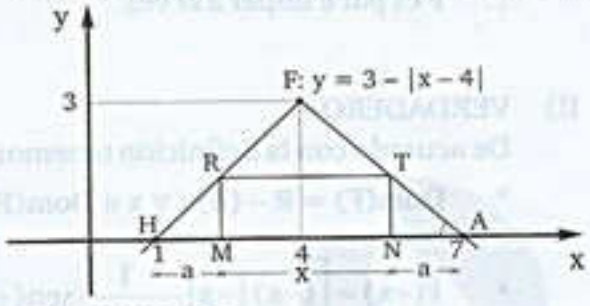
$\therefore$ La proposición es verdadera

PROBLEMA 16 En la región determinada por el eje "x" y la gráfica de la función F tal que:

$$F(x) = 3 - |x-4|,$$

Se inscribe un rectángulo cuya base está sobre el eje "x" y los otros dos vértices están en la gráfica de F. Halle el área máxima de dicho rectángulo

Resolución: De acuerdo con el enunciado podemos construir el siguiente gráfico:



De la gráfica podemos observar que:

$$HA = 7 - 1 = 6$$

Asimismo reconocemos que el $\triangle$ NTA es isósceles, por lo tanto:

$$NA = NT = MH = a \qquad \ldots\ldots(1)$$

También se puede reconocer que:

$$a + x + a = 6 \Rightarrow a = \frac{6-x}{2} \ldots\ldots(2)$$

A continuación el área del rectángulo MRTN viene dado por:

$$\text{Área} = (MN)(TN) \qquad \ldots\ldots(3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3), tendremos:

$$\text{Área} = x\left(\frac{6-x}{2}\right) = \frac{1}{2}(-x^2 + 6x)$$

Nuestra experiencia nos sugiere completar cuadrados en el paréntesis, para así poder encontrar el máximo valor del área. Veamos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}[9 - x^2 + 6x - 3^2] = \frac{1}{2}[9 - (x-3)^2]$$

Observa que: Área máxima $\Leftrightarrow (x-3)^2$ es lo mínimo posible $\Rightarrow (x-3)^2 = 0$

$$\therefore \text{ Área máxima} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

PROBLEMA 17 Consideremos la función F definida por:

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ x^3 + 1 & ; x \geq 0 \end{cases};$$

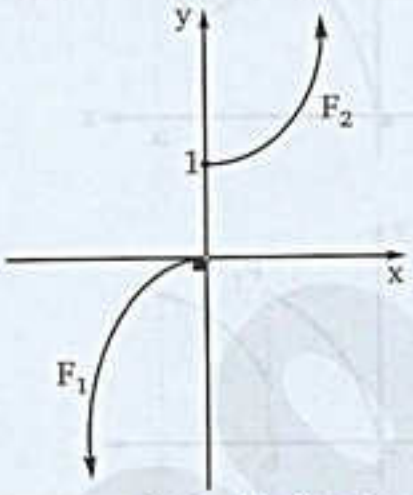
Luego F^{-1}, es:

team CALAPENSHKO

Resolución: De la condición dada para F, podemos reconocer en él, dos funciones componentes:

$$F(x)=\begin{cases}-x^2 & ; x<0 \ \ldots\ldots F_1\\ x^3+1; & x\geq 0 \ \ldots\ldots F_2\end{cases}$$

graficando éstas dos funciones, encontramos, el gráfico de F.



Según el gráfico, reconocemos que la función F es inyectiva, por lo tanto admite inversa. Hallemos F^{-1}:

$$\text{De } F_1: y=-x^2 \Rightarrow x=-y^2$$

$$\therefore F_1^{-1}: y=\sqrt{-x};\ x<0$$

$$\text{De } F_2: y=x^3+1 \Rightarrow x=y^3+1$$

$$\therefore F_2^{-1}: y=\sqrt[3]{x-1};\ x\geq 1$$

Finalmente: $$\therefore\ F^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & ; x<0\\ \sqrt[3]{x-1}; & x\geq 1\end{cases}$$

PROBLEMA 18 Sea F una función constante que verifica: $\dfrac{F(3)+F(11)}{F(1)+4}=1$

Calcular: F(1994) + F(2006)

Resolución: Sea y = F(x) = k la función constante, luego en la condición se tendrá:

$$\frac{k+k}{k+4}=1 \Leftrightarrow \frac{2k}{k+4}=1$$

$$2k=k+4 \Leftrightarrow k=4$$

Ahora tenemos:

$$F(x)=4;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Finalmente:

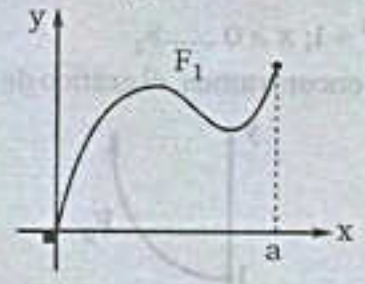
$$F(1994)+F(2006)=4+4$$

$$\therefore\ F(1994)+F(2006)=8$$

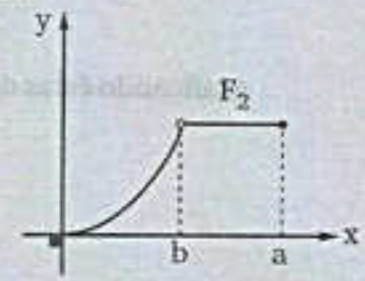
team CALAPENSHKO

PROBLEMA 19 Identifica la gráfica de una función continua.

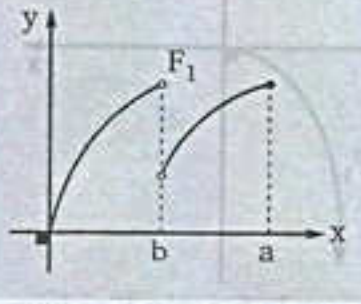
I.



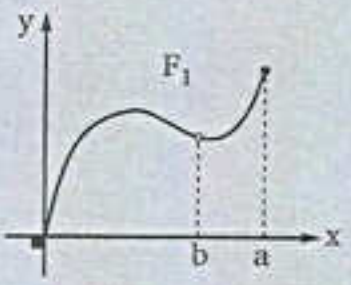
II.



III.



IV.



Resolución: Debemos tener en cuenta que una función es continua en su dominio si su gráfica no presenta ruptura, es decir la variable dependiente **y** existe para todo valor independiente **x**.

De acuerdo con lo anterior se podrá afirmar que sólo en I tenemos la gráfica de una función continua.

PROBLEMA 20 Si $y = F(x)$ es una función periódica de período $T = 3$ tal que $F(5) = 3$ y $F(-2) = 7$. Calcular: $E = F(11) + F(F(1) + 4)$.

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$F(x) = F(x + 3) \quad \text{.....(1)}$$

En (1) hagamos que $x = -2$:

$$F(-2) = F(-2 + 3)$$
$$F(-2) = F(1)$$
$$7 = F(1) \quad \text{.....(2)}$$

En (1) hagamos que $x = 5$:

$$F(5) = F(8)$$
$$3 = F(8)$$

En (1) hagamos que $x = 8$:

$$F(8) = F(11)$$
$$3 = F(11) \quad \text{.....(3)}$$

En la expresión pedida:

$$E = F(11) + F(F(1) + 4)$$

Reemplazando (2) y (3):

$$E = F(11) + F(7 + 4)$$
$$E = F(11) + F(11)$$
$$E = 3 + 3$$
$$\therefore E = 6$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21 Calcular m . n, sabiendo que el conjunto:

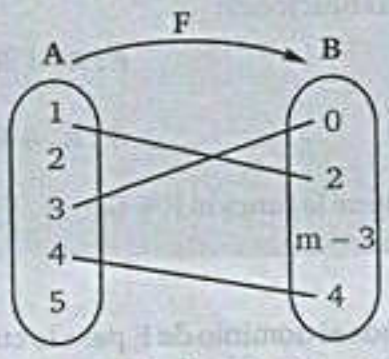
$$F = \{(2; 7), (7; -1), (m-1; 7), (n+2; -1), (m; n)\}$$

Representa a una función univalente.

Resolución: De acuerdo con la teoría F será una función inyectiva o univalente siempre que se verifique lo siguiente:

$$m-1=2 \ \wedge \ n+2=7$$
$$m=3 \ \wedge \ n=5$$
$$\therefore \ m.n=15$$

PROBLEMA 22 Si el diagrama sagital:



Corresponde a la representación de la función F suryectiva. Determine el producto de todos los valores que puede asumir m.

Resolución: Por ser una función suryectiva: Ran(F) = B

$$\{0; 2; 4\} = \{0; 2; m-3; 4\}$$

Ahora en la igualdad se cumple que:

$$m-3=0 \ \vee \ m-3=2 \ \vee \ m-3=4$$
$$m=3 \ \vee \ m=5 \ \vee \ m=7$$

Supongamos que P es el producto:

$$P = (3).(5).(7)$$
$$\therefore \ P = 105$$

PROBLEMA 23 A continuación se muestra una aplicación biyectiva.

$F: [a; b] \rightarrow [-2; 3] \mid y = F(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Calcular a + b

Resolución: De acuerdo con la teoría y = F(x) es biyectiva siempre que sea a la vez inyectiva y suryectiva.

Por ser suryectiva:

$$Ran(F) = [-2; 3]$$

team CALAPENSHKO

Ahora podemos plantear:

$$-2 \le \sqrt[3]{x+1} \le 3$$
$$-8 \le x+1 \le 27$$
$$-9 \le x \le 26$$

Por ser F una aplicación:

$$[a;b] = [-9;26]$$

De donde necesariamente:

$$a = -9 \ \wedge \ b = 26$$
$$\therefore \ a+b = 17$$

PROBLEMA 24 Sean las funciones:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = G(x) = \sqrt{x^2-1}$$

Determine la función F + G.

Resolución: Hallemos el dominio de F, para lo cual:

$$1-x^2 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ x^2-1 \le 0$$
$$(x+1)(x-1) \le 0 \ \Leftrightarrow \ -1 \le x \le 1$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$Dom(F) = [-1;1]$$

Hallemos el dominio de g, para lo cual:

$$x^2-1 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (x+1)(x-1) \ge 0$$
$$x \le -1 \ \Leftrightarrow \ x \ge 1$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$Dom(G) = (-\infty;-1] \cup [1;\infty)$$

Ahora Hallamos el dominio de F + G, recordemos que el dominio de F + G viene dado por la intersección de los dominios de F y G.

$$Dom(F+G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$
$$Dom(F+G) = \{-1;1\}$$

Finalmente hallamos la función F + G:

$$F+G = \{(-1;F(-1)+G(-1)), (1;F(1)+G(1))\}$$
$$F+G = \{(-1;0+0), (1;0+0)\}$$
$$\therefore \ F+G = \{(-1;0), (1;0)\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 25 Esbozar la gráfica de la función F o G, sabiendo que:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = x^2 + 1; \quad 5 \le x \le 30$$

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = G(x) = 2x + 1; \quad 1 \le x \le 9$$

Resolución:

I. Hallemos el dominio de la composición F o G:

$$Dom(F \circ G) = x \in Dom(G) \ \wedge \ G(x) \in Dom(F)$$
$$Dom(F \circ G) = 1 \le x \le 9 \ \wedge \ 5 \le 2x + 1 \le 30$$
$$Dom(F \circ G) = 1 \le x \le 9 \ \wedge \ 4 \le 2x \le 29$$
$$Dom(F \circ G) = 1 \le x \le 9 \ \wedge \ 2 \le x \le \frac{29}{2}$$

Fácilmente podemos observar que:

$$Dom(F \circ G) = [2; 9]$$

II. Hallemos la regla de correspondencia de la composición F o G.

$$F(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \quad F(G(x)) = G^2(x) - 1$$
$$F(G(x)) = (2x + 1)^2 - 1$$
$$F(G(x)) = 4x^2 + 4x$$

III. Hallemos el rango de la composición FoG, para lo cual consideramos al dominio.

$$y = (F \circ G)(x) = F(G(x)) = 4x^2 + 4x$$
$$y = (F \circ G)(x) = F(G(x)) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

Considerando al dominio, tenemos:

$$Dom(F \circ G) = [2;9]$$

Ahora formaremos al rango

$$2 \le x \le 9$$

Sumando $\frac{1}{2}$ a cada término:

$$2 + \frac{1}{2} \le x + \frac{1}{2} \le 9 + \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{2} \le x + \frac{1}{2} \le \frac{19}{2}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$\frac{25}{4} \le \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{361}{4}$$

Multiplicando por 4 obtenemos:

$$25 \le 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \le 361$$

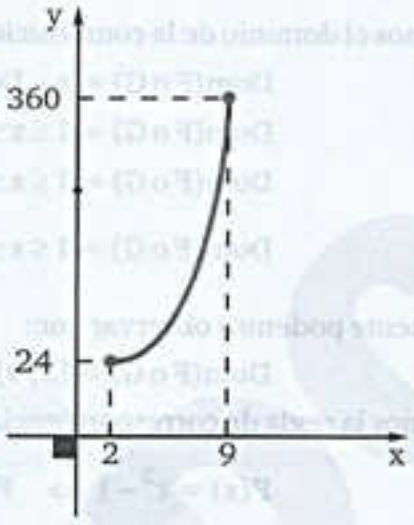
Finalmente restando 1 tenemos:

$$24 \le 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \le 360$$

$$24 \le y \le 360$$

$$\text{Ran}(F \circ G) = [24;360]$$

IV. La gráfica de la composición F o G es:



twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 26 Con respecto a la función:

$$y = F(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x \in \langle 0;1 \rangle \\ 1 \ ; & x \in [1;2\rangle \cup \langle 4;5\rangle \\ 2 \ ; & x = 2 \\ 3 \ ; & x \in \langle 2;3\rangle \end{cases}$$

podemos afirmar que

I. Es no creciente en $\langle 0;2]$

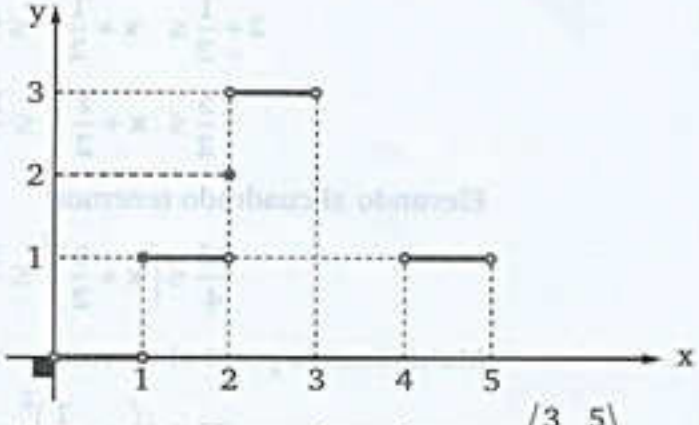
II. Es no creciente en $\langle 2;5\rangle$

III. Es no decreciente en $\langle 2;5\rangle$

IV. Es constante en $\langle 1;3\rangle$

V. Es no decreciente en $\left\langle \frac{3}{2};\frac{5}{2} \right\rangle$

Resolución: Graficando la función:



Fácilmente podemos observar que F es no decreciente en $\left\langle \frac{3}{2};\frac{5}{2} \right\rangle$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 27 Dadas las funciones:

$$F: y = F(x) = x^2 - 2x + 2;\ x \in [-3;3]$$
$$G: y = G(x) = x + 1\ ;\ x \in \langle 0;5\rangle.$$

Hallar $(F \circ G)^*$, si existe.

Resolución: Se puede observar que $y = F(x) = (x-1)^2 + 1$ no es inyectiva en su dominio $[-3;3]$, por tanto no podemos aplicar la propiedad $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.
Hallemos la función $F \circ G$ y analicemos si es inyectiva.

I. Dominio de $F \circ G$:

$$x \in Dom(G) \ \wedge\ G(x) \in Dom(F)$$
$$x \in \langle 0;5\rangle \ \wedge\ x+1 \in [-3;3]$$
$$0 < x < 5 \ \wedge\ -3 \le x+1 \le 3$$
$$0 < x < 5 \ \wedge\ -4 \le x \le 2$$

De donde tenemos: $0 < x \le 2 \ \Leftrightarrow\ x \in \langle 0;2]$

II. Hallemos la fórmula de $F \circ G$

$$y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

Como sabemos que:

$$F(x) = (x-1)^2 + 1$$
$$F(G(x)) = (G(x)-1)^2 + 1$$
$$F(G(x)) = (x+1-1)^2 + 1$$
$$F(x) = x^2 + 1$$

Fácilmente podemos verificar que $y = (F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(x) = x^2 + 1$ con dominio en $\langle 0;2]$ es inyectiva, por tanto admite inversa.

III. Cálculo de $(F \circ G)^*$: $F \circ G: y = x^2 + 1; x \in \langle 0;2]$

Hallemos el rango a partir de:

$$0 < x \le 2$$
$$0 < x^2 \le 4$$
$$1 < x^2 + 1 \le 5$$
$$1 < y \le 5 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 1;5]$$
$$(F \circ G)^*: \ x = y^2 + 1\ ;\ x \in \langle 1;5]$$
$$y^2 = x - 1$$
$$y = \sqrt{x-1}$$

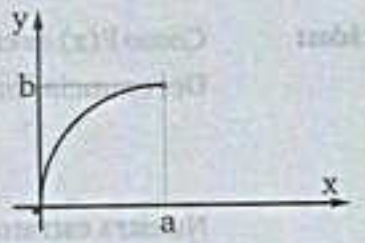
$$\therefore\ (F \circ G)^*: y = (F \circ G)^*(x) = \sqrt{x-1};\ x \in \langle 1;5]$$

PROBLEMA 28 El gráfico adjunto corresponde a: $(F \circ G)(x)$

Si $n \in \mathbb{N}^*$; $a \wedge b \in \mathbb{R}$; tal que:

$$F(x) = n \operatorname{sen} x;\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$$
$$G(x) = nx;\ x \in \langle -\pi;\pi\rangle$$

Determinar: $\operatorname{sen}(a \cdot b)$



Resolución: Debemos tener en cuenta que:

$$\text{Dom}(F \circ G) = x \in \text{Dom}(G) \wedge G(x) \in \text{Dom}(F)$$

En el problema:

$$\text{Dom}(F \circ G) = x \in \langle -\pi; \pi \rangle \wedge nx \in [0; \frac{\pi}{2}\rangle$$

Estos intervalos equivalen a:

$$\text{Dom}(F \circ G) = x \in \langle -\pi; \pi \rangle \wedge x \in [0; \frac{\pi}{2n}\rangle$$

Al intersectar los intervalos, se obtiene:

$$\text{Dom}(F \circ G) = x \in [0; \frac{\pi}{2n}\rangle \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

Observando el gráfico se establece que:

$$\text{Dom}(F \circ G) = [0, a\rangle \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

Luego de (I) y (II) se obtiene:

$$a = \frac{2\pi}{n} \ldots\ldots (*)$$

Teniendo en cuenta que:

$$F(x) = n \operatorname{sen} x \wedge G(x) = nx$$

Luego se puede encontrar:

$$(F \circ G)(x) = F[G(x)]$$

Esto significa que:

$$(F \circ G)(x) = n \operatorname{sen}(nx) \quad \ldots\ldots\ldots (III)$$

Pero observando el gráfico:

$$(F \circ G)(a) = b \quad \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Sustituyendo x por a en (III) para luego igualar con (IV), tendremos:

$$n \operatorname{sen}(na) = b \ldots\ldots (**)$$

Reemplazando (*) en (**); se tiene:

$$n\left(\operatorname{sen} n . \frac{\pi}{2n}\right) = b$$

Efectuando, tendremos:

$$n\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = b \Rightarrow b = n$$

Finalmente se observa que:

$$\operatorname{sen}(a.b) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}.n\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \operatorname{sen}(a.b) = 1$$

PROBLEMA 29 Sea F una función creciente definida por: $F(x) = ax + b$, tal que:

$$F([1;2]) = [107; 901].$$

Calcular: $a - b$

Resolución: Como F(x) es creciente, entonces el coeficiente: $a > 0$

Del enunciado; podemos reconocer que:

I) $x \in [1; 2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

II) $(ax + b) \in [107; 901] \Rightarrow 107 \leq ax + b \leq 901 \ldots\ldots (*)$

Nuestra estrategia consistirá en formar el intervalo de x a partir de la relación (II), a continuación se compararán los extremos obtenidos con los extremos de (I).

team CALAPENSHKO

De (*), sumamos – b a cada miembro:

$$107 - b \le ax \le 901 - b$$

Dividiendo por a a cada miembro:

$$\frac{107-b}{a} \le x \le \frac{901-b}{a}$$

Comparando este resultado con (I) se puede establecer que:

$$\text{extremo inferior: } \frac{107-b}{a} = 1 \Rightarrow a + b = 107 \quad .....(\alpha)$$

$$\text{extremo superior: } \frac{901-b}{a} = 2 \Rightarrow 2a + b = 901 \quad ....(\beta)$$

Resolviendo (α) y (β); encontramos que:

$$a = 794 \qquad \wedge \qquad b = -687$$

Finalmente el valor pedido será:

$$\therefore\ a - b = 1481$$

PROBLEMA 30 Dada la función:

$$F(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}\ ;\ x \in [0;2],$$

bosquejar la gráfica de la función inversa: F^{-1}

Resolución: Por dato del problema:

$$\text{Dom}(F) = x \in [0;2]$$

Redefiniendo la función:

I) Si: $x \in [0;1\rangle \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

En consecuencia la regla de correspondencia para éste intervalo será:

$F(x) = \sqrt{x}$

II) Si: $x \in [1;2\rangle \Rightarrow 1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

En consecuencia la regla de correspondencia para este intervalo será:

$F(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

III) Si: $x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow F(x) = 2$

Es decir la función F se podrá expresar del siguiente modo:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;\ 0 \le x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & ;\ 1 \le x < 2 \\ 2 & ;\ x = 2 \end{cases}$$

y su gráfica será como lo indica la figura 1, siendo la gráfica de su inversa la indicada en la figura 2.

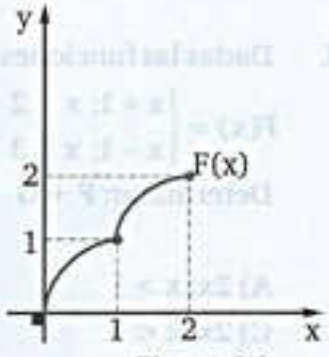


Figura (1)

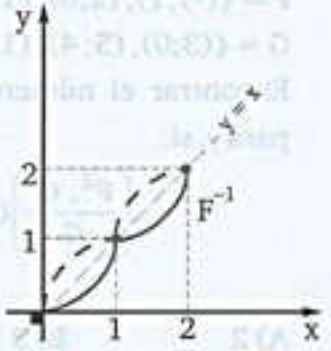


Figura (2)

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si:

$$F=\{(0;\sqrt{2}),(1;\sqrt{2}),(3;3\sqrt{2})\}$$

$$G=\{(0;\sqrt{2}),(\sqrt{2};1),(4;3)\}$$

Calcular: $(F+G)(0)$

A) 1 B) 2 C) $3\sqrt{2}$
D) $-4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

2. Sean las funciones:

$F = \{(2; 5), (3; 4), (9; 5), (6; 8), (1; 7)\}$
$G = \{(3; 4), (2; 3), (5; 2), (1; 7), (8; 1)\}$
Hallar "F + G"

A) $\{(2; 8), (5; 2), (1; 14)\}$
B) $\{(2; 8), (3; 8), (1; 14)\}$
C) $\{(2; 8), (3; 8), (1; 7)\}$
D) $\{(2; 8), (1; 8), (9; 5)\}$
E) $\{(2; 8), (1; 14), (3; 7)\}$

3. Dadas las funciones F y G, tales que:

$$F(x)=\begin{cases}x+1; x<2\\ x-1; x>3\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases}x-1; x<1\\ x+1; x>4\end{cases}$$

Determinar: F + G

A) $2x; x > 1$ B) $2x; x > 4$
C) $2x; x < 1$
D) $2x; x < 1 \vee x > 4$ E) $2x; x < 4$

4. Sean:

$F = \{(-1;1), (2;0), (1;-1), (5;-1), (3;1)\}$
$G = \{(3;0), (5; 4), (1; 0), (-1;2)\}$
Encontrar el número de valores distintos para γ, si:

$$\left(\frac{F^2 . G}{G}\right)(\alpha)=\gamma$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

5. Si:

$$H(x)=\begin{cases}x^2-4 & ; x\le -2\\ 2-|x| & ; -2<x<2\\ \sqrt{x-2} & ; x\ge 2\end{cases}$$

Indicar lo correcto:

A) Es creciente en: $\langle -\infty; -2\rangle$
B) Es creciente en: $\langle -2; 2\rangle$
C) Es decreciente en: $\langle -2; 2\rangle$
D) Es decreciente en: $\langle 0; \infty\rangle$
E) Es continua en su dominio

6. Dadas las funciones F y G, tales que:

$$F(x)=4x-x^2;\ x\in[0;7]$$

$$G(x)=\begin{cases}x^2-48; x\le 0\\ x+2; x>2\end{cases}$$

Si el rango de F + G es: $[a; b]\cup\{c\}$

Calcular el valor que asume:

$$a + 4b + c$$

A) -21 B) -24 C) -27
D) -31 E) -35

7. Dadas las funciones:

$F=\{(-3;4),(-2;0),(2;0),(3;2),(4;6),(7;5)\}$

$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=G(x)=3x+5, x\in\langle -8; 4\rangle\}$

Determinar: F . G

A) $\{(-3; 0), (-2; -1), (2; 11), (3; 16)\}$
B) $\{(-3; 8), (-2; 1), (2; 11), (3; 12)\}$
C) $\{(-3; -16), (-2; 0), (2; 0), (3; 28)\}$
D) $\{(-3; 4), (-4; 3), (8; 4), (2; 5)\}$
E) $\{(3; 0), (2; 1), (4; 4), (2; 5)\}$

team CALAPENSHKO

8. Sea "F" la función:

$$F(x) \equiv 2x^2 - 4x + 1 \; ; \; \forall\, x \in \langle 0; 2]$$

y "G" es otra función, definida así:

$$G(x) \equiv \sqrt{4x + \frac{1}{2x^2}} \; ; \; \forall\, x \in \left\langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

Entonces el rango de $F + G^2$ es:

A) $[3; \infty\rangle$ B) $\langle 1; \infty\rangle$ C) $[1; \infty\rangle$
D) $\langle 3; \infty\rangle$ E) 3

9. Sean las funciones definidas por:

$$F(x) = |x - 3| + |x - 1|$$

$$G(x) = \begin{cases} 3x - 1; & x < 1 \\ 2 - x; & x \geq 1 \end{cases}$$

Si definimos la función:

$$H : \langle -1; 3\rangle \rightarrow R/H(x) = F(x) + G(x)$$

Hallar el rango de H.

A) $\langle 3; 5]$ B) $[0; 6\rangle$ C) $[3; 5\rangle$
D) $\langle 1; 4\rangle$ E) $\langle 1; 5\rangle$

10. La función F, definida con un intervalo [a; b] ha sido obtenida (por cambio de escala) de la función F, definida en el intervalo [0; 1], de manera que:

$$F(a) = F(0) \text{ y } F(b) = F(-1)$$

Entonces, la ecuación de F es:

A) $F(x) = aF(x) + b$

B) $F(x) = F\left(\frac{x - a}{b - x}\right)$

C) $F(x) = F\left(x - \frac{a}{b}\right)$

D) $F(x) = F\left(\frac{x - a}{b - a}\right)$

E) $F(x) = \frac{F(x) - a}{b - a}$

11. Sean F, G dos funciones definidas en Q por:

$$F(x) \equiv ax - 1; \; G(x) \equiv 3x + b$$

Tales que:

$$F(1) = G(-1) \; ; \; F(-1) = G(1)$$

Entonces: F(2) + G(3) es igual a:

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

12. Dadas las funciones:

$$F(x) = 2\sqrt{x} \; ; \; x \in [0; \infty[$$

$$G = \{(-3;6);(-2;1);(0;2);(1;5);(2;3);(4;-2)\}$$

Determine la función: F . G

A) $\{(0; 0); (1; 10); (2; 6\sqrt{2}); (4; -8)\}$
B) $\{(0; 2); (1; 7); (2; 3\sqrt{2}); (4; 6)\}$
C) $\{(0; 0); (1; 7); (2; 6\sqrt{2}); (4; -8)\}$
D) $\{(0; 2); (1; 10); (2; 2\sqrt{2}); (4; -6)\}$
E) $\{(9; 1); (1; 6); (3; 2\sqrt{2}); (4; 1)\}$

13. Dadas las funciones numéricas:

$$F = \{(3; 1); (4; 2); (7; 3); (0; 6); (1; 4)\}$$
$$G = \{(1; 3); (2; 5); (3; 0); (8; 4); (7; 1)\}$$

Determinar la función (F + G)

A) $\{(1; 7); (3; 4); (0; 3)\}$
B) $\{(4; 7); (2; 4); (0; 4)\}$
C) $\{(1; 7); (3; 1); (7; 4)\}$
D) $\{(4; 7); (2; 1); (0; 7)\}$
E) $\{(3; 1); (2; 7); (4; 1)\}$

14. A partir de las funciones:

$$F = \{(1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 5); (7; -1)\}$$
$$G = \{(0; 2); (1; 2); (2; -1); (3; 0); (5; 2)\}$$

Determinar: $F^2 + 2G$

A) $\{(1; 20); (2; 5); (3; 4)\}$
B) $\{(1; 20); (2; 7); (3; 4)\}$
C) $\{(1; 20); (2; 5); (3; 2)\}$
D) $\{(1; 20); (2; 7); (3; 2)\}$
E) $\{(1; 9); (2; 6); (3; 11)\}$

15. Sea la función definida por:

$$F(x) = \sqrt{x-3}$$

y la función: $G = \{(-3;0);(4;2);(5;1);(7;0)\}$

Además:

$$\frac{F}{G^2} = \{(4;a);(5;b)\}$$

Calcular:

$$b^{a^{-1}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Dada la función:

$$F = \{(1;3);(2;3);(0;0);(-1;0)\}$$

Marcar Verdadero (V) o Falso (F)

( ) $3F = F^2$

( ) $F - F = \{(0;0)\}$

( ) $\frac{F^2}{F} = F$

A) FVV B) VVV C) VFF
D) FVF E) FFF

17. Consideremos las funciones:

$G = \{(-1;0);(2;3);(4;1);(-3;2);(0;0);$
$;(6;1)\}$

$F = \{(0;5);(1;-1);(2;3);(-1;7);(7;0)\}$

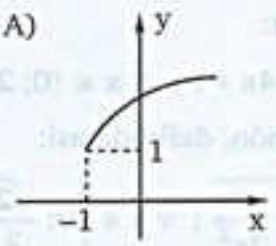
Luego el producto de los elementos del rango de $F \circ G$ es:

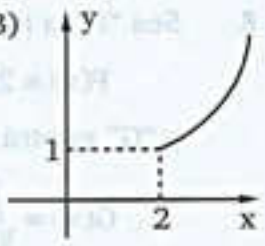
A) –5 B) 0 C) –105
D) 15 E) –15

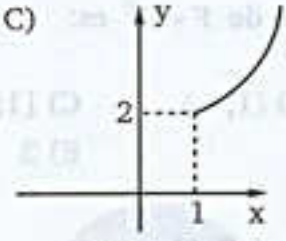
18. Sea la función:

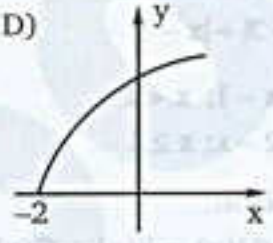
$$F(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

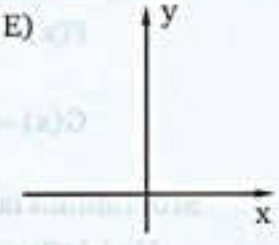
bosquejar la gráfica de la inversa de dicha función:

A)


B)


C)


D)


E)


19. Sea la función "F" indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones; si:

$$F(x) = x^3 - x^2$$

( ) Es creciente en $]0;1[$

( ) Es estrictamente decreciente en $]-\infty;0]$

( ) Es estrictamente creciente en $]2/3;\infty[$

A) FFV B) FFF C) VFF
D) FVF E) VFV

20. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 6-x & ; x \in [-2;0\rangle \\ 2+x & ; x \in [0;4\rangle \end{cases}$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. F es univalente

II. F es decreciente en $\langle -2;1\rangle$

III. $F^*(7) = 3$

A) FFV B) VFV C) VFF
D) VVF E) VVV

team CALAPENSHKO

21. Determinar el valor de verdad de las proposiciones:

( ) $F(x) = x^2$; $x \in [-1; 1]$; F es una función par.

( ) $F(x) = (x-1)^2$; $x \in [-2; 2]$; F es una función creciente.

( ) $F(x) = |x-1| + |x-2|$; $x \in [1; 2]$ es una función constante.

A) VVV B) FVV C) FFF
D) VFV E) VFF

22. Dado: $F : [a; 10] \to [-20; b]$ donde:

$$F(x) = x^2 - 4x - 32$$

Determinar "a + b" para que F sea biyectiva

A) 30 B) 26 C) 34
D) 42 E) 12

23. Considere la aplicación biyectiva:

$$F : [5; b] \to [a; 72]$$

Cuya regla es:

$$F(x) = x^2 - 8x + 7$$

Determine (a + b)

A) 9 B) 8 C) 5
D) 14 E) 11

24. Si:

$$F(x) = 4\sqrt{x} - x \; ; \; x \in [0; 1]$$

Determine F*

A) $F^*(x) = (2 - \sqrt{4-x})^2 \; ; \; x \in [0; 3]$

B) $F^*(x) = (2 + \sqrt{4-x})^2 \; ; \; x \in [0; 3]$

C) $F^*(x) = \sqrt{(1+x)^2} + 1 \; ; \; x \in [0; 1]$

D) $F^*(x) = \sqrt{(x+1)/x} - 1 \; ; \; x \in [0; 3]$

E) $F^*(x) = \sqrt{1-x} - 1 \; ; \; x \in [0; 2]$

25. Obtener la inversa de "f" en caso existe siendo:

$$f(x)\begin{cases} x^2+1 \; ; \; x \le 0 \\ -x+1 \; ; \; x > 0 \end{cases}$$

A) $f^*(x) = \begin{cases} x-1 & ; \; x < 1 \\ \sqrt{x-1} & ; \; x \ge 1 \end{cases}$

B) $f^*(x) = \begin{cases} -x+1 & ; \; x < 1 \\ -\sqrt{x-1} & ; \; x \ge 1 \end{cases}$

C) $f^*(x) = \begin{cases} x+1 & ; \; x < 1 \\ -\sqrt{x-1} & ; \; x \ge 1 \end{cases}$

D) $f^*(x) = \begin{cases} x+1 & ; \; x < 1 \\ \sqrt{x-1} & ; \; x \ge 1 \end{cases}$

E) No presenta inversa

26. Indicar si las funciones son par; impar o ninguna con sus respectivas iniciales si:

( ) $F(x) = 3x^2 - 2x^4$

( ) $G(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

( ) $H(x) = x^2 + x$

A) PPN B) PIN C) PNI
D) NPI E) IPN

27. Determinar todas las funciones lineales F, tales que:

$$(F \circ F)_{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{4-x}{x} \; ; \; x \neq 0$$

Indicar una de ellas

A) $F(x) = 2x + 2$ B) $F(x) = 1 - x$
C) $F(x) = 1 + x$
D) $F(x) = x$ E) $F(x) = 2x + \dfrac{1}{3}$

28. Dadas las funciones:

$$F(x) = \frac{1}{2x+7}\ ;\ x \in [-3; 6]$$

$$G(x) = x^2 - 4x - 8;\ x \in\ ]6; 12]$$

Determinar: $D(F \circ G)$

A) $]6; 2+5\sqrt{2}]$

B) $]6; 2-5\sqrt{2}]$

C) $]6; 2+3\sqrt{2}]$

D) $]-2-3\sqrt{2}; 2+3\sqrt{2}]$

E) $]6; 2-3\sqrt{2}]$

29. Dadas las funciones:

$$F(x) = 4|x| - x^2;\ -8 < x < 1$$

$$G(x) = \sqrt{1-x}\ \ ;\ -4 < x < 0$$

Indicar el rango de $G \circ F$

A) $[1; \sqrt{3}[$ B) $]1; \sqrt{5}[$ C) $[1; \sqrt{7}[$

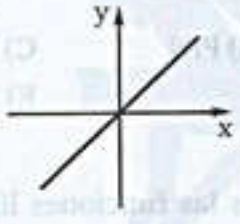
D) $]1; \sqrt{3}]$ E) $[2; \sqrt{7}[$

30. Indicar la gráfica aproximada de $F \circ G$ a partir de:

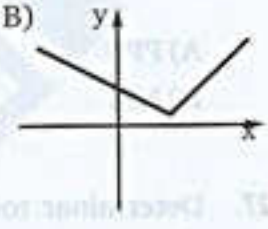
$$F = \{(x-3; \sqrt{x-3})/\ x \geq 3\}$$

$$G = \{(1-x; x^2-2x+1)/ x \in \mathbb{R}\}$$

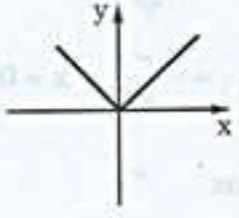
A)



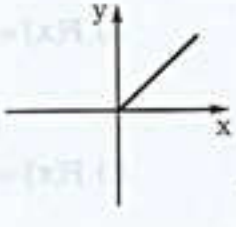
B)



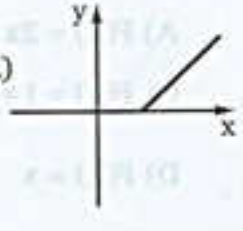
C)



D)



E)



31. Para:

$$F(x) = \sqrt{1-x} \quad y \quad G(x) = \sqrt{-x^2+4}$$

Determine $G \circ F$. Indicar su dominio.

A) $[-3; 1]$ B) $[-3; 1[$ C) $]-3; 1]$

D) $[-3; 1[$ E) $]-\infty; 1]$

32. Dada la función sobreyectiva:

$$F: A \rightarrow B / F(x) = \frac{x^2-16}{(x+4)(x+5)}$$

Determinar el número de elementos de $(A-B)$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

33. Determine el conjunto B de manera que:

$$F:]-1; 0[\rightarrow B / F(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Sea suryectiva

A) $]-1; -1/2[$ B) $[-1; -1/2[$

C) $[-1; -1/2]$

D) $[-1; -1/4[$ E) $]-1; -1/4]$

34. Determinar $(F + G)$ donde:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\ ;\ x \in \mathbb{Q} \\ -x^2\ ;\ x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$$

$$G = \{(\sqrt{2}; 4); (7; 0); (3; 8)\}$$

Dar como respuesta la suma de los elementos del rango de $(F + G)$

A) 64 B) 68 C) 70

D) 72 E) 76

35. Sean las funciones:

I. $F(x) = 3x^4 - 2x^2$

II. $G(x) = |x^3 + 2x|\ ;\ x \in \langle -3; 3 \rangle$

III. $H(x) = x^5$

IV. $I(x) = x^3 - x$

¿Cuántas son funciones pares?

A) 1 B) 2 C) 3

D) Ninguna E) 4

team CALAPENSHKO

36. Se definen las siguientes funciones:

$$\text{Sgn}(x)=\begin{cases}1\ ;\ \text{si}\ x>0\\0\ ;\ \text{si}\ x=0\ ;\ y\\-1\ ;\ \text{si}\ x<0\end{cases}$$

$$F(x)=\sqrt{|x|+2-x^2}\ .\ \text{Sgn}\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$$

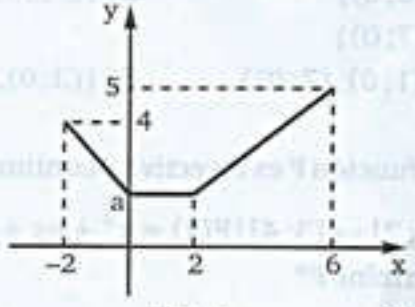
Entonces, el Dom(F), es:

A) $\langle-\infty;-2\rangle-\{-3\}$ B) $\langle 2;\infty\rangle$
C) $\langle-\infty;-3\rangle\cup\langle 3;\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;2]$ E) $[-2;2]$

37. Dada la gráfica de la función F se sabe que:

$$F(3)-F(1)=1$$

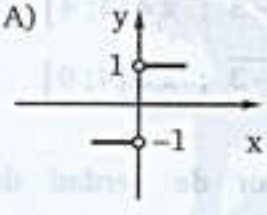
Determine el valor de: $F(4)-2F(-1)+F(\sqrt{3})$

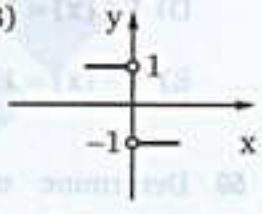


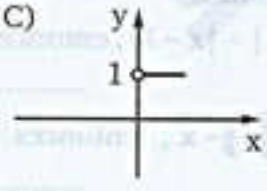
A) 1 B) −1 C) 9
D) 8 E) −9

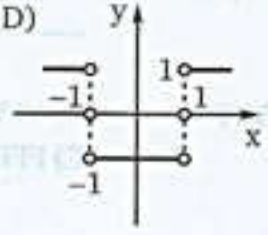
38. Indicar la gráfica de:

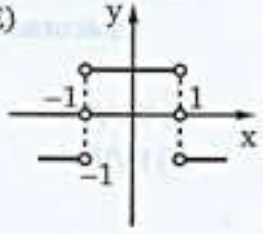
$$F(x)=\text{Sgn}\,(x^2-1)$$

A)


B)


C)


D)


E)


39. Dado:

$$F(x)=(|x-31|-30+x)\ .\ \sqrt{31-x}$$

Determinar si existe F*

A) $31-x^2$ B) $30+x^2$ C) $29-x^2$
D) $28-x^2$ E) $31+x^2$

40. Si:

$$F(x)=2x-5\ \wedge\ G(x)=3(x+1)-1$$

Son dos funciones reales de variable real, además $H=F^*\circ G$ de modo que existe un valor t, tal que:

$$H(t)=H\left(\frac{t+4}{2}\right)$$

Determine "t"

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 12

41. Hallar la función inversa de la función definida por:

$$F(x)=-\sqrt{x^2+6x-7}\ ;\ x\in\ ]-\infty;7]$$

A) $-3-\sqrt{16+x^2}\ ;\ x\in]-\infty;0]$
B) $-3+\sqrt{16+x^2}\ ;\ x\in]-\infty;0[$
C) $-3-\sqrt{16+x^2}\ ;\ x\in]-\infty;0[$
D) $-3+\sqrt{16+x^2}\ ;\ x\in]-\infty;0]$
E) $\sqrt{16+x^2}\ ;\ x\in]-\infty;0[$

42. Determine el domino de $(F\circ G)$, si:

$$F(x)=\sqrt{x^2-4}\ ;\ x\in[2;8]$$

$$G(x)=\frac{1}{x+2}\ ;\ x\in[-2;4]$$

A) $\left[-\frac{15}{8};-\frac{3}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{15}{4};1\right\rangle$ C) $\left[-\frac{15}{4};\frac{3}{2}\right]$
D) $[-2;4]$ E) $\left[-\frac{15}{8};1\right]$

team CALAPENSHKO

43. Sean: $f(x) = x^2 + 2$

$g(x) = x + p$

Hallar "p", si:

$f(g(p+3)) = g(f(p-3))$

A) 0 B) 5/3

C) −17/3

D) 10/3 E) Hay 2 correctas

44. Si se sabe que:

$F(2+x) = F(2-x)$

$F(4+x) = F(4-x)$

Siendo F periódica, indicar su período.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

45. Sean: $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax + 1$ dos funciones con dominio x apropiado para que sean biyectivas. Si:

$$(f^* \circ g^*)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Determine: $(g \circ f)(-2)$

A) 3 B) 18 C) 9

D) 27 E) 1

46. Si F es una función real de variable real que verifica las condiciones:

I. $F(x) > 0$

II. $F(x-y) = \dfrac{1}{F(x)} - F(y)$

Calcular: F(2010)

A) 1 B) 0 C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

47. Dada la función:

$y = F(x) = ax + b \;;\; x \in [-3; 3], a > \dfrac{1}{2}$

Si: $H(x) = F(x) + F^*(x) = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

Calcular a + b

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

48. Dada la función:

$F = \{(1; 0), (2; 5), (3; 6), (7; 7)\}$

Halle la función: $(F \circ F^*) - (F^* \circ F)$

A) {(0; 0)} B) {(7; 7)}

C) {(7; 0)}

D) {(1; 0), (7; 0)} E) {(3; 0), (0; 0)}

49. Si la función F es biyectiva y continua:

$F: [1; 2] \to [3; 4] \,|\, F(x) = x^2 + ax + b$

Determine F^*

A) $F^*(x) = 1 + \sqrt{x+3} \;;\; x \in [1; 2]$

B) $F^*(x) = 1 - \sqrt{x-3} \;;\; x \in [3; 4]$

C) $F^*(x) = 1 - \sqrt{x+3} \;;\; x \in [1; 4]$

D) $F^*(x) = 1 + \sqrt{x-3} \;;\; x \in [3; 4]$

E) $F^*(x) = 1 + \sqrt{x-3} \;;\; x \in [4; 9]$

50. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $F(x) = |x+1| - |x-1|$, entonces F es acotada. .....( )

II. Si $F(x) = x\sqrt{[\![x]\!] - x}$, entonces F es acotada. .....( )

III. Si F es inversible y acotada, entonces F^* es acotada. .....( )

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FVV E) FFF

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

Capítulo 16

Funciones III

CAPACIDADES:

- Reconocer funciones polinomiales y clasificar sus raíces.
- Transformar raíces de funciones polinomiales.
- Reconocer y aplicar los diversos teoremas en funciones polinomiales.

$$\exists\, x \in \langle a; b\rangle | F(x) = 0 \Leftrightarrow F(a).F(b) < 0$$

BERNARD BOLZANO

BERNARD BOLZANO (Praga, 1781 – 1848) fue un matemático que se le conoce por el teorema de Bolzano, así como por el teorema de Bolzano-Weierstrass, que esbozó como lema de otro trabajo en 1817, y décadas después habría de desarrollar Karl Weierstrass

En 1796 Bolzano se inscribió en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Praga. Consiguió el doctorado en 1804, tras haber redactado una tesis en la que expresaba su opinión sobre las Matemáticas y sobre las características de una correcta demostración matemática. En el prólogo escribió: "No podría sentirme satisfecho por una demostración estrictamente rigurosa, si ésta no derivase de los conceptos contenidos en la tesis que debe demostrarse."

Bolzano escribió en 1810 Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung, la primera de una serie programada de escritos sobre fundamentos de las matemáticas. En la segunda parte encontramos Der binomische Lehrsatzl... de 1816 y Rein analytischer Beweis... (Pura demostración matemática) de 1817, que contienen un intento de imposición del cálculo infinitesimal que no recurre al concepto de infinitesimal. En el prólogo del primero de ambos declara que su trabajo es un ejemplo del nuevo modo de desarrollar el análisis. En este trabajo hay que situar la demostración del teorema del valor intermedio con la nueva aproximación de Bolzano, y la que también fue llamada serie de Cauchy. Este concepto aparece en un trabajo de Cauchy, aparecido cuatro años después, aunque resulta poco probable que el matemático francés conociera los trabajos de Bolzano.

Entre 1830 y 1840, Bolzano trabajó en una obra mayor, Grössenlehre en la que tratará de reinterpretar toda la matemática bajo bases lógicas. Sólo llegó a publicar una parte, esperando que sus alumnos prosiguieran su obra y publicaran una versión completa. En 1854, tres años después de su muerte, un alumno suyo publicó la obra de Bolzano Paradoxien des Unendlichen, un estudio sobre las paradojas del infinito. Aparece por primera vez el término "conjunto", en la forma alemana Menge.

team CALAPENSHKO

FUNCIONES POLINOMIALES EN $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN

Una función polinomial es una expresión algebraica racional entera, cuya forma general es:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n \quad ; \; n \in N$$

Donde:

x = Variable o Indeterminada.

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ y a_n son los coeficientes, todos ellos son números reales.

a_0x^n es el término dominante siempre que $a_0 \neq 0$.

a_0 = Coeficiente principal.

a_n = Término independiente de x, es un número real, también se le llama término constante.

OBSERVACIÓN

Las funciones constante, lineal y cuadrática que se obtienen cuando $n = 0$; $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente son casos particulares de una función polinomial, cabe recordar que estas funciones fueron vistas en el capítulo 14.

CERO DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

También llamada **raíz**. Sea $y = F(x)$ una función polinomial no constante, es decir $[F]^\circ \geq 1$, un cero de la función es el valor que asume su variable de modo que la función se anule.

Matemáticamente:

$$\text{Si: } F(x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0 \text{ es un cero de } F(x)$$

TEOREMA

Si $x = x_0$ es un cero de $F(x)$, entonces un factor de $F(x)$ será el binomio $(x - x_0)$.

Ejemplo: Dado el polinomio $F(x) = x^5 - 2x + 1$ fácilmente podemos notar que $F(1) = 0$, luego afirmamos que $x = 1$ es un cero de $F(x)$ y por tanto $(x - 1)$ es un factor de $F(x)$.

OBSERVACIÓN

El cero o raíz de una función polinomial $F(x)$ de grado mayor o igual que dos, puede ser simple o múltiple:

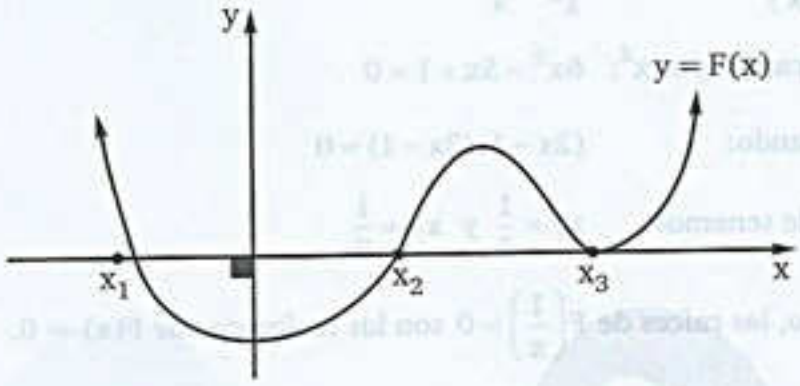
1) Es simple si $x = x_0$ sólo determina al factor $(x - x_0)$, es decir $(x - x_0)$ no se repite en $F(x)$.

2) Es múltiple si $x = x_0$ determina al factor $(x - x_0)^m$, con $m \in N \mid m \geq 2$ es decir $(x - x_0)$ se repite "m" veces en $F(x)$. Aquí se dice que $x = x_0$ es un cero de multiplicidad "m".

team CALAPENSHKO

PROPIEDADES

Sea $y = F(x)$ una función polinomial de grado no menor que tres ($[F]^\circ \geq 3$) cuya gráfica aproximadamente es:



1) Cada punto que corresponde a la gráfica de la función, de modo que la gráfica de $y = F(x)$ cruza al eje x, indica la presencia de una raíz simple o de multiplicidad impar.
De la gráfica: x_1 y x_2 pueden ser raíces simples o raíces de multiplicidad impar de la función $y=F(x)$.

2) Cada punto que corresponde a la gráfica de la función, de modo que la gráfica de la función $y = F(x)$ es tangente al eje x, indica la presencia de una raíz de multiplicidad par.
De la gráfica: x_3 es una raíz de multiplicidad par de la función $y = F(x)$.

TEOREMAS DE TRANSFORMACIÓN DE RAÍCES

Sea $y = F(x)$ una función polinomial de grado no menor que dos, luego para la ecuación $F(x) = 0$ tenemos:

1) $F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ es la ecuación que tiene por raíces a las recíprocas de las raíces de $F(x) = 0$.

2) $F(x + h) = 0$, con $h \in \mathbb{Z}^+$, es la ecuación que tiene como raíces a las raíces de $F(x) = 0$ disminuidas en "h".

3) $F(x-h) = 0$, con $h \in \mathbb{Z}^+$, es la ecuación que tiene como raíces a las raíces de $F(x) = 0$ aumentadas en "h".

4) $F(k.x)=0$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, es la ecuación que tiene como raíces a las raíces de $F(x)=0$ divididas por "k".

5) $F\left(\frac{x}{k}\right) = 0$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, es la ecuación que tiene como raíces a las raíces de $F(x)=0$ multiplicadas por "k".

Ejemplo: Para la ecuación $F(x) \equiv x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Ahora en $F(x)$ cambiaremos x por $\frac{1}{x}$:

team CALAPENSHKO

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+6=\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+6$$

Con $F\left(\frac{1}{x}\right)=0$: $\quad \frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+6=0$

Multiplicamos por x^2: $\quad 6x^2-5x+1=0$

Factorizando: $\quad (2x-1)(3x-1)=0$

De donde tenemos: $\quad x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{1}{3}$

En efecto, las raíces de $F\left(\frac{1}{x}\right)=0$ son las recíprocas de $F(x)=0$.

TEOREMAS ADICIONALES

I. TEOREMA DE DESCARTES:

Frecuentemente llamado Regla de los signos de Descartes, está referido a la cantidad de raíces positivas o negativas que puede tener una función polinomial $F(x)$ de grado $n \geq 2$ con coeficientes reales:

I.1) El número de raíces positivas de la ecuación $F(x)=0$, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de $F(x)$, o es menor que esta cantidad en un número par.

I.2) El número de raíces negativas de la ecuación $F(x)=0$, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de $F(-x)$, o es menor que esta cantidad en un número par.

OBSERVACIÓN

Llamaremos variación de signos de los coeficientes de un polinomio ordenado en forma decreciente al paso de un coeficiente positivo, a un coeficiente negativo o viceversa.

Ejemplo: Para la función $F(x)=x^6+x^3-4x^2+7$

Variación de signos para $F(x)$:

$$F(x)=x^6+\underset{\frown}{x^3}\underset{\frown}{-4x^2}+7$$

Observa que existen dos variaciones, luego $F(x)=0$ puede tener dos raíces positivas o ninguna $(2-2=0)$.

Variación de signos para $F(-x)$:

$$F(-x)=(-x)^6+(-x)^3-4(-x)^2+7$$

$$F(-x)=\underset{\frown}{x^6}\underset{\frown}{-x^3}-4x^2+7$$

Observa que existen dos variaciones, luego $F(x)=0$ puede tener dos raíces negativas o ninguna $(2-2=0)$.

Finalmente considerando que:

r^+ = Número de raíces positivas.

r^- = Número de raíces negativas.

Im = Número de raíces imaginarias

Podemos construir un cuadro de posibilidades lógicas para las raíces de la ecuación, veamos:

r^+	r^-	Im
2	2	0
0	0	4

Ejemplo: Para la función $P(x) \equiv x^5 + x + 2$

Variación de signos de P(x):

$$P(x) \equiv x^5 + x + 2$$

Observa que no existe variación de signos, luego podemos asegurar que no existe raíz real positiva.

Variación de signos de P(−x):

$$P(-x) \equiv -x^5 - x + 2$$

Observa que existe sólo una variación de signos, luego podemos asegurar que P(x) tiene sólo una raíz negativa.

II. TEOREMA DE GAUSS:

Sea F(x) una función polinomial de grado $n \geq 2$, con coeficientes enteros y término independiente distinto de cero.

$$F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Si x_0 es una raíz racional de $F(x) = 0$, esta será de la forma: $x_0 = \frac{p}{q}$, donde p y q son primos entre si, de modo que **p** es un divisor del término independiente de x en F(x) y **q** es divisor del coeficiente principal de F(x).

Ejemplo: ¿Cuántas raíces racionales tiene el polinomio $P(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 2x + 1$?

De acuerdo con el teorema de existir una raíz racional esta será de la forma $x = \frac{p}{q}$, donde p es un divisor de 1 y q es un divisor de 2.

Ahora las posibles raíces racionales serán: ± 1 y $\pm\frac{1}{2}$, dando uso de la regla de Ruffini notamos que la única raíz racional es $x = 1$, veamos:

team CALAPENSHKO

	2	0	−1	−2	1
1	↓	2	2	1	−1
	2	2	1	−1	0

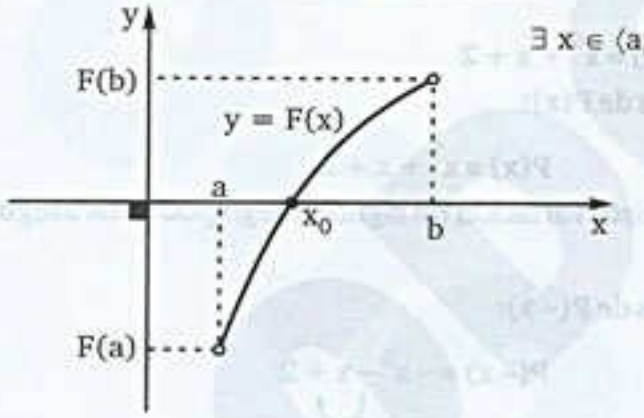
∴ P(x) tiene sólo una raíz racional

II. TEOREMA DE BOLZANO:

Consideremos una función polinomial F(x) de grado $n \geq 2$ y de coeficientes reales. Si tenemos $F(a).F(b) < 0$, entonces existe al menos una raíz real de F(x)que pertenece al intervalo ⟨a; b⟩ o en general un número impar de raíces.

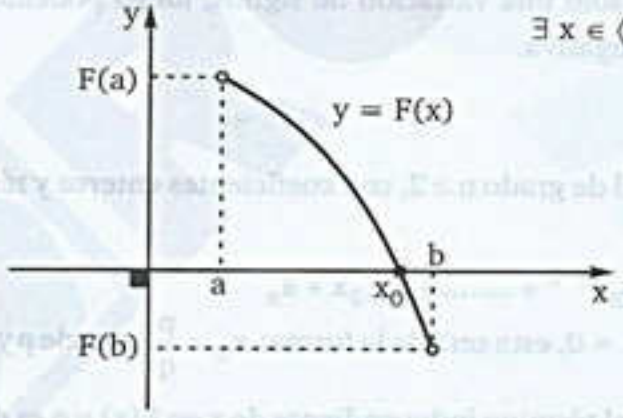
Gráficamente:

Figura (1)



$\exists\, x \in \langle a; b\rangle | F(x) = 0$

Figura (2)



$\exists\, x \in \langle a; b\rangle | F(x) = 0$

Ejemplo: Para $F(x) \equiv x^3 + 2x - 4$ se observa que $F(1) = -1$ y $F(2) = 8$, por lo que $F(1).F(2) < 0$, luego por el teorema de Bolzano podemos decir que existe al menos una raíz real x_0 que pertenece al intervalo ⟨1; 2⟩, es decir: $1 < x_0 < 2$

OBSERVACIÓN

El valor $x_0 \in \langle a; b\rangle$ que interseca al eje x es un cero o raíz del polinomio F(x), en la práctica debemos buscar dos números reales a y b muy cercanos de modo que F(a) y F(b) sean de signos contrarios.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Marca con un aspa el recuadro que corresponde a una función polinomial.

A) $P(x) \equiv x^5 - x^2 - 4x - 1$ ..... ☐

B) $F(x) \equiv x^x - x + 4$ ..... ☐

C) $M(x) \equiv x^3 + x + 10$ ..... ☐

D) $N(x) \equiv \dfrac{x^2}{x} - x + 4$ ..... ☐

E) $R(x) \equiv \sqrt{x^2} + 4x - 1$ ..... ☐

2. Marca verdadero (V) o falso (F) según corresponda en cada caso:

I. Toda función polinomial es continua ..... ( )

II. Toda función polinomial es monótona ..... ( )

III. Existen funciones polinomiales que no son continuas ..... ( )

3. Determine los ceros reales de cada polinomio

A) $P(x) \equiv x^2 - 4$

B) $F(x) \equiv x^3 + x - 2$

C) $G(x) \equiv x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$

D) $H(x) \equiv x^5 + 2x - 3$

E) $M(x) \equiv x^7 + x - 2$

4. Determine el cuadro de posibilidades lógicas para las raíces en cada caso:

A) $P(x) \equiv x^5 - x^2 - 4x - 1$

B) $F(x) \equiv x^4 + x^2 + x - 1$

C) $G(x) \equiv x^7 + x^2 + 1$

D) $H(x) \equiv x^{20} + x^2 + 1$

E) $M(x) \equiv x^{12} + x - 1$

5. Determine los ceros racionales en cada caso:

A) $P(x) \equiv 2x^3 - x^2 + x + 1$

B) $R(x) \equiv x^4 - x - 2$

C) $Q(x) \equiv 5x^7 + x^4 - 2x + 1$

D) $M(x) \equiv 2x^5 - x^2 + x + 2$

E) $N(x) \equiv x^4 - 1$

6. Aplique el teorema de Bolzano en cada caso:

A) $F(x) \equiv x^3 + x + 1$

B) $G(x) \equiv x^5 + x + 7$

C) $H(x) \equiv 2x^3 + x^2 - x + 4$

D) $M(x) \equiv x^7 + x - 1$

E) $N(x) \equiv x^8 + x^3 - 4$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Las raíces de $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ son a, b y c.

Calcular: $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

Resolución:

Se pide calcular:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

La función polinomial dada es:

$$P(x) \equiv 2x^3+4x^2-5x+1$$

Cambiando x por $\frac{1}{x}$:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \equiv 2\left(\frac{1}{x}\right)^3+4\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+1$$

Ahora en la ecuación:

$$\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x}+1=0$$

Multiplicando por x^3:

$$x^3-5x^2+4x+2=0$$

Ahora de ésta nueva ecuación las raíces son: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5$$

OBSERVACIÓN

Para determinar el valor pedido se utiliza el teorema de Cardano – Viette (ver capítulo 11).

PROBLEMA 2 Sea el polinomio $P(x) \equiv 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$. Calcular A + B donde "A" es la suma de raíces de $P(x) = 0$ y "B" es la suma de las combinaciones de 2 en 2 de las raíces.

Resolución:

De acuerdo con el teorema de Cardano – Viette procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv 4x^5 - 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 1$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$B = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots + x_4x_5 = \frac{0}{4} = 0$$

$$\therefore\ A + B = \frac{3}{4}$$

PROBLEMA 3 Determine la suma de las raíces racionales que presenta la función:

$$F(x) \equiv 2x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 - 1$$

Resolución: De acuerdo con el teorema de Gauss. La raíz racional, de existir, presenta la siguiente forma $x_0 = \frac{p}{q}$; donde: $p = \pm 1$ y $q = \pm 1$ ó ± 2, es decir:

$$x_0 \in \left\{-1; 1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$$

Ahora según la regla de Ruffini determinamos la raíz.

i) Para $x_0 = -1$

	2	1	1	3	0	−1
−1	↓	−2	1	−2	−1	1
	2	−1	2	1	−1	0

Como el residuo obtenido es cero, diremos que $x_0 = -1$ es una raíz de F(x).

ii) Para $x_0 = 1$

	2	1	1	3	0	−1
1	↓	2	3	4	7	7
	2	3	4	7	7	6

Como el residuo es distinto de cero, $x_0 = 1$ no es una raíz de F(x).

iii) Para $x_0 = \frac{1}{2}$

	2	1	1	3	0	−1
$\frac{1}{2}$	↓	1	1	1	2	1
	2	2	2	4	2	0

Como el residuo obtenido es cero, diremos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es una raíz de F(x)

iv) Para $x_0 = -\frac{1}{2}$

	2	1	1	3	0	−1
$-\frac{1}{2}$	↓	−1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$
	2	0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{8}$

Como el residuo es distinto de cero, $x_0 = -\frac{1}{2}$ no es una raíz de F(x).

Finalmente podemos notar que el polinomio F(x) sólo tiene dos raíces racionales

$\left(-1 \text{ y } \frac{1}{2}\right)$ $\quad \therefore$ Σ de raices $= (-1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

PROBLEMA 4 ¿Cuántas raíces reales presenta la ecuación: $x^3 + x + 1 = 0$?

Resolución: Este problema lo resolveremos por dos métodos, veamos:

1°) Según el teorema de Descartes: $P(x) \equiv x^3 + x + 1$
No tiene variación de signos, por tanto $P(x) = 0$ no tiene raíces reales positivas.

$$P(-x) \equiv (-x)^3 + (-x) + 1$$
$$P(-x) \equiv -x^3 - x + 1$$

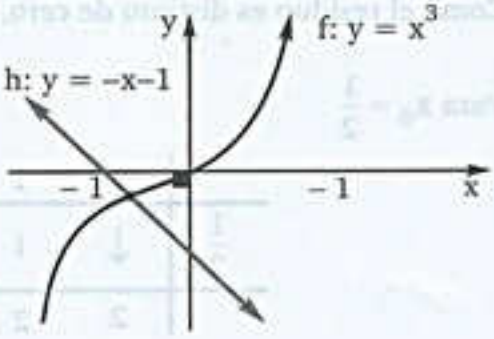
Tiene una variación de signo, por tanto podemos asegurar que $P(x) = 0$ tiene una raíz real negativa.

Con lo cuál se concluye que $x^3 + x + 1 = 0$ tiene sólo una raíz real, la cuál es negativa.

2°) Por método gráfico:

$$x^3 + x + 1 = 0$$
$$x^3 = -x - 1$$

Supongamos que: $f(x) = x^3$; $h(x) = -x - 1$. Graficando f y h tenemos:



Como las gráficas de f y h sólo se intersecan en un solo punto, afirmamos que la ecuación: f = h, tiene sólo una solución (raíz) real.

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 5 Sean a, b, c y d las raíces de $F(x) \equiv x^4 - 2x^2 + x + 3$. Calcular

$$E = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1}$$

Resolución: Dando uso de los teoremas de la transformación de raíces procedemos de la manera siguiente:

$$F(x) \equiv x^4 - 2x^2 + x + 3$$

i) Cambiamos x por x + 1, pues de este modo todas las raíces de $F(x) = 0$ disminuye en 1.

$$F(x+1) \equiv (x+1)^4 - 2(x+1)^2 + (x+1) + 3$$

$$F(x+1) \equiv x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 + x + 1 + 3$$

$$F(x+1) \equiv x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 3$$

Ahora a−1, b−1, c−1 y d−1 son las raíces de la ecuación: $x^4+4x^3+4x^2+x+3=0$

ii) Ahora cambiamos x por $\frac{1}{x}$, pues de este modo todas las raíces nuevas son las recíprocas de las anteriores:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} + 3 = 0$$

Multiplicando por x^4 tenemos :

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Con lo cuál las raíces de esta ecuación son $\frac{1}{a-1}, \frac{1}{b-1}, \frac{1}{c-1}, \frac{1}{d-1}$ y por el teorema de Cardano – Viette:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore E = -\frac{1}{3}$$

PROBLEMA 6 Con respecto a la función $F(x) = x^7 + x + 1$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones:

I. Tiene dos raíces racionales.
II. Tiene una raíz irracional positiva.
III. Tiene una raíz irracional negativa.

es verdadera?

Resolución: Para resolver este problema utilizaremos los tres teoremas adicionales:

1°) Por Descartes fácilmente notamos que F(x) tiene una raíz real negativa.

2°) Por Gauss notamos que no existe raíz racional, por tanto la raíz real negativa tiene que ser irracional.

3°) Por Bolzano notamos que la raíz irracional negativa pertenece al intervalo $\langle -1; 0\rangle$.

$\therefore$ La proposición III es verdadera.

PROBLEMA 7 Si a, b y c son raíces de la función $F(x) = x^3 - 7x + 1$. Calcular: $a^3 + b^3 + c^3$

Resolución: De acuerdo con el teorema de Cardano – Viette, se cumple:

$$a + b + c = 0 \ \wedge \ abc = -1$$

Se pide: $E = a^3 + b^3 + c^3$

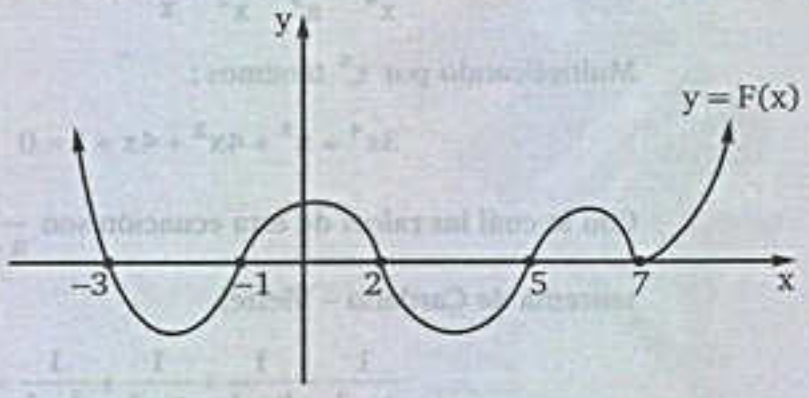
Recordar que si $m + n + p = 0 \Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$

En nuestro caso: $E = 3(abc)$

Finalmente: $E = 3(-1)$

$\therefore E = -3$

PROBLEMA 8 Determine la suma de los coeficientes del polinomio mónico de menor grado cuya gráfica es:



Resolución: Como F(x) es mónico, todos sus coeficientes son enteros siendo el principal igual a uno. De la gráfica:

$$F(x) = (x+3)(x+1)(x-2)(x-5)(x-7)^2$$

Observa que el menor grado que asume F(x) es 6, finalmente tenemos:

$$F(x) \equiv (x+3)(x+1)(x-2)(x-5)(x-7)^2$$

Haciendo $x = 1$: $F(1) = (4)(2)(-1)(-4)(-6)^2$

$\therefore F(1) = 1152$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Sea el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4$. Si $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Calcular:

$$P\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)$$

Resolución: Fácilmente podemos notar que a, b y c son las raíces de P(x) ¿Por qué? Porque P(x) se anula cuando $x = a, x = b$ y $x = c$.

Por Cardano – Viette:

$$a + b + c = -2 \quad \text{..... (1)}$$

$$ab + ac + bc = 0 \quad \text{..... (2)}$$

$$abc = 4 \quad \text{..... (3)}$$

Se pide el valor de: $E = P\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)$

$$E = P\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\right) \quad \text{..... (4)}$$

Con (1): $a + b + c = -2$

$$(a + b + c)^2 = (-2)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{\text{es cero}} = 4$$

De donde obtenemos: $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

Ahora en "E" tenemos:

$$E = P\left(\frac{4}{4}\right) = P(1)$$

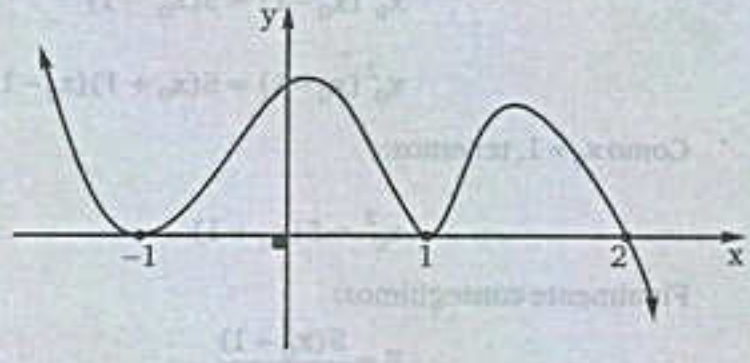
Finalmente en P(x):

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 4$$

$$P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 4$$

$$\therefore E = -1$$

PROBLEMA 10 La gráfica de la función polinómica F(x), es la que se muestra a continuación:



Si el grado de F(x) es cinco. Determine el término constante de F(x), además: $F(3) = -640$.

team CALAPENSHKO

Resolución: Si "a" es el coeficiente principal de F(x) según la gráfica se tendrá:

$$F(x) = a(x+1)^2(x-1)^2(x-2)$$

Por condición tenemos:

$$F(3) = -640$$

En F(x) hacemos x = 3:

$$F(3) = a(4)^2(2)^2(1)$$
$$-640 = a(16)(4)$$
$$-640 = 64a$$

De donde hemos conseguido:

$$a = -10$$

twitter.com/calapenshko

Con lo cual obtenemos:

$$F(x) = -10(x+1)^2(x-1)^2(x-2)$$

Debemos recordar que:

$$F(0) = \text{Término constante en } F(x)$$
$$F(0) = -10(1)^2(-1)^2(-2)$$
$$\therefore \quad F(0) = 20$$

PROBLEMA 11 Si x_0 es un cero de la función $F(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 5$. Calcular:

$$E = \frac{x_0^3}{x_0 + 1}; \; x_0 \notin \{-1; 1\}$$

Resolución: De acuerdo con la teoría si x_0 es un cero de F(x), se debe cumplir que $F(x_0) = 0$, esto es:

$$x_0^4 - x_0^3 - 5x_0^2 + 5 = 0$$
$$x_0^3(x_0 - 1) - 5(x_0^2 - 1) = 0$$
$$x_0^3(x_0 - 1) = 5(x_0^2 - 1)$$
$$x_0^3(x_0 - 1) = 5(x_0 + 1)(x_0 - 1)$$

Como $x_0 \neq 1$, tenemos:

$$x_0^3 = 5(x_0 + 1)$$

Finalmente conseguimos:

$$E = \frac{5(x_0 + 1)}{x_0 + 1}$$
$$\therefore \quad E = 5$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Si las raíces de la función polinomial $F(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3$ están en la proporción 1: 2: 6, de los siguientes enunciados:

I. Una raíz es positiva.

II. Todas las raíces son enteras.

III. La suma de dos de sus raíces es -4.

¿cuál (o cuáles) es verdadera?

Resolución: Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de $F(x)$, por condición se plantea lo siguiente:

$$x_1 = k, x_2 = 2k, x_3 = 6k$$

Por el teorema de Cardano – Viette se debe cumplir la siguiente relación:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{9}{2}$$

$$k + 2k + 6k = -\frac{9}{2}$$

$$9k = -\frac{9}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

Ahora notamos que:

$$x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -1 \text{ y } x_3 = -3$$

$\therefore$ De acuerdo con el enunciado, sólo III es verdadera.

PROBLEMA 13 Si x_1, x_2 y x_3 son raíces de la función $F(x) = 2x^3 + 3x - 12$.

Calcular: $E = x_1x_2(x_1 + x_2)^4 + x_1x_3(x_1 + x_3)^4 + x_2x_3(x_2 + x_3)^4$.

Resolución: De acuerdo con el teorema de Cardano – Viette podemos plantear las siguientes relaciones: $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{2}$ y $x_1x_2x_3 = 6$

Como $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, la expresión solicitada se puede reescribir de la forma siguiente:

$$E = x_1x_2(-x_3)^4 + x_1x_3(-x_2)^4 + x_2x_3(-x_1)^4$$

$$E = x_1x_2x_3^4 + x_1x_3x_2^4 + x_2x_3x_1^4$$

$$E = (x_1x_2x_3).\underbrace{(x_3^3 + x_2^3 + x_1^3)}_{\text{Por propiedad (ver problema 7)}}$$

$$E = (x_1x_2x_3)(3x_1x_2x_3) = 3(x_1x_2x_3)^2$$

Finalmente al reemplazar $x_1x_2x_3 = 6$, tenemos:

$$E = 3(6)^2 = 3\ (36)$$

$\therefore$ $E = 108$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 14 Si a, b y c son las raíces de la ecuación $2x^3 - x + 5 = 0$. Calcular:

$$E = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Resolución: En la ecuación dada cambiamos x por $\frac{1}{x}$, de este modo las raíces de la nueva ecuación serán : $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

$$2\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

$$\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} + 5 = 0$$

Multiplicando por x^3 conseguimos la ecuación:

$$2 - x^2 + 5x^3 = 0$$

$$5x^3 - x^2 + 2 = 0$$

Por el teorema de Cardano – Viette podemos plantear las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}; \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = 0$$

Partiendo de la igualdad:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}_{E} + 2\underbrace{\left[\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\right]}_{0} = \frac{1}{25}$$

$$E + 2[0] = \frac{1}{25} \Leftrightarrow E + 0 = \frac{1}{25}$$

$$\therefore E = \frac{1}{25}$$

PROBLEMA 15 Si $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + 28$ tiene coeficientes enteros y una de sus raíces es: $x_1 = 3 - \sqrt{2}$. Calcular: $a^2 - 1$

Resolución: De acuerdo con el teorema de la paridad de raíces irracionales decimos que si una raíz es: $3 - \sqrt{2}$, otra raíz deberá ser $3 + \sqrt{2}$.

team CALAPENSHKO

Por reconstrucción de una ecuación cuadrática en x de raíces $3+\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{2}$, tenemos la ecuación $x^2-6x+7=0$.

Ahora según la teoría $F(x) \div (x^2-6x+7)$ debe ser una división exacta.
Aplicando el método de Horner:

1	1	a	b	28
6		6	−7	
−7			6a + 36	−7 (a + 6)
	1	(a + 6)	0	0

En la columna del residuo:

$$28-7(a+6)=0$$
$$28=7(a+6)$$
$$4=a+6 \Leftrightarrow a=-2$$
$$\therefore a^2-1=-3$$

PROBLEMA 16 Sea P(x) un polinomio de coeficientes racionales tales que:

I. $2+\sqrt{3}$ es una raíz simple.

II. $3+\sqrt{5}$ es una raíz doble.

III. Si $1+2i$ es una raíz triple.

IV. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es una raíz simple.

¿cuál es el grado mínimo de P(x)?

Resolución: Teniendo en cuenta que los coeficientes de P(x) son números racionales analizaremos cuidadosamente la presencia de las raíces dadas.

I. Si $2+\sqrt{3}$ es una raíz simple, otra raíz simple será $2-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ el grado será 2.

II. Si $3+\sqrt{5}$ es una raíz doble, otra raíz doble será $3-\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ el grado será 4.

III. Si $1+2i$ es una raíz triple, otra raíz triple será $1-2i$. $\Rightarrow$ el grado será 6.

IV. Si $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es una raíz simple, también serán raíces simples: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ el grado será 4.

Finalmente podemos observar que el grado mínimo de P(x) viene dado por la suma de todos los grados obtenidos, esto es:

$$\therefore \quad [P]^\circ = 2+4+6+4=16$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 17 Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación: $x^3 - 5x + 12 = 0$. Calcular:

$$E = \frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

Resolución: Se pide calcular:

$$E = \frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} + \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} \quad \text{..... (1)}$$

La ecuación dada es: $x^3 - 5x + 12 = 0$

Como x_2 es una raíz: $x_2^3 - 5x_2 + 12 = 0$

$$x_2^3 + 2 = 5(x_2 - 2)$$

$$\frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} = 5$$

Por el teorema de Cardano – Viette:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -5$$

$$x_1x_2x_3 = -12$$

Finalmente tenemos:

$$E = 5 + \frac{5}{12}$$

$$\therefore E = \frac{65}{12}$$

PROBLEMA 18 Determine el valor de "n", de modo que una de las raíces de la función: $F(x) = x^3 - 52x + n = 0$ sea el triple de la otra.

Resolución: Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la función polinomial, luego por condición:

$$x_1 = a,\ x_2 = 3a \text{ y } x_3 = b$$

Por el teorema de Cardano – Viette:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow a + 3a + b = 0 \ ;\ b = -4a \quad \text{.....(1)}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -52 \Leftrightarrow 3a^2 + ab + 3ab = -52$$

$$3a^2 + 4ab = -52 \quad \text{.....(2)}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$3a^2 + 4a(-4a) = -52$$

$$3a^2 - 16a^2 = -52$$

$$-13a^2 = -52$$

$$a^2 = 4$$

De donde podemos observar que:

$$a = 2 \vee a = -2$$

team CALAPENSHKO

Si a = 2 en (1): b = −8, con lo cual las raíces de la función serían:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6 \text{ y } x_3 = -8$$

Por Cardano – Viette:

$$x_1 x_2 x_3 = -n \Leftrightarrow n = -x_1 x_2 x_3$$

$$n = 96$$

Si a = −2 en (1): b = 8, con lo cual las raíces de la función serían:

$$x_1 = -2,\ x_2 = -6 \text{ y } x_3 = 8$$

Por Cardano – Viette:

$$x_1 x_2 x_3 = -n \Leftrightarrow n = -x_1 x_2 x_3$$

$$n = -96$$

$$\therefore\ n = 96 \vee n = -96$$

PROBLEMA 19 Mostrar el cuadro de posibilidades lógicas para las raíces de la siguiente función:

$F(x) \equiv x^7 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos de la manera siguiente:

Variación de signos para F(x):

$$F(x) \equiv \underbrace{x^7 - 2x^4}\ \underbrace{+ x^3}\ \underbrace{- x^2}\ \underbrace{+ x - 1}$$

Observa que el nº de raíces positivas = $r^+ \begin{cases} 5 \\ 3 \\ 1 \end{cases}$

Variación de signos para F(−x):

$$F(-x) \equiv -x^7 - 2x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$$

Como no existe variación de signos, se afirma que la función F(x) no tiene raíz real negativa.

Finalmente el cuadro de posibilidades lógicas será:

r^+	r^-	Im
5	0	2
3	0	4
1	0	6

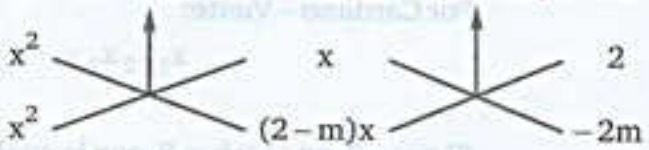
PROBLEMA 20 ¿Cuál es el menor valor entero que asume "m" de modo que la función:

$F(x) \equiv x^4 + (3-m)x^3 + (4-3m)x^2 + (4-4m)x - 4m$ presente una raíz mayor que 2.

team CALAPENSHKO

Resolución: Factorizando la regla polinomial según el criterio del aspa doble especial:

$$F(x) \equiv x^4 + (3-m)x^3 + (4-3m)x^2 + (4-4m)x - 4m$$



Ahora tenemos:

$$F(x) \equiv (x^2 + x + 2)[x^2 + (2-m)x - 2m]$$

Dando uso del aspa simple tenemos:

$$F(x) \equiv (x^2 + x + 2)(x + 2)(x - m)$$

Fácilmente notamos que $x^2 + x + 2 = 0$ no admite raíces reales, por tanto aquí no se encuentra la raíz que menciona el problema, las raíces reales son $x = -2; x = m$.
Por condición se plantea: $m > 2$

$$\therefore \quad m_{(\text{mínimo entero})} = 3$$

PROBLEMA 21 ¿Cuántas raíces irracionales tiene la siguiente función: $F(x) \equiv x^5 - x^2 - 3$?

Resolución: De acuerdo con el teorema de Gauss notamos que F(x) no tiene raíz racional, por ser F(x) de grado impar tendrá al menos una raíz real y esta deberá ser irracional.
Por el teorema de Descartes:

$$F(x) \equiv x^5 - x^2 - 3$$

$$F(-x) \equiv -x^5 - x^2 - 3$$

F(x) tiene una variación de signo, luego F(x) tiene una raíz real positiva.
F(−x) no tiene variación de signo, luego F(x) no tiene raíz real negativa.
Por lo tanto se concluye que la única raíz real positiva que tiene la función es irracional.

$$\therefore \quad N^o \text{ de raíces irracionales} = 1$$

PROBLEMA 22 Si P(x) es un polinomio con coeficientes racionales, mónico y de grado mínimo que verifica las condiciones: $P(-1) = P(2+i) = P(1+2i) = 0$.
Si (−1) es una raíz de multiplicidad tres, determine la suma de los coeficientes de P(x).

Resolución: De las condiciones tenemos:
$x = -1$ es una raíz de multiplicidad tres.
$x = 2 + i$ es una raíz simple, $x = 2 - i$ será otra raíz simple.

* La cuadrática en x de raíces $2 + i$ y $2 - i$ es: $x^2 - 4x + 5 = 0$

team CALAPENSHKO

$x = 1 + 2i$ es una raíz simple, $x = 1 - 2i$ será otra raíz simple.

* La cuadrática en x de raíces $1 + 2i$ y $1 - 2i$ es: $x^2 - 2x + 5 = 0$

Ahora fácilmente podemos notar que el polinomio P(x) que satisface las condiciones del problema es:

$$P(x) = (x + 1)^3 (x^2 - 4x + 5) (x^2 - 2x + 5)$$

Como P(1) = Suma de coeficientes, en P(x) hacemos x = 1:

$$P(1) = (2)^3 (1 - 4 + 5) (1 - 2 + 5) = (8)(2)(4)$$

$$\therefore \quad P(1) = 64$$

PROBLEMA 23 Determine el menor valor que asume k, de modo que la gráfica de la función: $F(x) = 4x^2 + 3x + k^2$ sea tangente al eje de abscisas.

Resolución: Fácilmente podemos reconocer que si la gráfica de la función F(x) es tangente al eje de abscisas, F(x) tiene raíces iguales.

Ahora la función: $F(x) = 4x^2 + 3x + k^2$ debe verificar la siguiente condición:

$$\Delta = (3)^2 - 4(4)(k^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16k^2 - 9 = 0$$

$$(4k + 3)(4k - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{3}{4} \vee k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ El menor valor de k es } -\frac{3}{4}$$

PROBLEMA 24 Considere la función polinomial $F(x) = x^{19} + ax + b$, donde a y b son reales. Si F(x) = 0 tiene una sola raíz real e igual a "b". Determine el producto de todas las raíces imaginarias.

Resolución: Supongamos que $x_1 = b$ es la única raíz real; luego $x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots$ y x_{19} son las raíces imaginarias.

Por el teorema de Cardano – Viette se plantea:

$$x_1 . x_2 . x_3 . x_4 \ldots\ldots\ldots x_{19} = -b$$

$$b . x_2 . x_3 . x_4 \ldots\ldots\ldots x_{19} = -b$$

$$\therefore \quad x_2 . x_3 . x_4 \ldots\ldots\ldots x_{19} = -1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 25 Sabiendo que $a < b < c$. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b+c=6 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ ab+ac+bc=11 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ abc=6 & \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Indicar como respuesta: $a^7+b^5+c^2$

Resolución: Supongamos que a, b y c son las raíces de una cúbica en x, luego la ecuación sera:

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$$

Ahora con las ecuaciones del sistema:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Factorizando al polinomio cúbico según el criterio de los divisores binómicos tenemos:

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

De donde las raíces son: 1; 2 y 3

Por condición del problema:

$$a=1;\ b=2\ \text{y}\ c=3$$

Finalmente tenemos:

$$a^7+b^5+c^2=1^7+2^5+3^2$$

$$\therefore\ a^7+b^5+c^2=42$$

PROBLEMA 26 Si x_0 es raíz de la ecuación $x^3+18x-29=0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

I. $x_0 \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ II. $x_0 \in \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$ III. $x_0 \in \left\langle \frac{3}{2}; 2 \right\rangle$

Resolución: Sea $P(x) \equiv x^3+18x-29$, de acuerdo con el teorema de Bolzano analizaremos los extremos de cada intervalo citado.

$$P(0)=-29\ \text{y}\ P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{151}{8}$$

Es evidente que en $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ no existe raíz.

$$P(1)=-10\ \text{y}\ P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{8}$$

Es evidente que en $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$ existe raíz.

team CALAPENSHKO

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{8} \text{ y } P(2) = 15$$

Es evidente que en $\left\langle \frac{3}{2}; 2 \right\rangle$ no existe raíz.

$\therefore$ La raíz pertenece al intervalo $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$

PROBLEMA 27 Sean x_1, x_2 y x_3 raíces de la ecuación cúbica: $x^3 - 5x + 7 = 0$. Calcular:

$$E = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

Resolución: Por el teorema de Cardano – Viette podemos plantear:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5;\ x_1x_2x_3 = -7$$

Se pide calcular:

$$E = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

Por propiedad tenemos:

$$E = -5(x_1x_2x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$E = -5(-7)(-5)$$

$\therefore$ $E = -175$

PROBLEMA 28 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sea P(x) un polinomio definido en $\mathbb{R}$, si una raíz es $2 - \sqrt{7}$ entonces otra raíz será necesariamente $2 + \sqrt{7}$. .....(1)

II. Un polinomio P(x) de quinto grado definido en $\mathbb{R}$ puede tener exactamente dos raíces reales. .....(2)

III. El polinomio $P(x) = (x^2 - 4)(x + 2)$ es tangente al eje x en $x = -2$. .....(3)

Resolución:

I. FALSO (F). Pues esto se cumplirá si los coeficientes de P(x) son racionales y aquí nos dicen que P(x) está definido en $\mathbb{R}$, es decir los coeficientes podrán ser cualesquiera números reales.

II. FALSO (F). Pues si un polinomio está definido en $\mathbb{R}$, de presentar raíces imaginarias, la cantidad de estas deberán ser par y aquí se entiende que P(x) tiene tres raíces imaginarias.

team CALAPENSHKO

III. VERDADERO (V). $P(x) = (x^2 - 4)(x + 2)$

$P(x) = (x-2)(x+2)^2$

En efecto $x = -2$ es una raíz de multiplicidad par, aquí la gráfica de $P(x)$ es tangente al eje de abscisas.

PROBLEMA 29 Determine $a - b$, si $x_0 = 1$ es un cero doble del polinomio:

$$F(x) = ax^{2011} + bx^{2010} + 1$$

Resolución:

Si $x_0 = 1$ es un cero doble de $F(x)$, $(x-1)^2$ es un factor de $F(x)$. Ahora podemos establecer que la siguiente división:

$$\frac{ax^{2011} + bx^{2010} + 1}{(x-1)^2} = \frac{ax^{2011} + bx^{2010} + 1}{x^2 - 2x + 1} \text{ es exacta;}$$

Por propiedad de división exacta podemos cambiar el orden del dividendo y divisor, veamos:

$$\frac{1 + bx^{2010} + ax^{2011}}{1 - 2x + x^2}$$

Ahora por el método de Horner tenemos:

1	1	0	0	0	0	.....	0	0	b	a
2		2	−1	−2	−3	.....			−2009	−2010
−1			4	6		.....			4020	
	1	2	3	4	.....		2009	2010	0	0

En las columnas del residuo:

$$a - 2010 = 0 \wedge b - 2009 + 4020 = 0$$

$$a = 2010 \wedge b = -2011$$

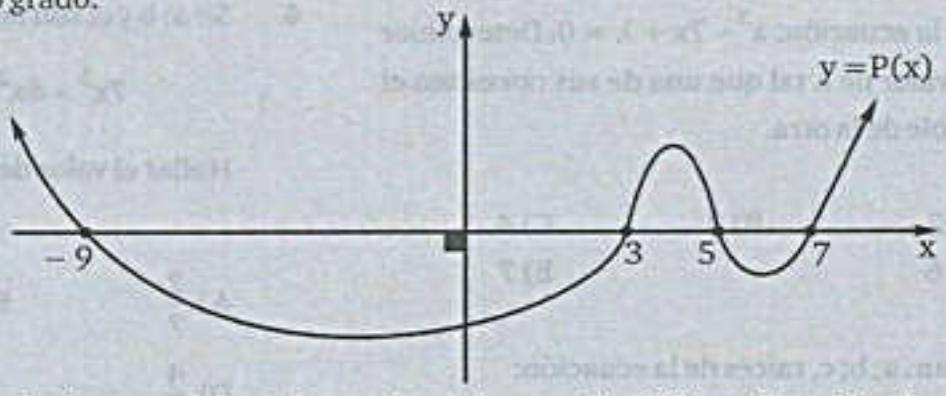
$$\therefore \quad a - b = 4021$$

OBSERVACIÓN

El problema anterior también se puede resolver aplicando criterios de derivadas, pero esto lo dejamos para más adelante (ver capítulo Límites y Derivadas.).

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función polinomial P, mónico de cuarto grado.



Determine la suma de las raíces reales de la ecuación $P(2|x+7|+1)=0$

Resolución: De acuerdo con la condición del problema podemos observar que el polinomio P(x) es:

$$P(x) \equiv (x+9)(x-3)(x-5)(x-7)$$

Ahora reemplazamos x por $2|x+7|+1$, tenemos:

$$P(2|x+7|+1) = (2|x+7|+10)(2|x+7|-2)(2|x+7|-4)(2|x+7|-6)$$

Por condición se plantea:

$$(2|x+7|+10)(2|x+7|-2)(2|x+7|-4)(2|x+7|-6)=0$$

Es evidente que $(2|x+7|+10) \neq 0$, luego solo se cumple:

$$2|x+7|-2=0 \quad ; \quad 2|x+7|-4=0 \quad ; \quad 2|x+7|-6=0$$

$$|x+7|=1 \quad ; \quad |x+7|=2 \quad ; \quad |x+7|=3$$

$$x+7=1 \vee x+7=-1;\ x+7=2 \vee x+7=-2;\ x+7=3 \vee x+7=-3$$

$$x=-6 \vee x=-8 \quad ; \quad x=-5 \vee x=-9 \quad ; \quad x=-4 \vee x=-10$$

$\therefore$ Σ raíces $=-42$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la ecuación: $x^3 - 7x + \lambda = 0$. Determinar el valor de λ tal que una de sus raíces sea el doble de la otra.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 7

2. Sean: a; b; c, raíces de la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

Calcular:

$$E = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

A) 5 B) -5 C) -4
D) -7 E) 2

3. Si las raíces de la ecuación:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

son: -1; 1; 2. calcular mnp.

A) -4 B) -2 C) 1
D) 2 E) 4

4. Halle la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

A) 16 B) 4 C) 14
D) 6 E) 12

5. ¿Cuál es el orden de multiplicidad de la raíz dos para el polinomio:

$P(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Si: a; b y c; son las raíces de la ecuación:

$$7x^3 - 8x^2 - 5x + 4 = 0$$

Hallar el valor de: $E = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

7. Determinar a; b y c de modo que:
$(x-1)(x-2)(x+1)$; sea un factor de:

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 - ax^2 + bx + c$$

Indicar: $2a - b + c$

A) 24 B) 28 C) 36
D) 38 E) 42

8. Resolver la ecuación: $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$
Si una de sus raíces es la semisuma de las otras dos. Indicar la mayor raíz menos la menor raíz.

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) 4 E) 5

9. Dos de las raíces de la ecuación:

$$5x^3 - 13x^2 + px + q = 0$$

son 2 y 3. Calcular: $p + q$.

A) 16 B) 36 C) 42
D) 80 E) 90

team CALAPENSHKO

10. En la ecuación: $3x^3 = 2 - 5x$.
Si: a; b; c, son sus raíces.
Calcular: $K = a^3 + b^3 + c^3$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

11. Formar la ecuación de grado mínimo con coeficientes enteros que admita como raíces a: $1 + \sqrt{2}\,i$ y $2 - \sqrt{3}\,i$.

A) $x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 26x - 21 = 0$
B) $x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 26x + 21 = 0$
C) $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 26x + 21 = 0$
D) $x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x + 21 = 0$
E) $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 26x + 21 = 0$

12. Sabiendo que una raíz de:
$P(x) = x^3 + mx^2 + 11x + 6$, es: -2
Entonces la suma de los cuadrados de las raíces restantes es:

A) 14 B) 10 C) 6
D) 24 E) 36

13. Encontrar un polinomio de coeficientes enteros de mínimo grado que acepta como raíz a $\sqrt{5} + \sqrt[3]{3}$. Indicar como respuesta la suma de sus coeficientes:

A) 86 B) -24 C) -151
D) 120 E) 96

14. En la ecuación: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Si una de las raíces es negativa de la otra, se cumple que:

A) $b^2 = 4ac$ B) $b2 < 4ac$ C) $ab = c$
D) $a = bc$ E) $b = ac$

15. Sabiendo que: $\sqrt{3}$ y $1 - 2i$, son raíces del polinomio: $P(x) = x^5 - x^4 + 8x^2 - 9x - 15$.
La suma de los cuadrados de las raíces restantes es:

A) 4 B) 3 C) 1
D) 5 E) 6

16. Hallar un valor entero de "m" de manera que las raíces de la ecuación:

$$x^3 + (m + 1)x^2 - m = 0.$$

Están en progresión aritmética.

A) -2 B) 2 C) 1
D) 4 E) 5

17. Si las raíces de: $P(x) = x^3 + 7x^2 - kx - 27$ están en progresión geométrica; determinar el valor de "k".

A) 10 B) 17 C) 21
D) -17 E) -21

18. Calcular: a + b, en la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + 7 = 0$$

Para que una de sus raíces sea:
raíz $1 - 2\sqrt{2}$ (a y b $\in \mathbb{Q}$)

A) 2 B) 5 C) 8
D) -8 E) -5

19. Si: 2 + i, es una raíz doble de:
$x^5 + ax^6 + bx^3 + cx^2 + dx + 25 = 0$
Hallar: a + b + c + d + e; a; b; c; d; e $\in \mathbb{R}$

A) 17 B) 18 C) -17
D) -18 E) 19

20. Sean los polinomios:
P(x): El polinomio de menor grado con coeficientes racionales que tiene a $\sqrt{3}$ y a $1+i$; como raíces simples.
Q(x): El polinomio de menor grado con coeficientes reales que tiene a $\sqrt{3}$ y a $1+i$ como raíces simples.
Luego podemos decir que:

A) Grado (P) = Grado (Q)
B) Grado (P) = 3
C) Grado (P) = 4
D) Grado (P) < Grado (Q)
E) Grado (P) > Grado (Q)

21. Encontrar un polinomio P(x) cuyas raíces sean las de: $P(x) = x^3 + x - 10$; aumentadas en dos.

A) $x^3 + 6x^2 - 13x - 20$
B) $x^3 - 6x^2 + 13x - 20$
C) $2x^3 + 2x - 1$
D) $x^3 - 6x^2 - 13x - 20$
E) $x^3 + 6x^2 + 13x - 20$

22. Si: "m" y 4/5; son las raíces de la ecuación: $ax^2 - bx + c = 0$; $a \neq 0$; formar otra ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

$$\left(\frac{3-2m}{m}\right) \text{ y } \frac{7}{4}$$

A) $cx^2 - (3b+4c)x - (a+2b-3c) = 0$; $c \neq 0$
B) $cx^2 - (4c-3b)x - (9a-6b+4c) = 0$; $c \neq 0$
C) $cx^2 - (b+5c)x - (3a+2b+5c) = 0$; $c \neq 0$
D) $cx^2 - (5b-3c)x - (a+4b-3c) = 0$; $c \neq 0$
E) $cx^2 - (5b+c)x - (a-b+c) = 0$; $c \neq 0$

23. Encontrar la ecuación cuyas raíces sean las de la ecuación:

$$x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1 = 0$$

Disminuidas en uno.

A) $x^5 - 5x^4 + 7x^2 + x - 1 = 0$
B) $x^5 - x^4 + 7x^3 - x^2 + 1 = 0$
C) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
D) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
E) $x^5 - x^4 + 6x^3 - x^2 + 1 = 0$

24. Para transformar la ecuación:

$$2x^3 + 12x^2 + 5x + 7 = 0.$$

en otra que no posea término cuadrático, x debe reemplazarse por:

A) $x-1$ B) $x-2$ C) $x-3$
D) $x-4$ E) $x-5$

25. Hallar la ecuación cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces de:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

Dar como respuesta la suma de sus coeficientes.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

26. Sea la función: $f(x) = \dfrac{1}{(x^3-1)^2}$ y la ecuación:

$x^3 - 3x - 1 = 0$; de raíces a; b y c. Calcular:

$$S = F(a) + F(b) + F(c)$$

A) 1 B) 3 C) $\frac{1}{3}$
D) 9 E) $\frac{1}{9}$

team CALAPENSHKO

27. Si: a; b y c son las raíces de la ecuación:

$$x^3 + 2x + 2 = 0$$

forman la ecuación cuyas raíces sean:

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b};\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c};\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

A) $y^3 + 3y^2 + 5y + 5 = 0$

B) $y^3 - 3y^2 - 5y - 5 = 0$

C) $y^3 - 3y^2 + 5y - 5 = 0$

D) $y^3 + 3y^2 - 5y - 5 = 0$

E) $y^3 + 3y^2 + 5y - 5 = 0$

28. ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación:

$$x^3 - 27x - 50 = 0?$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

29. ¿Cuántas raíces imaginarias tiene la ecuación: $2x^3 - 5x^2 + 6x - 6 = 0$?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

30. Si "a" es raíz de la ecuación:

$$x^4 + 3x - 15 = 0$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) $a \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $a \in \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

C) $a \in \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$

D) $a \in \left\langle \frac{3}{2}; 2 \right\rangle$ E) $a \in \left\langle 2; \frac{5}{2} \right\rangle$

31. Si "a" es raíz de la ecuación:

$$x^3 + 18x - 29 = 0$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) $a \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $a \in \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

C) $a \in \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$

D) $a \in \left\langle \frac{3}{2}; 2 \right\rangle$ E) $a \in \left\langle 2; \frac{5}{2} \right\rangle$

32. De la ecuación: $x^5 + x - 10 = 0$; podemos afirmar que en el intervalo $\langle 1; 2 \rangle$:

A) Existen dos soluciones reales.
B) No existen soluciones.
C) Existen cinco soluciones reales.
D) Existen tres soluciones reales.
E) Existe una solución real.

33. Sea el polinomio: $x^3 - 3x^2 + 5$.
Indicar si es verdadero o falso.
I. Sólo tiene una raíz real positiva.
II. Tiene dos raíces imaginarias.
III. Tiene una raíz comprendida entre $\langle -2; 1 \rangle$

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFF

34. Construir un polinomio con coeficientes racionales de grado mínimo que tenga como raíces: $2;\ 1 - \sqrt{5}$ y $2i$

A) $x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 32x + 32$
B) $x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 32x - 32$
C) $x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 32x - 32$
D) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32x + 32$
E) Ninguna de las anteriores.

35. Sea el polinomio:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2$$

Entonces una de las posibilidades de las raíces según la regla de Descartes es:

A) 3 raíces positivas; 1 negativa.
B) 2 raíces positivas; 1 negativa; 1 imaginaria.
C) 2 imaginarias; 2 reales positivas.
D) 2 raíces negativas y 2 positivas.
E) Ninguna.

36. Indicar el cuadro correcto de posibilidades del polinomio: $P(x) = x^4+3x^3+5x^2+7x+9$ Respecto a sus raíces:

A)

r^+	r^-	Im
0	4	0
0	2	2
0	0	4

B)

r^+	r^-	Im
1	2	1
1	2	1
3	1	0

C)

r^+	r^-	Im
3	1	0
4	0	0
2	2	2

D)

r^+	r^-	Im
0	2	2
2	0	2
2	2	0

E) Ninguna de las anteriores.

37. Dado el polinomio:

$$P(x) = x^5 - ax^2 - ax + b + a;$$

Indicar el coeficiente "b" de tal modo que –1 sea una raíz múltiple en orden no inferior a dos.

A) –5 B) 1 C) 0
D) 6 E) –6

38. Luego de resolver la ecuación:

$$x^4 - \sqrt{2}(a+b)x^2 + (a-b)^2 = 0; ab \neq 0$$

Si: $|a| \neq |b|$, calcular el valor de la suma de las cuartas potencias de las raíces.

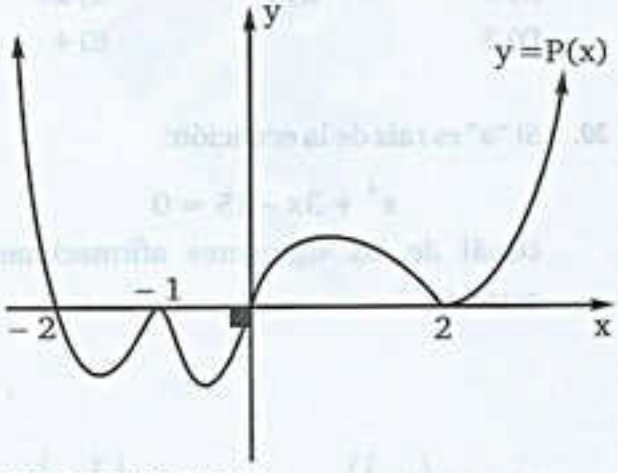
A) 12 ab B) 4 ab C) 8 ab
D) 16 ab E) 32 ab

39. Si se tiene el polinomio: $P(x) = x^6 + x - 66$, entonces indicar el valor de verdad de:

I. $P(x) = 0$ tiene dos raíces reales del mismo signo.
II. $P(x) = 0$ tiene dos raíces reales de diferente signo y 4 raíces imaginarias.
III. Si x_1, x_2 son raíces reales de $P(x) = 0$, entonces: $x_1 \in \langle -3; -2 \rangle \wedge x_2 > 0$

A) FVF B) FFF C) VVV
D) VFV E) FVV

40. Sea $P(x) = (x+2)^a (x+1)^b x^c (x+3)^d$, de grado 8 y suma de coeficientes 108 ($a > c$), cuya gráfica se muestra a continuación.



Luego es cierto que

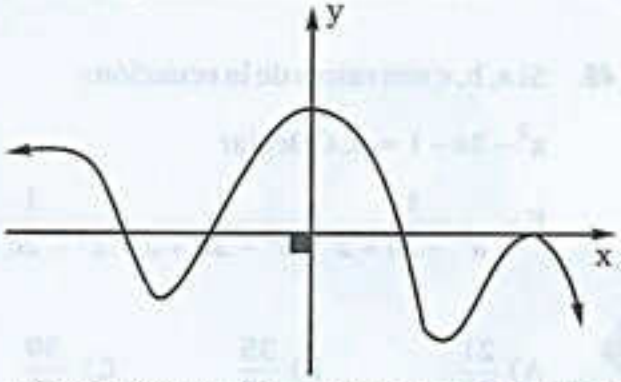
A) $b + c + d = 7$ B) $b^2 + c = 7$
C) $a < b$
D) $d < a$ E) $b = c$

team CALAPENSHKO

41. Sea $P(x) = (x-1)^2 (x+2)^2 (x+3)^2$ cuya gráfica toca al eje x, tres veces; entonces $P(|x|)$ toca al eje x:

A) 3 veces B) 2 veces C) 4 veces
D) 5 veces E) 6 veces

42. Dada la gráfica de la función P(x):



De las raíces de $P(1-|x|)$ podemos afirmar que:

A) Son cuatro, 2 positivas y 2 negativas.
B) Todas son positivas.
C) Son ocho, 4 positivas y 4 negativas.
D) Son seis, tres positivas y tres negativas.
E) Todas son negativas.

43. Dada la función $P(x) = 486x^5 + 3x - 32$. Indique el valor de verdad de las proposiciones:

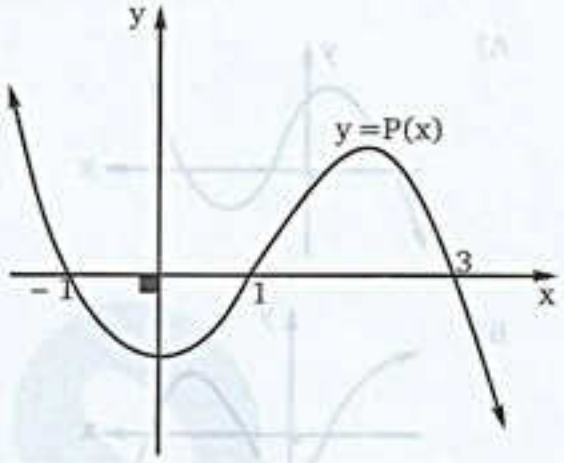
I. P(x) es creciente en $\mathbb{R}$ .....( )

II. P(x) tiene un cero en $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\rangle$ .....( )

III. P(x) tiene dos raíces imaginarias.
.....( )

A) VVF B) VVV C) VFF
D) VFV E) FVF

44. Sea: $P(x) = (x+1)(x-1)(x-3)(ax^2+bx+c)$ de grado cinco; a, b, $c \in \mathbb{R}$ y su gráfica es como se muestra:



Determine el grado de validez de las proposiciones:

I. El discriminante de la expresión cuadrática de P es negativo ..... ( )
II. $a > 0$ ..... ( )
III. P tiene dos raíces imaginarias
..... ( )

A) FFF B) FVV C) VFV
D) VVV E) VFF

45. Si x_1, x_2 y x_3 son raíces de la función:

$P(x) = x^3 + 2x - 1$. Determine el resto de dividir: $\left[P(x) - P\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1}\right)\right] \div (x-2)$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 3 E) $\frac{1}{3}$

46. Si a, b, c son raíces de la ecuación:
$(x-1)(x-2)(x-3) + x = 0$
Calcular:

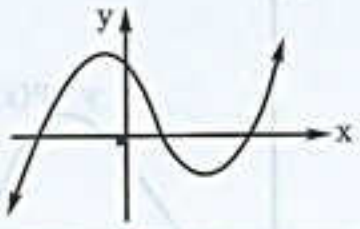
$$E = \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{b}{b-1}\right)^2 + \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

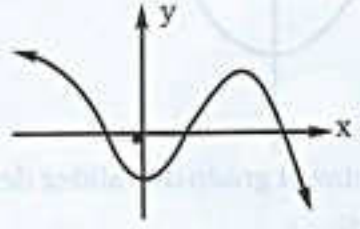
A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

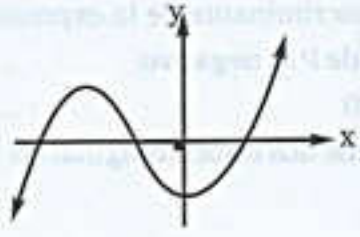
team CALAPENSHKO

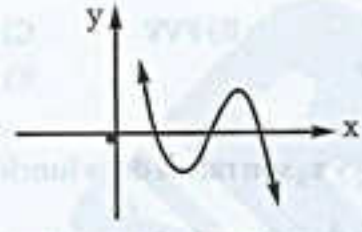
47. ¿Cuál es la gráfica que corresponde aproximadamente al polinomio:

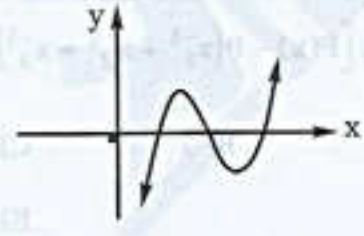
$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6?$$

A)


B)


C)


D)


E)


48. Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - (4m+9)x + 237 - 4m = 0$$

Calcular m, sabiendo que:

$$\left(\frac{x_1+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3+1}{2}\right)^2 = 38$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

49. Si a, b, c son raíces de la ecuación:

$x^3 - 3x - 1 = 0$. Calcular

$$E = \frac{1}{a^2-2a+2} + \frac{1}{b^2-2b+2} + \frac{1}{c^2-2c+2}$$

A) $\frac{21}{29}$ B) $\frac{35}{37}$ C) $\frac{39}{37}$
D) $\frac{29}{35}$ E) $\frac{41}{39}$

50. Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación:

$x^3 - 2x + 3 = 0$. Calcular:

$$E = \frac{1}{x_1^3+x_2^3+6} + \frac{1}{x_1^3+x_3^3+6} + \frac{1}{x_2^3+x_3^3+6}$$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) -1

team CALAPENSHKO

Capítulo 17

Logaritmación en $\mathbb{R}$

CAPACIDADES:

- Reconocer funciones exponenciales y logarítmicas.
- Efectuar operaciones con logaritmos.
- Identificar sistemas de logaritmos.

$$log_b\, x = y \;\leftrightarrow\; b^y = x$$

El uso sistemático de los logaritmos fue introducido el segundo decenio del siglo XVII por Henry Briggs y John Napier (o Neper de ahí el nombre de neperianos dado a los logaritmos naturales, mientras que los decimales se llaman a veces de Briggs). como antecedente de los logaritmos podemos mencionar el "compás geométrico y militar" de Galileo Galilei, que era una rudimentaria regla de cálculo.

JOHN NAPIER

Neper, matemático escocés (1 550 – 1 617) nacido en Merchiston Castle, cerca de Edimburgo. Se educó en St. Andrews y amplió sus estudios en los Países Bajos, Francia e Italia.

Se destacó por su teoría de los logaritmos, método que reemplazó a las laboriosas operaciones aritméticas de las que había dependido hasta entonces la resolución de los más sencillos problemas trigonométricos. Sobre este tema escribió dos tratados (uno de ellos sus tablas, en 1 614), tomando como base de los logaritmos el llamado "número de Neper".

Se dedicó también a cuestiones de trigonometría esférica: las fórmulas conocidas con el nombre del matemático dan la expresión de los ángulos de un triángulo esférico, en función de la amplitud de los lados y se pueden calcular por medio de logaritmos.

Escribió también un tratado teológico (1 593). en el años 1 615 escribió su última obra, donde dio a conocer sus procedimientos de multiplicación y división abreviados, que implicaban el uso de los bastones de Neper, antecesores de las modernas máquinas de calcular.

team CALAPENSHKO

LOGARITMOS

LOGARITMO (log)

Se define logaritmo de un número positivo "N" en una base "b" positiva y distinta de la unidad como el exponente "α" que debe afectar a dicha base para obtener una potencia igual al número dado inicialmente.

Representación:

$$\log_b N = \alpha \quad \text{.... (1)}$$

Donde:
- log = operador de la logaritmación
- N = número propuesto / $N > 0$
- b = base del logaritmo / $b > 0 ; b \neq 1$
- α = logaritmo / $\alpha \in \mathbb{R}$

DE LA DEFINICIÓN:

$$\log_b N = \alpha \Leftrightarrow b^{\alpha} = N \quad \text{.... (2)}$$

- $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8$
  $\therefore x = 3$
- $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x$
  $\therefore x = 25$

TEOREMA: Reemplazando (1) en (2):

$$b^{\log_b N} = N$$

- $5^{\log_5 3} = 3$
- $12^{\log_{12}(x-4)} = 5 \Leftrightarrow x - 4 = 5$
  $\therefore x = 9$

PROPIEDADES GENERALES:

1) $\forall\, b > 0 ; b \neq 1$ $\quad \log_b 1 = 0$

2) $\forall\, b > 0 ; b \neq 1$ $\quad \log_b b = 1$

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

En $\mathbb{R}$ no existe el logaritmo para números negativos.

- $\log_7(-10)$ ¡No existe en $\mathbb{R}$!

twitter.com/calapenshko

PROPIEDADES OPERATIVAS

1) $\forall\ M, N > 0;\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M + \log_b N = \log_b (M \cdot N)$$

2) $\forall\ M, N > 0;\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M - \log_b N = \log_b \left(\frac{M}{N}\right)$$

3) $\forall\ M > 0;\ n \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M^n = n \cdot \log_b M$$

4) $\forall\ M > 0\ n \in \mathbb{R} - \{0\};\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M = \log_{b^n} M^n$$

CASOS ESPECIALES:

Considerando la existencia de los logaritmos en $\mathbb{R}$, tenemos:

1) $$\log_{(b^n)} (b^m) = \frac{m}{n}$$

2) $$\log_{(\sqrt[n]{b})} (\sqrt[n]{b}) = \frac{n}{m}$$

3) $$n = \log_b b^n$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Un sistema de logaritmos se genera al asumir el parámetro "b" un valor determinado, como: $b > 0;\ b \neq 1$ es fácil apreciar que existen infinitos sistemas de logaritmos, siendo los usuales los siguientes:

team CALAPENSHKO

SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES: También llamado sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos, aquí la base es el número inconmensurable e cuyo valor aproximado es: 2,7182

$$\log_e N = \ln N \; ; \; N > 0$$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES: También llamado sistema de logaritmos vulgares o logaritmo de Briggs, aquí la base es el número 10.

$$\log_{10} N = \log N \; ; \; N > 0$$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS

1) De logaritmo natural a decimal

$$\log N = 0{,}4343 \; . \; \ln N \; ; \; N > 0$$

2) De logaritmo decimal a natural

$$\ln N = 2{,}3026 \; . \; \log N \; ; \; N > 0$$

CAMBIO DE BASE

Dado un logaritmo en base "b" se le podrá representar en base "m" según la relación:

$$\log_b N = \frac{\log_m N}{\log_m b}$$

Donde: $N > 0 \wedge \{m, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

- $\log_3 12$ en base 5 será: $\log_3 12 = \dfrac{\log_5 12}{\log_5 3}$

CASO ESPECIAL: $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

- $\log_7 18 = \dfrac{1}{\log_{18} 7}$
- $\log_5 2 = \dfrac{1}{\log_2 5}$

team CALAPENSHKO

REGLA DE LA CADENA: Asumiendo la existencia de cada uno de los factores en el conjunto $\mathbb{R}$, se cumple:

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_b e$$

- $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 = \log_2 8$

  $= \log_2 2^3 = 3\log_2 2$

  $= 3 \cdot 1 = 3$

PROPIEDAD ADICIONAL: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^+ / b \neq 1$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

- $5^{\log_7 12} = 12^{\log_7 5}$
- $3^{\log 15} = 15^{\log 3}$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Analizaremos cada uno de los casos frecuentes, veamos:

1° Caso: $\log_b x = a$

Se cumple: $x > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $b^a = x$

2° Caso: $\log_b x = \log_b y$

Se cumple: $x > 0, y > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $x = y$

3° Caso: $b^x = a$

Se cumple: $a > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $\log_b b^x = \log_b a$

$x \cdot \log_b b = \log_b a$

$\therefore x = \log_b a$

team CALAPENSHKO

INECUACIONES EXPONENCIALES

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

1° Caso: Siendo $0 < b < 1$

$b^x < b^y \Rightarrow x > y$; $b^x \leq b^y \Rightarrow x \geq y$

$b^x > b^y \Rightarrow x < y$; $b^x \geq b^y \Rightarrow x \leq y$

2° Caso: Siendo $b > 1$

$b^x < b^y \Rightarrow x < y$; $b^x \leq b^y \Rightarrow x \leq y$

$b^x > b^y \Rightarrow x > y$; $b^x \geq b^y \Rightarrow x \geq y$

INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

1° Caso: Siendo $0 < b < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$\log_b x < \log_b y \Rightarrow x > y$; $\log_b x \leq \log_b y \Rightarrow x \geq y$

$\log_b x > \log_b y \Rightarrow x < y$; $\log_b x \geq \log_b y \Rightarrow x \leq y$

2° Caso: Siendo $b > 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$\log_b x < \log_b y \Rightarrow x < y$; $\log_b x \leq \log_b y \Rightarrow x \leq y$

$\log_b x > \log_b y \Rightarrow x > y$; $\log_b x \geq \log_b y \Rightarrow x \geq y$

COLOGARITMO (colog)

Teniendo en cuenta que: $N > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se define el cologaritmo del número "N" en la base "b" de la manera siguiente:

$$\operatorname{colog}_b N = -\log_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right)$$

- $\operatorname{colog}_{125} 25 = -\log_{125} 25$

$= -\log_{(5^3)} (5^2)$

$= -\frac{2}{3}$

team CALAPENSHKO

ANTILOGARITMO (antilog)

También llamado exponencial, considerando que $N \in \mathbb{R} \wedge b > 0,\ b \neq 1$. Se define el antilogaritmo del número "N" en la base "b" de la manera siguiente:

$$\text{anti}\log_b N = \exp_b N = b^N$$

- $\text{anti}\log_2 4 = 2^4 = 16$
- $\exp_3(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

RELACIÓN ENTRE OPERADORES:

Teniendo en cuenta que $\{x; b\} \subset \mathbb{R}^+ / b \neq 1$ se cumple:

1) $\text{anti}\log_b(\log_b x) = x$

2) $\text{anti}\log_b(\text{co}\log_b x) = x^{-1}$

3) $\log_b(\text{anti}\log_b x) = x$

4) $\text{co}\log_b(\text{anti}\log_b x) = -x$

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

FUNCIÓN EXPONENCIAL

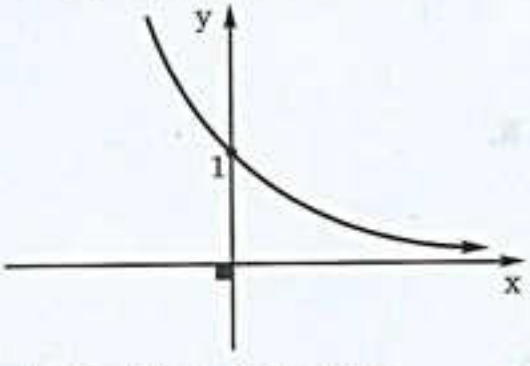
Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = \exp_b(x) = b^x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \langle 0; \infty \rangle$

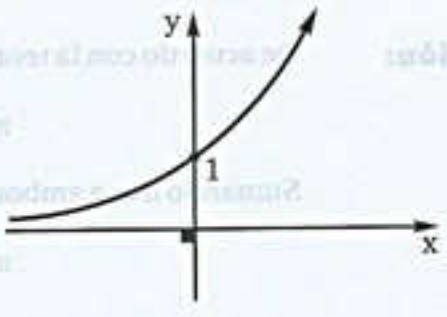
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F: y = F(x) = b^x;\ 0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F: y = F(x) = b^x;\ b > 1$



La función es creciente

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

La función exponencial es monótona e inyectiva,por lo último se afirma que dicha función admite inversa.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

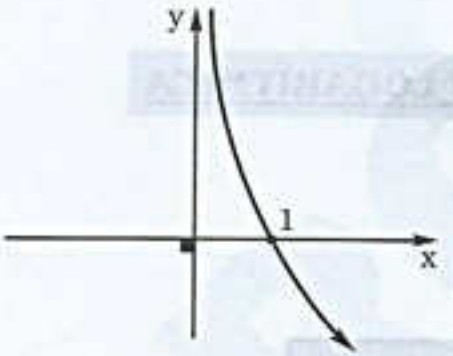
Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = \text{Log}_b x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R}^+ = \langle 0; \infty \rangle \wedge R_F = \mathbb{R}$

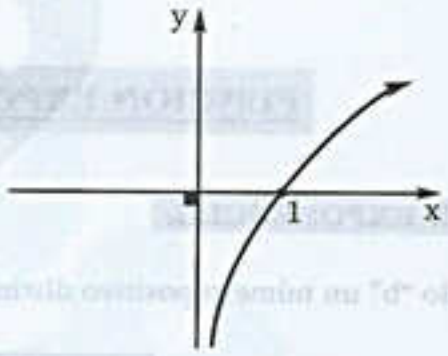
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F : y = F(x) = \log_b x \; ; \; 0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F : y = F(x) = \log_b x \; ; \; b > 1$



La función es creciente

OBSERVACIÓN

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y viceversa.

Ejemplo 1: Dada la función: $y = f(x) = \pi^{x-1} + 2$. Determine su rango.

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$\pi^{x-1} > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sumando dos a ambos miembros:

$$\pi^{x-1} + 2 > 0 + 2$$

$$y > 2$$

$$\therefore \quad \text{Ran}(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

team CALAPENSHKO

Ejemplo 2: Sean las funciones:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,y=F(x)=\sqrt{5}^{\,x-2}$$

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,y=G(x)=25^{x+1}$$

Determine el punto de intersección de las gráficas de F y G.

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$F(x)=G(x)$$

$$\sqrt{5}^{\,x-2}=25^{x+1} \;\leftrightarrow\; 5^{\frac{x-2}{2}}=5^{2x+2}$$

$$\frac{x-2}{2}=2x+2 \;\leftrightarrow\; x-2=4x+4$$

$$-6=3x \;\leftrightarrow\; x=-2$$

Ahora para la ordenada:

$$y=F(x)=\sqrt{5}^{\,x-2}$$

$$y=F(-2)=\sqrt{5}^{\,-4}=5^{-2}=\frac{1}{25}$$

$$\therefore\ P:\left(-2;\frac{1}{25}\right)$$

Ejemplo 3: Determine el dominio de la función cuya regla de correspondencia es:

$$y=F(x)=\log\left(\frac{x^2+x-12}{3x-4}\right)$$

Resolución: De acuerdo con la condición de existencia se establece lo siguiente:

$$\frac{x^2+x-12}{3x-4}>0$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{3x-4}>0$$

$$x\in\left\langle -4;\frac{4}{3}\right\rangle\cup\langle 3;\infty\rangle$$

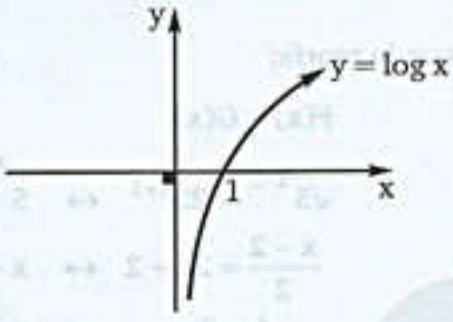
$$\therefore\ D_F=\left\langle -4;\frac{4}{3}\right\rangle\cup\langle 3;\infty\rangle$$

team CALAPENSHKO

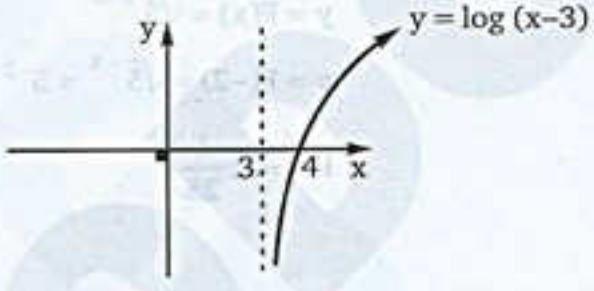
Ejemplo 4: Esbozar la gráfica de la función real de variable real F, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = -\log(-x-3)$$

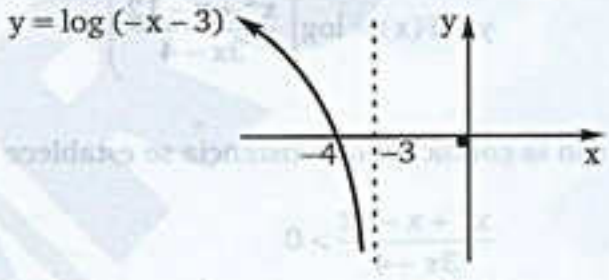
Resolución: Construimos la gráfica de F a partir de la gráfica de funciones básicas:



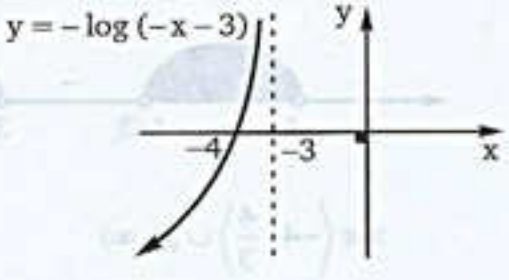
Desplazando 3 unidades a la derecha:



Simetría con respecto al eje y:



Finalmente simetría con respecto al eje x:



team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Mostrar el equivalente en cada caso:

A) $\log_2 4$ =

B) $\log_{\sqrt[3]{5}} 25$ =

C) $\log_9 27$ =

D) $\log_{\sqrt{2\sqrt{2}}} \sqrt[8]{4}$ =

E) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{7}$ =

2. Coloca en cada recuadro el signo de relación ($>$; $<$; $=$) que corresponde.

A) $\log 10$ ☐ $\log 1$

B) $\log_3 \sqrt{3}$ ☐ $\log_{\sqrt[4]{5}} 5$

C) $\log_5 \sqrt{5}$ ☐ $\log_7 \sqrt{7}$

D) $\log e$ ☐ $\log \pi$

E) $\log 0{,}1$ ☐ $\log 0{,}01$

3. Calcular x en cada caso.

A) $\log_x 4 = 2$

B) $\log_3(2x-1) = -1$

C) $\log_x(x+2) = 2$

D) $\log_x x^2 = \dfrac{x}{2}$

E) $\log_x \sqrt{x} = \sqrt{x}$

4. Reducir en cada caso.

A) $\log_x \sqrt{x} + \log_x \sqrt[3]{x} + \log_x \sqrt[6]{x}$; $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

B) $\log_x x^2 + \log_x x^4 + \log_x x^6$; $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

C) $2^{\log_2 5} - 10^{\log 2} + 7^{\log_7 4}$

D) $\log 1 - \log 10 + \log 100$

E) $5^{\log_2 7} + 2^{\log_4 9} - 7^{\log_2 5}$

5. Marcar verdadero (V) o falso (F)

A) $\log_{(-2)}(-2) = 1$ ..... ( )

B) $\log_1 1 = 1$ ..... ( )

C) $\log_3(-27) = -3$ ..... ( )

D) $\log_x x^2 = 2;\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ ..... ( )

E) $x^{\log_x 4} = 4;\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ ..... ( )

6. Reducir en cada caso.

A) $\log 10 - \ln e + \log_{(10e)} 10e$

B) $\operatorname{colog} 100 + \operatorname{colog} 10 - \log 1$

C) $\log \sqrt{10} + \operatorname{colog} \sqrt[3]{10}$

D) $\operatorname{anti}\log_2 4 + \operatorname{anti}\log_5 - 1$

E) $\log 10 + \operatorname{colog} 10 + \operatorname{anti}\log 1$

7. Calcular x en cada caso:

A) $\log_4 x = 2$

B) $\log_2 5 \cdot \log_5 16 = x + 1$

C) $\operatorname{anti}\log_2 x = 32$

D) $\operatorname{colog}_5 125 - x = \log_7 49$

E) $\operatorname{colog}_x x^2 + \log_x x^4 = x + 2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Calcular el logaritmo de $\sqrt[3]{16}$ en base $\sqrt[4]{2}$

Resolución: Sea "x" el logaritmo:

$$\log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt[3]{16} = x$$

Por definición tenemos:

$$\sqrt[4]{2}^{x} = \sqrt[3]{16}$$

En función de la base 2:

$$\sqrt[4]{2}^{x} = \sqrt[3]{2}^{4}$$

$$2^{\frac{x}{4}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

Ahora por teorema tenemos:

$$\frac{x}{4} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{16}{3}$$

PROBLEMA 2 Reducir:

$$K = \log_x \sqrt{x} + \log_x \sqrt[3]{x} + \log_x \sqrt[6]{x} \; ; \; x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Resolución: La expresión dada es:

$$K = \log_x x^{\frac{1}{2}} + \log_x x^{\frac{1}{3}} + \log_x x^{\frac{1}{6}}$$

Por propiedad tenemos:

$$K = \frac{1}{2} . \log_x x + \frac{1}{3} . \log_x x + \frac{1}{6} \log_x x$$

$$K = \frac{1}{2} . 1 + \frac{1}{3} . 1 + \frac{1}{6} . 1$$

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$K = \frac{3+2+1}{6}$$

$$K = \frac{6}{6}$$

$$\therefore \quad K = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 3 Proporcionar el equivalente de:

$$\log e^{\log_{16} 64^{\ln 100}}$$

Resolución: Sea K el equivalente, luego por propiedades se tendrá:

$$K = \log e^{\log_{16} 64^{\ln 100}} = \log e^{\ln 100 \,.\, \log_{16} 64}$$

$$K = \log[e^{\ln 100}]^{\log_{16} 64} = \log[100]^{\log_{16} 64}$$

$$* \ \log_{16} 64 = \log_{(4^2)} (4^3) = \frac{3}{2}$$

$$K = \log[100]^{\frac{3}{2}} = \log 10^3 = 3 \,.\, \log 10$$

$$K = 3 \,.\, 1$$

$$\therefore \ K = 3$$

PROBLEMA 4 Reducir:

$$F = \frac{1 - \operatorname{colog}_5 7}{1 + \operatorname{colog}_5 7} + \frac{1 - \operatorname{colog}_7 5}{1 + \operatorname{colog}_7 5}$$

Resolución: La expresión dada se puede representar así:

$$F = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{1 + \log_7 5}{1 - \log_7 5}$$

$$F = \frac{1 + \dfrac{1}{\log_7 5}}{1 - \dfrac{1}{\log_7 5}} + \frac{1 + \log_7 5}{-(\log_7 5 - 1)}$$

$$F = \frac{\log_7 5 + 1}{\log_7 5 - 1} - \frac{1 + \log_7 5}{\log_7 5 - 1}$$

$$\therefore \ F = 0$$

PROBLEMA 5 Calcular:

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} 2$$

Resolución: Iniciando la transformación a partir de la derecha, se tendrá:

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\,2}$$

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \log_{\sqrt{8}} 2$$

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \log_8 (2^2)$$

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \log_{(2^3)} (2^2)$$

$$M = \log_{16} \log_{(4/9)} \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$M = \log_{16} \log_{\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$M = \log_{16} \log_{\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M = \log_{16} \left(\frac{1}{2}\right) = \log_{(2^4)} (2^{-1}) = \frac{-1}{4}$$

$$\therefore \quad M = -\frac{1}{4}$$

PROBLEMA 6 Determine el dominio de la función: $y = f(x) = \log_4(\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x))$

Resolución: Por existencia en $\mathbb{R}$ se plantea:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) > 0$$

Reescribiendo la inecuación:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) > \log_{\frac{1}{2}}(1)$$

Por ser función decreciente:

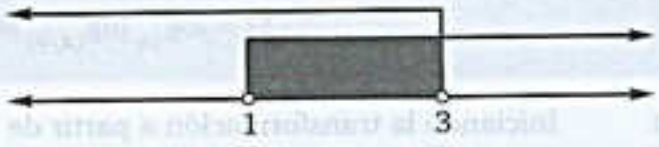
$$\log_3 x > 0 \quad \wedge \quad \log_3 x < 1$$

$$\log_3 x > \log_3 1 \quad \wedge \quad \log_3 x < \log_3 3$$

Por ser función creciente:

$$x > 1 \quad \wedge \quad x < 3$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore \quad \text{Dom}(f) = \langle 1; 3 \rangle$$

PROBLEMA 7 Resolver:

$$8^{x-2} \geq 4^{1-x}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: En función de la base 2: $(2^3)^{x-2} \geq (2^2)^{1-x}$

$$2^{3x-6} \geq 2^{2-2x}$$

Por propiedad tenemos: $3x-6 \geq 2-2x$

$$5x \geq 8$$

$$x \geq \frac{8}{5} \leftrightarrow x \in \left[\frac{8}{5}; \infty\right\rangle$$

$$\therefore \ CS = \left[\frac{8}{5}; \infty\right\rangle$$

PROBLEMA 8 Dada la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log_{(x-2)}(x^2-9)$
Determine su dominio.

Resolución: Por condición de existencia:

$$\underbrace{x^2-9>0 \quad \wedge \quad x-2>0; x-2\neq 1}_{(x+3)(x-3)>0 \quad \wedge \quad x-2>0; x\neq 3}$$

$$x>3 \ ; \ x\neq 3$$

$$\therefore \ Dom(f) = \langle 3; \infty\rangle$$

PROBLEMA 9 Resolver:

$$1+2\log x - \log(7x+12) = 0$$

Resolución: Por condición de existencia se plantea:

$$x>0 \ \wedge \ 7x+12>0 \ \Leftrightarrow \ x>0 \ \wedge \ x>-\frac{12}{7}$$

De donde: $x>0$ ..... (1)

La ecuación dada es:

$$1+2\log x - \log(7x+12) = 0$$

$$\log 10 + \log x^2 = \log(7x+12)$$

$$\log(10x^2) = \log(7x+12)$$

$$10x^2 = 7x+12$$

$$10x^2 - 7x - 12 = 0$$

$$(5x+4)(2x-3) = 0$$

$$x = -\frac{4}{5} \quad \text{ó} \quad x = \frac{3}{2}$$

De (1) tenemos $x > 0$: $x = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad C.S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

PROBLEMA 10 Resolver:

$$\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} - \log 1{,}2 = 1$$

Resolución: Teniendo en cuenta a la condición de existencia procedemos a resolver la ecuación:

$$\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} = \log 1{,}2 + 1$$

$$\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} = \log 1{,}2 + \log 10$$

$$\log(\sqrt{x+14} \,.\, \sqrt{x+7}) = \log 12$$

$$\sqrt{(x+14)} \,.\, \sqrt{(x+7)} = 12$$

$$(x+14) \,.\, (x+7) = 144$$

$$x^2 + 21x - 46 = 0$$

$$x \quad 23 \rightarrow x = -23$$

$$x \quad -2 \rightarrow x = 2$$

Una rápida inspección en la ecuación original permite observar que: $x = -23$ no es la solución, en consecuencia sólo se acepta como solución $x = 2$.

$$\therefore \quad C.S = \{2\}$$

PROBLEMA 11 El menor valor que asume "x" en:

$$5^{\log_{11}(x^2-7x+21)} = 3^{\log_{11}25}$$

es:

Resolución: La ecuación mostrada se podrá expresar así:

$$5^{\log_{11}(x^2-7x+21)} = 25^{\log_{11}3}$$

$$5^{\log_{11}(x^2-7x+21)} = 5^{2\log_{11}3}$$

$$5^{\log_{11}(x^2-7x+21)} = 5^{\log_{11}9}$$

De donde: $x^2 - 7x + 21 = 9$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-4) \,.\, (x-3) = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

$\therefore$ Menor valor de x es 3

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 12 Resolver:

$$x^{\log x} = \left(\frac{10^3}{x}\right)^4$$

Resolución: La ecuación dada es:

$$x^{\log x} = \frac{10^{12}}{x^4}$$

Tomando logaritmo decimal a ambos miembros tenemos:

$$\log x^{\log x} = \log\left(\frac{10^{12}}{x^4}\right)$$

$$\log x \,.\, \log x = \log 10^{12} - \log x^4$$

$$(\log x)^2 = 12 \,.\, \log 10 - 4 \,.\, \log x$$

$$(\log x)^2 = 12 - 4 \,.\, \log x$$

$$(\log x)^2 + 4(\log x) - 12 = 0$$

$$(\log x + 6) \,.\, (\log x - 2) = 0$$

De donde: $\log x = -6$ ó $\log x = 2$

$x = 10^{-6}$ ó $x = 10^2$

$\therefore$ C.S $= \{10^{-6}, 10^2\}$

PROBLEMA 13 Esbozar la gráfica de la función: $y = F(x) = \left|\log_{\left(\frac{1}{e}\right)}(x-e)\right| + e$

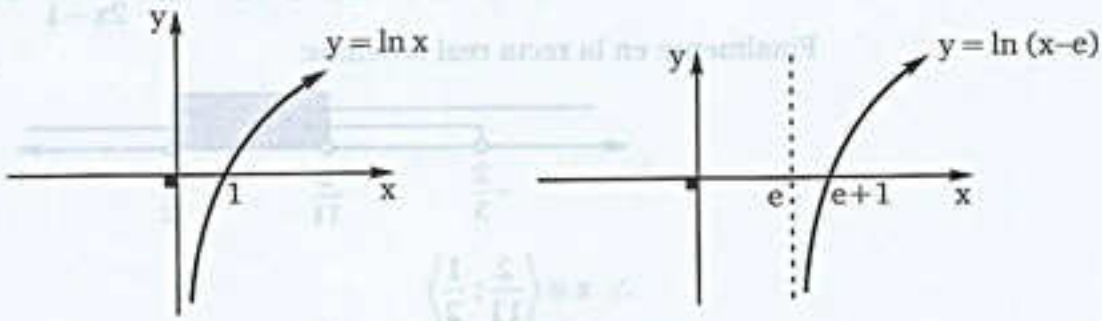
Resolución: La función se puede reescribir así:

$$F(x) = |\log_e (x-e)^{-1}| + e$$

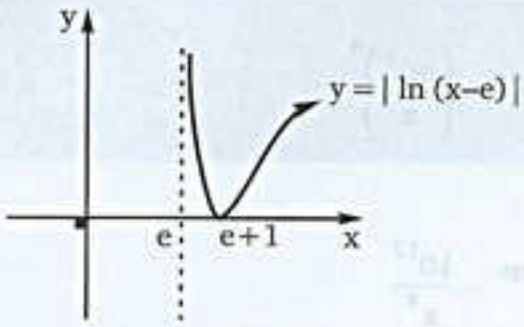
$$F(x) = |-\ln(x-e)| + e$$

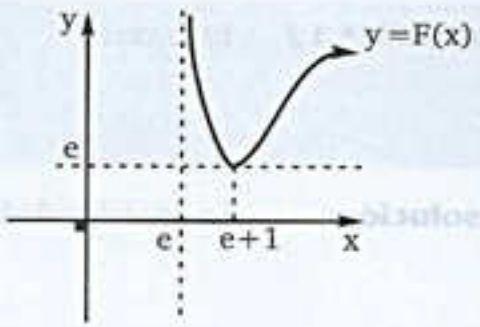
$$F(x) = |\ln(x-e)| + e$$

Ahora por desplazamientos y giros:



team CALAPENSHKO





PROBLEMA 14 Sean las funciones: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x) = 2^{x+1}$

$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = G(x) = \log_2 x + 1$

Determine x_0 tal que: $F(G(x_0)) = 12$

Resolución: Hallemos la composición:

$$F(x) = 2^{x+1} \rightarrow F(G(x)) = 2^{G(x)+1}$$

$$F(G(x)) = 2^{(\log_2 x + 1)+1} = 2^{\log_2 x + 2}$$

$$F(G(x)) = 2^{\log_2 x} \cdot 2^2 = x \cdot 4 = 4x$$

Por condición se plantea:

$$F(G(x_0) = 12 \leftrightarrow 4x_0 = 12$$

$$\therefore \; x_0 = 3$$

PROBLEMA 15 Resolver: $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

Resolución: La inecuación dada equivale a esta otra:

$$\log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > 2 \quad \wedge \quad 3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0$$

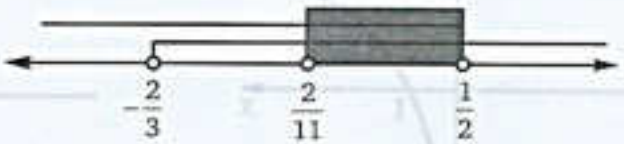
$$\log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > \log_2 4 \quad \wedge \quad 3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0$$

$$\left\{\frac{3x+2}{1-2x} > 0 \; \wedge \; \frac{3x+2}{1-2x} > 4\right\} \; \wedge \; \{3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0\}$$

$$3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0 \quad \wedge \quad \frac{3x+2}{1-2x} > 4$$

$$3x+2>0 \; \wedge \; 2x-1<0 \quad \wedge \quad \frac{11x-2}{2x-1} < 0$$

Finalmente en la recta real tenemos:



$$\therefore \; x \in \left\langle \frac{2}{11}; \frac{1}{2} \right\rangle$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 16 Calcular: x^2+1; si x verifica:

$$(\log_x 9)^2 - 4(\log_x 9) + 4 = 0$$

Resolución:

Examinando el 1er miembro, logramos reconocer que:

$$(\log_x 9)^2 - 4(\log_x 9) + 2^2 = 0$$

Sustituyendo lo indicado por un T. C. P., se establece:

$$(\log_x 9 - 2)^2 = 0$$

Elevando ambos miembros al exponente 1/2, se tiene:

$$\log_x 9 - 2 = 0$$

Transponiendo términos, se consigue que:

$$\log_x 9 = 2$$

Por definición de logaritmo, se puede plantear que:

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

Como x es base de un logaritmo, ésta debe ser de signo (+):

$$x = 3$$

$$\therefore \; x^2 + 1 = 10$$

PROBLEMA 17 Encontrar el valor de "x" de tal manera que verifique la siguiente ecuación:

$$x \log 3 + \log(\log 3) = \log(3 \log 27)$$

Resolución:

Tal como hicimos en los ejercicios anteriores, trataremos de presentar dos logaritmos, uno en cada miembro de la igualdad dada. Veamos:

Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia, se tendrá:

$$\log 3^x + \log(\log 3) = \log(3 \log 27)$$

Utilizando la propiedad para logaritmo de un producto, tendremos:

$$\log [3^x (\log 3)] = \log (3 \log 27)$$

Por comparación, se puede establecer:

$$3^x (\log 3) = 3 \log 27$$

Transformando el log 27, tendremos:

$$3^x . \log 3 = 3 . \log 3^3$$

Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$3^x . \log 3 = 9 . \log 3$$

Simplificando, nos queda:

$$3^x = 9 = 3^2$$

Finalmente se observa que:

$$\therefore \; x = 2$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Se sabe que:

$$\log_b^{-1} a + \log_b^{-1} c = x;$$

Calcular el equivalente de :

$$c^{\log_b\left(\frac{a^x}{b}\right)}$$

Resolución: Sea T el equivalente pedido, luego al aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente, se tendrá:

$$T = c^{\log_b a^x - \log_b b}$$

Por la propiedad del logaritmo de una potencia y del logaritmo de la misma base, se obtiene:

$$T = c^{x\log_b a - 1} \quad \text{.....(I)}$$

Trabajando ahora con el dato, se establece que:

$$\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_b c} = x$$

Transponiendo términos, se obtiene:

$$\frac{1}{\log_b c} = x - \frac{1}{\log_b a}$$

Efectuando operaciones, se logra establecer:

$$\frac{1}{\log_b c} = \frac{x\log_b a - 1}{\log_b a}$$

Reacomodando la igualdad, concluimos que:

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} = x\log_b a - 1$$

Podemos reconocer que el primer miembro representa a un cambio de base (a base b), luego:

$$\log_c a = x.\log_b a - 1 \quad \text{.....(II)}$$

Al sustituir (II) en (I) se consigue:

$$T = c^{\log_c a}$$

Finalmente aplicamos la igualdad fundamental del logaritmo:

$$\therefore\ T = a$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 19 El equivalente de la siguiente expresión:

$$\log_a \sqrt[n]{n} + \log_a \sqrt[\log_a an]{n + \log_a n^n} \text{ ; es :}$$

Resolución: Sea T el equivalente de la expresión dada:

$$T = {}^{\log_a \sqrt[n]{n} + \log_a \sqrt[\log_a an]{n + \log_a n^n}}$$

Aplicando la propiedad del logaritmo para un producto en el índice y empleando la igualdad fundamental en el radicando para sustituir a "n", se obtiene:

$$T = {}^{\log_a \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[\log_a an]{\right)}} \sqrt{\log_a a^n + \log_a n^n}$$

Agrupando en el índice del radical, los radicales del mismo índice y aplicando la propiedad del logaritmo de un producto en el radicando, tendremos:

$$T = {}^{\log_a \sqrt[n \log_a an]{}} \sqrt{\log_a \left(a^n \cdot n^n\right)}$$

Expresando el radical del índice en un fraccionario y aplicando los teoremas de exponentes en el radicando, se tendrá:

$$T = {}^{\log_a [n \log_a (an)]^{\frac{1}{n}}} \sqrt{\log_a (a.n)^n}$$

Aplicando la propiedad del logaritmo para una potencia, se logra establecer que:

$$T = {}^{\frac{1}{n} \cdot \log_a [n \log_a (an)]} \sqrt{[n \log_a (a.n)]} \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

Tener en cuenta que:

$$[n \log_a (an)] = a^{\log_a [n \log_a (an)]} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

Luego reemplazando (II) en (I):

$$T = {}^{\frac{1}{n} \cdot \log_a [n \log_a (an)]} \sqrt{a^{\log_a [n + \log_a (an)]}}$$

Simplificando se obtiene:

$$T = \sqrt[n]{a}$$

$$\therefore \quad T = a^n$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 20 Resolver:

$$\log_2 x > \log_2(2-x^2)$$

Resolución: De acuerdo con la teoría, la inecuación dada es equivalente al siguiente conjunto de desigualdades:

$$x>0 \ \wedge \ 2-x^2>0 \ \wedge \ x>2-x^2$$

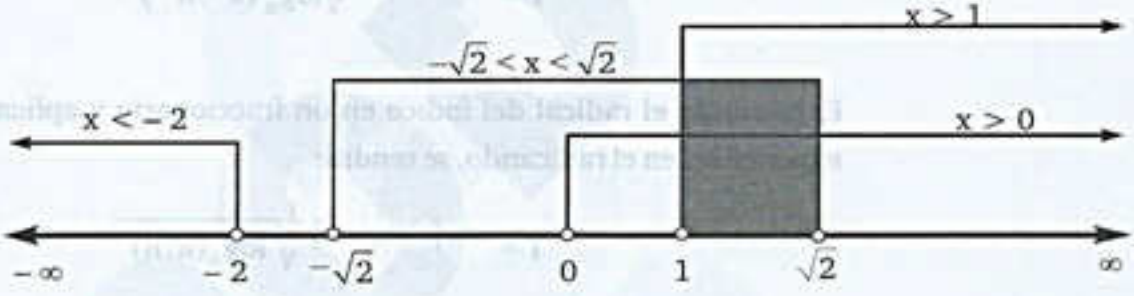
Transponiendo términos y reacomodando:

$$x>0 \ \wedge \ x^2-2<0 \ \wedge \ x^2+x-2>0$$

Descomponiendo en factores los primeros miembros de las desigualdades, tendremos que:

$$x>0 \ \wedge \ (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0 \ \wedge \ (x+2)(x-1)>0$$

Finalmente llevamos las soluciones de estas inecuaciones a la recta numérica e intersectando los intervalos, logramos determinar al intervalo solución:



$$\therefore \ x \in \langle 1;\sqrt{2}\rangle$$

PROBLEMA 21 El valor aproximado de x en: $\log_2 x = 2^{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+.....}}}}$ es:

Resolución: Supongamos que:

$$L=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+.....}}} \ \rightarrow \ L=\sqrt{12+L} \ ; \ L>0$$

$$L^2=12+L \quad \leftrightarrow \ L^2-L-12=0$$

$$(L-4).(L+3)=0 \quad \leftrightarrow \ L=4 \ \vee \ L=-3$$

Como L > 0, aceptamos L = 4. Ahora la igualdad propuesta inicialmente será:

$$\log_2 x = 2^4 \ \leftrightarrow \ \log_2 x = 16$$

$$\therefore \ x=2^{16}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 22 Si: $\log_x \sqrt{x^3\sqrt[5]{x}} = y$; $x > 1$. Calcular: $E = \log_{\left(\frac{5}{8}\right)} y$

Resolución: Observa que:

$$\sqrt{x^3\sqrt[5]{x}} = \sqrt[10]{x^{16}} = \sqrt[5]{x^8} = x^{\frac{8}{5}}$$

Ahora se tendrá:

$$\log_x x^{\frac{8}{5}} = y \quad \leftrightarrow \quad \frac{8}{5}.\log_x x = y$$

$$\frac{8}{5}.1 = y \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{8}{5}$$

Finalmente tenemos:

$$E = \log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{8}{5}\right) = \log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$$

$$E = -1.\log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{5}{8}\right) = -1.1$$

$$\therefore E = -1$$

PROBLEMA 23 Reducir: $E = \log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

Resolución: La expresión dada es:

$$E = \log_{\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\sqrt[3]{\frac{50}{125}}\right) + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\sqrt{\frac{15}{25}}\right) + \log_{\left(\frac{8}{25}\right)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$E = \log_{\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right) + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \log_{\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{5}}\right)$$

$$E = \log_{\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \log_{\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por propiedad:

$$E = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore E = \frac{4}{3}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 24 Calcular: $E = \sqrt[3]{x}$, si: $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(\log_2 x - 1) + 2\right) = 0$

Resolución: Por condición se debe cumplir que:

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(\log_2 x - 1) + 2 = 1$$

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(\log_2 x - 1) = -1$$

Por definición de logaritmos:

$$\log_2 x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$\log_2 x = 3 \quad \leftrightarrow \quad 2^3 = x$$

$$x = 8 \quad \rightarrow \quad E = \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore E = 2$$

PROBLEMA 25 Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que: $\log_b a + \log_a b = 3$.

Calcular: $E = \log^2_b a^2 + \log^2_a b^2$

Resolución: Se pide calcular:

$$E = \left(\log_b a^2\right)^2 + \left(\log_a b^2\right)^2$$

$$E = \left(2\log_b a\right)^2 + \left(2\log_a b\right)^2$$

$$E = 4\log^2_b a + 4\log^2_a b$$

$$E = 4\left(\log^2_b a + 4\log^2_a b\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por condición tenemos:

$$\log_b a + \log_a b = 3$$

Elevando al cuadrado:

$$\log^2_b a + \log^2_a b + 2.\log_b a.\log_a b = 9$$

Por propiedad tenemos:

$$\log^2_b a + \log^2_a b + 2(1) = 9$$

$$\log^2_b a + \log^2_a b + 2 = 9 \quad \leftrightarrow \quad \log^2_b a + \log^2_a b = 7$$

team CALAPENSHKO

Finalmente en (1) se tendrá:

$$E = 4(7)$$

$$\therefore E = 28$$

PROBLEMA 26 Resolver:

$$\log_4(20x - 34) = 2 + \log_2(x - 5)$$

Resolución: La ecuación propuesta es:

$$\log_4(20x - 34) = 2 + \log_4(x - 5)^2$$

$$\log_4(20x - 34) - \log_4(x - 5)^2 = 2$$

Por propiedad tenemos:

$$\log_4\left[\frac{20x - 34}{(x - 5)^2}\right] = 2$$

De acuerdo con la definición:

$$16 = \frac{20x - 34}{(x - 5)^2} \leftrightarrow 16 = \frac{20x - 34}{x^2 - 10x + 25}$$

Resolviendo la ecuación:

$$8 = \frac{10x - 17}{x^2 - 10x + 25} \leftrightarrow 8(x^2 - 10x + 25) = 10x - 17$$

$$8x^2 - 80x + 200 = 10x - 17 \leftrightarrow 8x^2 - 90x + 217 = 0$$

$$(4x - 31)(2x - 7) = 0 \leftrightarrow 4x = 31 \vee 2x = 7$$

De donde podemos notar que:

$$x = \frac{31}{4} \vee x = \frac{7}{2}$$

Por existencia sólo aceptamos:

$$x = \frac{31}{4}$$

$$\therefore CS = \left\{\frac{31}{4}\right\}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 27 Reducir:

$$E = \operatorname{colog}_6 \operatorname{antilog}_8(\log_2 3 + 1) + \operatorname{antilog}_6 \operatorname{colog}_6(2^{-1})$$

Resolución: La expresión dada es:

$$E = \operatorname{colog}_6\left[8^{\log_2 3+1}\right] + 6^{\operatorname{colog}_6(2^{-1})}$$

$$E = -\log_6\left[8^{\log_2 3}.\,8\right] + 6^{-\log_6(2^{-1})}$$

$$E = -\log_6\left[8^{\log_8 27}.\,8\right] + 6^{\log_6(2)}$$

$$E = -\log_6[27\,.\,8] + (2)$$

$$E = -\log_6(216) + 2 \quad \leftrightarrow \quad E = -\log_6(6^3) + 2$$

$$E = -3\log_6 6 + 2 \quad \leftrightarrow \quad E = -3 + 2$$

$$\therefore\ E = -1$$

PROBLEMA 28 Resolver:

$$|\log_5 x|^2 + 5\left|\log_5\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 14$$

Resolución: La inecuación dada es:

$$|\log_5 x|^2 + 5\left|\log_5 x^{-1}\right| - 14 < 0$$

$$|\log_5 x|^2 + 5|-\log_5 x| - 14 < 0$$

$$|\log_5 x|^2 + 5|\log_5 x| - 14 < 0$$

Dando uso del aspa simple:

$$(|\log_5 x| + 7)(|\log_5 x| - 2) < 0$$

Simplificando tenemos:

$$|\log_5 x| - 2 < 0 \quad \leftrightarrow |\log_5 x| < 2$$

Ahora debemos plantear:

$$x > 0 \ \wedge\ -2 < \log_5 x < 2$$

team CALAPENSHKO

$$x > 0 \wedge \log_5 5^{-2} < \log_5 x < \log_5 5^2$$

$$x > 0 \wedge 5^{-2} < x < 5^2$$

$$x > 0 \wedge \frac{1}{25} < x < 25$$

En la intersección queda:

$$\frac{1}{25} < x < 25$$

$$\therefore CS = \left\langle \frac{1}{25}; 25 \right\rangle$$

PROBLEMA 29 Resolver:

$$x^{\frac{1}{\log x}} . \log x < 1$$

Resolución: Observa que: $\frac{1}{\log x} = \log_x 10$, luego la inecuación propuesta se puede reescribir de la manera siguiente:

$$x^{\log_x 10} . \log x < 1 \quad \leftrightarrow \quad 10 \log x < 1$$

$$\log x < \frac{1}{10} \quad \leftrightarrow \quad \log x < \log (10)^{\frac{1}{10}}$$

Ahora se plantea:

$$x > 0 \wedge x < (10)^{\frac{1}{10}}$$

$$x > 0 \wedge x < \sqrt[10]{10} \quad \leftrightarrow \quad 0 < x < \sqrt[10]{10}$$

Como x es base, $x \neq 1$:

$$0 < x < 1 \vee 1 < x < \sqrt[10]{10}$$

$$\therefore CS = \left\langle 0; \sqrt[10]{10} \right\rangle - \{1\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Si: $2^x \leq \log_2 x^{-m} + 2$. Determine el menor valor entero positivo de "m", de modo que $\langle 0; 1]$ sea el conjunto solución de la inecuación propuesta.

Resolución: Por condición se plantea:

$$0 < x \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad 2^0 < 2^x \leq 2^1$$

$$1 < 2^x \leq 2 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

La inecuación inicial es:

$$2^x \leq \log_2 x^{-m} + 2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2) se debe cumplir:

$$\log_2 x^{-m} + 2 \geq 2$$

$$\log_2 x^{-m} \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \log_2 x^{-m} \geq \log_2 1$$

$$x^{-m} \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad x^{-m} \geq x^0$$

De donde se puede observar:

$$-m \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad m \geq 0$$

Los enteros positivos "m" son:

$$m = 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\ldots$$

$$\therefore \; m = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si:

$$y = 3 + \sqrt{1\sqrt{1\sqrt{1...}}}$$

$$x = 32 + \sqrt{32\sqrt{32\sqrt{32...}}}$$

Calcular:

$$z = \log_x y$$

A) 0 B) 4 C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

2. Evaluar la expresión:

$$P = \log_2 16 - \log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{1/2} 8$$

A) –4 B) –5 C) 0

D) 1 E) 5

3. Hallar el cologaritmo en base e de $\sqrt{e}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1

D) –1 E) $-\frac{1}{2}$

4. El valor del producto de los factores:

$$P = \left(\log_{x^4} 1000\right)\left(\log x^4\right)\left(\log_{(x^2+1)}(x^2+1)\right)$$

es:

A) 3 B) 4 C) 5

D) 1 E) 2

5. Calcular el valor más simple de la expresión:

$$E = \frac{1}{\log_5 6 + 1} + \frac{1}{\log_3 10 + 1} + \frac{1}{\log_2 15 + 1}$$

A) 3 B) 15 C) 30

D) 1 E) 2

6. Si:

$$c_k = \frac{k+1}{k}$$

Calcular:

$$E = \log_a c_1 + \log_a c_2 + \log_a c_3 + ... + \log_a c_{999}$$

Donde: $a = 10^{7/4}$

A) 0 B) 4 C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

7. Hallar el valor de:

$$E = \log_{b^2}(\text{anti}\log_{b^4} 8) - \text{anti}\log_{a^2}(\log_{a^{1/2}} 2)$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

8. Si: $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\log_{ab}(a) = 5$

Hallar:

$$\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{11}{3}$

D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{15}{3}$

9. Si: $p, q \in \langle 1; +\infty)$ y $\log_{pq}(q) = 5$

Hallar el valor de:

$$E = \log_{pq}\left(\frac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt[5]{p^{-1}}}\right)$$

A) 4 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) 0

10. Simplificar:

$$a^{\left(\frac{1+\log_a b}{1+\log_b a}\right)\log_b c} + b^{\left(\frac{1+\log_b a}{1+\log_a b}\right)\log_a c}$$

A) 2a B) 2b C) 2c
D) ab E) c^2

11. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$$

A) {1} B) {2} C) {1; 2}
D) {3} E) {1; 2; 3}

12. Si:

$$m > 1;\ (\log_5 y)^{\log_5 m} = m$$

Hallar el valor de y.

A) 5^3 B) 5^6 C) 5^2
D) 5^4 E) 5^5

13. Resolver la inecuación

$$\log_4(x-3) \le \log_4\left(\frac{1}{2}x+2\right)$$

A) ⟨2; 5] B) ⟨3; 10] C) [4; 12⟩
D) [12; 15⟩ E) ⟨7; 14]

14. Determine el dominio máximal de la función F cuya regla de correspondencia es:

$$F: y = F(x) = \ln\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+1\right)$$

A) [–2; 2]
B) ⟨–2; 2⟩
C) ⟨–∞; –2⟩ ∪ [2; ∞⟩
D) $\mathbb{R}$
E) ⟨–∞; 1] ∪ [4; ∞⟩

15. Sea la función:

$$F(x) = e^{\text{sen}(x)}$$

para satisfacer $F(x) < 0$; es necesario que:

A) $0 < x < \frac{\pi}{2}$
B) $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$
C) $0 \le x < 2\pi$
D) $0 \le x < \pi$
E) No existe tal x

16. De la igualdad:

$$\log_{1/3}\left[\log_4(x^2-5)\right] > 0$$

A) $x \in \langle -3; -\sqrt{6}\rangle$ B) $x \in \langle \sqrt{6}; 3\rangle$
C) A ó B
D) ⟨–3; 3⟩ E) $\langle -\sqrt{6}; \sqrt{6}\rangle$

17. Resolver la inecuación:

$$\log_2^2 x + 6\log_2 x \ge 16$$

A) $x \in \langle 0; 2^{-4}] \cup [2; +\infty\rangle$
B) $x \in \langle 0; 2^{-8}] \cup [4; +\infty\rangle$
C) $x \in \langle 0; 2^{-5}] \cup [3; +\infty\rangle$
D) $x \in \langle 0; 2^{-3}] \cup [8; +\infty\rangle$
E) $x \in \langle 0; 2] \cup [2; +\infty\rangle$

18. Sea la función:

$$F(x) = a^{3x^2-x-2}$$

tal que $0 < a < 1$. Para que sea $F(x) < 0$, es necesario que "x" verifique:

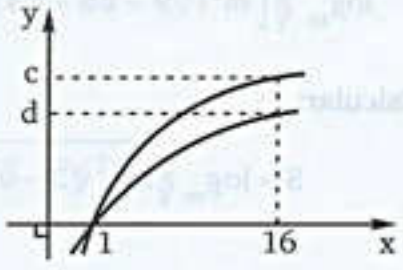
A) $-\frac{1}{3} < x < 2$ B) $x > 2$ C) $x < -\frac{1}{3}$
D) $x < 2$ E) $\nexists$ x

team CALAPENSHKO

19. Si se grafica:

$$F(x) = \log_4 x \ \wedge \ H(x) = \log_{16} x$$

se obtiene:



Calcular: c/d

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

20. Para qué valores está definida la expresión:

$$A = \sqrt{3\ln\sqrt{\ln x^5}}$$

A) $x \geq e^2$ B) $x \geq e^{5/2}$ C) $x \geq e^5$
D) $x \geq e^{1/5}$ E) $x \geq e$

21. Resolver:

$$\begin{cases} \log_x 3 > \log x^2 - 1 \\ \ln x^7 < \ln x^6 - 1 \end{cases}$$

A) $x > e$
B) $x > 10$
C) $x > 1/10$
D) $1/10 < x < 1/e$
E) $e < x < 10$

22. La solución de la inecuación:

$$2e^{-2x} + e^{-3x} < 3e^{-x}$$

es el conjunto:

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{0\}$ C) $[0; +\infty\rangle$
D) $\langle 0; +\infty\rangle$ E) $\langle -\infty; 0\rangle$

23. Halle el dominio de la función F, donde:

$$F(x) = \log_2 \log_2 \log_2 x$$

A) $\langle 2; \infty\rangle$ B) $\langle 4; \infty\rangle$
C) $[0{,}5; \infty\rangle$
D) $[0{,}125; \infty\rangle$ E) $\mathbb{R}^+$

24. Indicar uno de los intervalos solución al resolver:

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$$

A) $\left\langle 0; \frac{1}{8} \right\rangle$ B) $\left\langle 1; \frac{19}{8} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{4}; 12 \right\rangle$
D) $[4; 5\rangle$ E) $\langle 4; 5\rangle$

25. Hallar los valores de "x" que satisfacen la siguiente ecuación:

$$(|\log x| - 2)(|\log x + 1| - 3) \leq 0$$

A) $x \in [10^{-4}; 10^{-2}] \cup \{100\}$
B) $x \in [10^{-3}; 10^{-1}] \cup \{100\}$
C) $x \in [10^{-1}; 1] \cup \{10\}$
D) $x \in [10^{-4}; 10^{-1}] \cup \{10\}$
E) $x \in [10^{-1}; 10^{-2}] \cup \{100\}$

26. Si:

$$\log_b a = c \ ; \ c \neq 1$$

Expresar:

$$E = \frac{\log_b \sqrt{ab}}{\log_a \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

en términos de c.

A) $\frac{c(c+1)}{c-1}$ B) $\frac{c+1}{c-1}$ C) $\frac{c^2}{c-1}$
D) $\frac{c^2}{c+1}$ E) $\frac{c-1}{c+1}$

27. Si: $ab = c$

$$\log_b c + \log_a c = 1$$

Reducir:

$$\sqrt[4]{\frac{\log^5 a^3 + \log^5 b^3 + \operatorname{colog}^5 c^3}{\operatorname{colog} a \,.\, \operatorname{colog} b \,.\, \operatorname{colog} c}}$$

A) 4 B) 2 C) 1/2
D) 1 E) 0

28. Sabiendo que:

$$\log_{12} 18 = a \;;\; \log_{24} 54 = b$$

Reducir:

$$E = \frac{ab - a + b}{3a - 2b}$$

A) $\log_6 2$ B) $\log_2 6$ C) $\log_3 6$
D) $\log_3 2$ E) $\log_2 3$

29. Si se cumple que:

$$\log_b^2 a + 1 = x \log_b a \;;\; a > 1 \;\wedge\; b > 1$$

Calcular:

$$R = \frac{x^3 - 3x}{\log_b^3 a + \log_a^3 b}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

30. Indicar el valor de verdad de las expresiones:

I. $\log_{0,5} 2 > 0$

II. $\log_4 0{,}9 < 0$

III. $\log\left(\frac{1}{5}\right) < 0$

IV. $\log_e 5 < 0$

A) FFVF B) VVFV C) FVVF
D) VVVF E) FFFV

31. Sabiendo que "m" es un número positivo y diferente de la unidad el cual verifica:

$$\log_m \sqrt[3]{\left[m^2(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})\right]^4} = 2{,}6$$

Calcular:

$$S = \log_m \sqrt[4]{m^3\left[\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right]^3}$$

A) 183/80 B) 192/81 C) 39/20
D) 1/3 E) 1

32. Resolver:

$$\log \log_x x^x + \log_{x^2} x^{x^2} = 4$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. Hallar el conjunto solución de:

$$4x \log_5 x > (x^2 + 3) \log_5 x$$

A) $x \in \langle 0; 3\rangle - \{1\}$
B) $x \in \langle 0; 3\rangle$
C) $x \in \langle 0; 1\rangle$
D) $x \in \langle 0; 1\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$
E) $x \in \langle 1; 3\rangle$

34. Al resolver la desigualdad:

$$\log_2^2(x-1)^2 + \left|\log_2(x-1)\right| < 5$$

Indique los valores enteros que la verifican.

A) 1; 2; 3 B) 2 C) 1
D) 3 E) 1; 3

team CALAPENSHKO

35. Resolver la siguiente desigualdad:

$$(x^2-4)(e^{2x}-1)\leq 0$$

considerando que: $x > 0$

A) $x \in [-2; 2]$ B) $x \in \langle 0; 2]$
C) $x \in \langle 2; 2\rangle$
D) $x \in [0; 2]$ E) $x \in \langle 0; 2\rangle$

36. Indicar (V) o (F):

I. $\log_{0,3} 2 > 0$

II. $\log_{0,5} 0,4 < 0$

III. $\log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

IV. $\log_e 4 < 0$

A) FFVF B) VVFV C) FVVF
D) VVVF E) FFFV

37. Un capital "c" colocado a interés compuesto con capitalización semestral de intereses, se cuadruplica en 2 años. ¿En cuánto tiempo (en años) más el capital será 8c?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

38. Señalar cuál o cuáles de las afirmaciones:

I. $0 < x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$

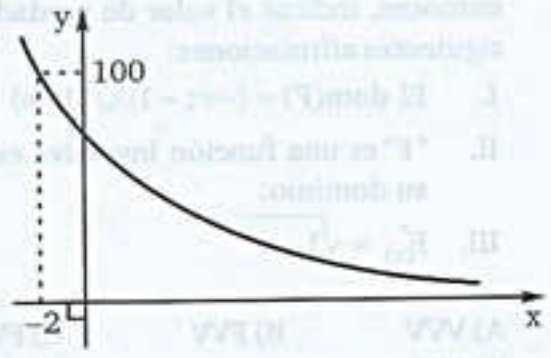
II. $0 < x < y \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

III. $0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x^n) < 0 \; ; n \in \mathbb{N}^*$

Son verdaderas:

A) Sólo I
B) Sólo I y III
C) Todas
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

39. Si F(x) es una función exponencial cuya gráfica se muestra:

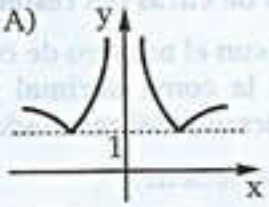


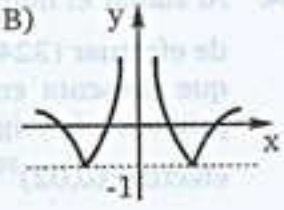
Determinar F(-3)

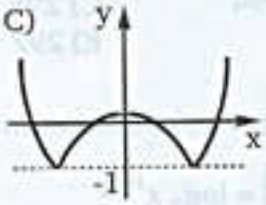
A) 1000 B) 100 C) 10000
D) 10^3 E) 10^{-2}

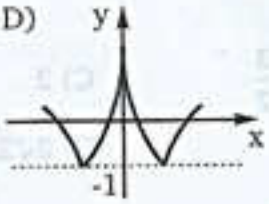
40. Hallar la gráfica de la función:

$$F(x) = \big|\text{Ln}\,|x|\big| - 1$$

A)


B)


C)


D)


E) N.A

41. Resolver:

$$|x|^{x^2-x-2} < 1$$

A) $\langle 2; 3\rangle$ B) $\langle 3; 4\rangle$ C) $\langle 1; 2\rangle$
D) $\langle 1; 4\rangle$ E) $\langle 1; +\infty\rangle$

team CALAPENSHKO

42. Si "F" es una función definida por:

$$F(x) = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$$

entonces, indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. El $dom(F) = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$

II. "F" es una función inyectiva en todo su dominio.

III. $F'_{(x)} = \sqrt{1+x^2}$

A) VVV B) FVV C) FVF
D) FFF E) VVF

43. Resolver:

$$\text{Ln}\left(e^2 + e^{2-x} - 1\right) \geq x \wedge x \in \mathbb{Z}^+$$

indicando como respuesta el cardinal de su conjunto solución.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

44. Al sumar el número de cifras del resultado de efectuar $(324)^{50}$ con el número de ceros que presenta entre la coma decimal y la primera cifra significativa del resultado de efectuar $(0{,}02)^{100}$, se obtiene:

A) 293 B) 294 C) 295
D) 296 E) 297

45. Indicar el producto de todas las soluciones de:

$$1 + \log_{(2x)}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_2 x^{\log_2 x}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

46. Resolver el sistema:

$$\log_y x = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

$$y = 1 + \log_x 2$$

donde : $x \neq y$. Indicar : $N = \sqrt[y]{x+y^2}$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 4 E) 1/4

47. Resolver: $(1{,}25)^{1-\log_{\frac{2}{3}} x} < (0{,}64)^{2+\log \sqrt{2}^x}$

A) $x > 5$
B) $0 < x < 1$
C) $x > 3 \vee 0 < z < 2$
D) $x > 32 \vee 0 < z < 1/2$
E) $x > 5 \vee 1 < x < 1/32$

48. Resolver:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}$$

A) $x \in [1; +0\rangle$
B) $x \in [1; 2]$
C) $x \in \langle 0; 1\rangle \cup [2; +\infty\rangle$
D) $x \in \langle 1; 2\rangle \cup [3; +\infty\rangle$
E) $x \in [1; 3]$

49. Con respecto a la ecuación:

$$(0{,}001)^{-x} = (x-100)^2$$

Marcar (V) o (F):

I. La ecuación no tiene solución alguna.

II. La ecuación tiene al menos una solución.

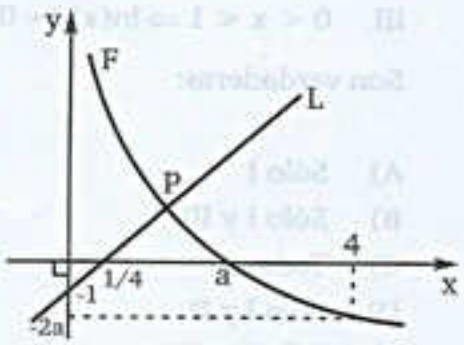
III. Una solución está contenida en el intervalo $\langle 0; 1\rangle$

IV. Una solución está contenida en el intervalo $\langle 1; 2\rangle$

A) FVFV B) FFFF C) FVFF
D) VVFF E) VVVV

50. En la figura F representa una función logarítmica y L una función lineal. Halle la suma de las coordenadas del punto "P".

A) $\frac{3}{2}$
B) $\frac{2}{3}$
C) 1
D) $\frac{1}{2}$
E) 2



team CALAPENSHKO

Capítulo 18

Límites

CAPACIDADES

- Identificar las formas determinadas e indeterminadas.
- Determinar los límites de las formas indeterminadas.

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS

Nació el 31 de octubre de 1815 y murió el 19 de febrero de 1897 fue un matemático alemán conocido como "el padre del análisis moderno". A pesar de haber dejado la universidad, estudió matemáticas y se entrenó como profesor, dando clases de matemáticas, física y botánica. Weierstrass formalizó la definición de la continuidad de una función, demostrando el teorema del valor medio y el teorema de Bolzano-Weierstrass usado después para estudiar las propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

Weierstrass nació en Ostenfelde, parte de Ennigerloh, provincia de Westfalia. Weierstrass fue el hijo de Wilhelm Weierstrass, un funcionario del gobierno, y Theodora Vonderforst. Su interés en las matemáticas comenzó cuando era estudiante en la escuela Theodoriamun en Paderborn. Fue enviado a la Universidad de Bonn para prepararse para conseguir una posición en el gobierno.

A partir de 1850 Weierstrass sufrió un largo periodo de enfermedad, pero pudo publicar documentos que le llevaron a la fama y la distinción. La Universidad de Königsberg le entregó un título de doctor honorario el 31 de marzo de 1854. En 1856 consiguió una plaza en el Gewerbeinstitut, la que más tarde se convertiría en la Universidad Técnica de Berlín. En 1864 se convirtió en profesor de la Universidad Friedrich-Wilhelms en Berlín, la que más tarde se hizo la Universidad Humboldt de Berlín. Los últimos 3 años de vida los pasó sin poder moverse, y terminó muriendo en Berlín de neumonía.

Weierstraß dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, que se siguen usando hoy en día. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel. También realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, etc.

team CALAPENSHKO

LÍMITES

NOCIÓN INTUITIVA DEL LÍMITE

Consideremos la función real de variable real F:

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} \qquad \text{.....(1)}$$

Nótese que F se define $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Si $x \neq 3$ entonces el equivalente de (1), luego de simplificar, es:

$$F(x) = x + 1 \qquad \text{.....(2)}$$

Ahora veamos que ocurre con el valor de F(x) a medida que acercamos x a 3, no haremos $x = 3$ pues $3 \notin$ Dom (F). Tomando valores que se aproximan a 3 por la izquierda:

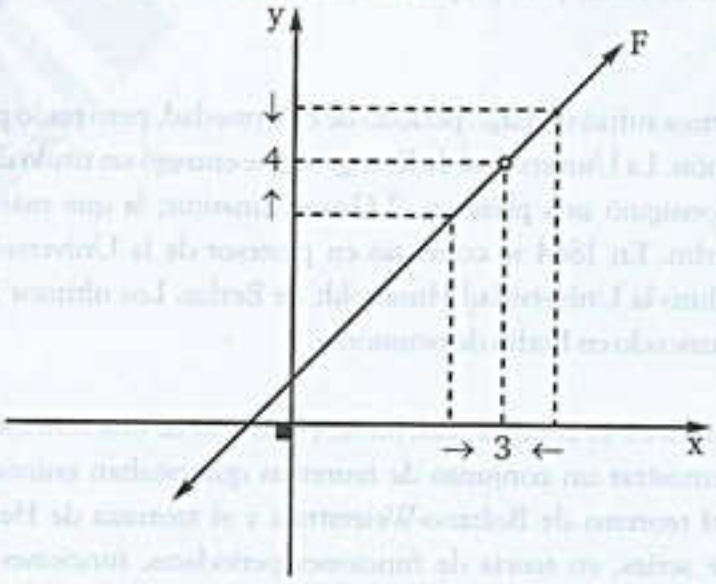
x	2,9	2,99	2,999	2,9995	2,9998	2,9999
F(x)	3,9	3,99	3,999	3,9995	3,9998	3,9999

Tomando valores que se aproximan a 3 por la derecha:

x	3,1	3,01	3,001	3,0005	3,0001	3,00005
F(x)	4,1	4,01	4,001	4,0005	4,0001	4,00005

De ambas tablas se observa que a medida que los valores de "x" se aproximan cada vez más a 3, F(x) se aproxima cada vez más a 4. Es decir cuando más cerca este x de 3 más cerca esta F(x) de 4.

Gráficamente:



Formalmente decimos que F admite a 4 por límite cuando "x" se acerca a 3 o que el límite de F(x) cuando "x" tiende a 3 es 4 y consensuadamente lo denotamos así: $\lim_{x \to 3} F(x) = 4$

team CALAPENSHKO

DEFINICIÓN

Dada la función F y considerando ε = Epsilon; σ = Delta, tenemos:

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

Al número real L se le llama Límite de la función en el punto a (a no necesariamente pertenece al dominio de la función F) si para cada $\varepsilon > 0$ es posible determinar un $\sigma > 0$ que dependa de a y ε tal que:

$$x \in Dom(F) \wedge 0 < |x - a| < \sigma \rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon$$

OBSERVACIÓN

Al punto "a" se le llama punto de acumulación o punto de amontonamiento.

LÍMITES LATERALES

1. LÍMITE LATERAL IZQUIERDO

Es el límite de F(x) en "a" restringido al intervalo $\langle -\infty; a \rangle$

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = L_1$$

Donde: $x \to a^- <> x < a$

2. LÍMITE LATERAL DERECHO

Es el límite de F(x) en "a" restringido al intervalo $\langle a; \infty \rangle$

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = L_2$$

Donde: $x \to a^+ <> x > a$

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

El límite $\lim_{x \to a} F(x) = L$ existe si y sólo si:

$$\lim_{x \to a^-} = \lim_{x \to a^+} = L$$

PROPIEDADES PARA CÁLCULO DE LÍMITES

1) Si F es una función algebraica definida en "a" tenemos:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

2) Si F es una función matemática que no está definida en "a" tenemos:

$$\lim_{x \to a} F(x) \neq F(a)$$

team CALAPENSHKO

TEOREMAS PARA CÁLCULO DE LÍMITES

1) Límite de la función constante:

$$\lim_{x\to a} k = k$$

2) Límite de la adición y/o sustracción:

$$\lim_{x\to a}[F(x)\pm G(x)] = \lim_{x\to a} F(x) \pm \lim_{x\to a} G(x)$$

3) Límite de la multiplicación:

$$\lim_{x\to a}[F(x).G(x)] = \lim_{x\to a} F(x).\lim_{x\to a} G(x)$$

4) Límite de la división:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} F(x)}{\lim\limits_{x\to a} G(x)};\ G(x)\neq 0$$

5) Límite de una potencia:

$$\lim_{x\to a}\left[F(x)^{G(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} F(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} G(x)}$$

6) Límite de una radicación:

$$\lim_{x\to a}\left[\sqrt[G(x)]{F(x)}\right] = \sqrt[\lim\limits_{x\to a} G(x)]{\lim_{x\to a} F(x)}$$

FORMAS DE LAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS

1. FORMAS DETERMINADAS

A) $\frac{0}{N}=0 \quad ; \quad \forall\, N\neq 0$

B) $\frac{N}{\infty}=0 \quad ; \quad \forall\, N\in\mathbb{R}$

C) $N^{\infty}=0 \quad ; \quad \forall\, N^2<1$

D) $N-N=0 \quad ; \quad \forall\, N\in\mathbb{R}$

E) $0\,.\,N=0 \quad ; \quad \forall\, N\in\mathbb{R}$

2. FORMAS NO DEFINIDAS

A) $\frac{N}{0}=+\infty \quad ; \quad N>0$

B) $\frac{N}{0}=-\infty \quad ; \quad N<0$

C) $N^{\infty}=\infty \quad ; \quad N^2>1$

OBSERVACIÓN

También son formas no definidas:

$$\infty+\infty \ ; \quad \infty\,.\,\infty \ ; \quad \infty^{\infty}$$

3. FORMAS INDETERMINADAS

A) $\frac{0}{0}$ B) $\frac{\infty}{\infty}$ C) $\infty-\infty$ D) $0\,.\,\infty$ E) 1^{∞}

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

LÍMITES DE LAS FORMAS INDETERMINADAS

1. PARA LA FORMA $\frac{0}{0}$

Si la función es racional se factoriza a sus términos para luego suprimir al factor que produce la indeterminación.

Si la función es irracional se racionaliza al menos uno de sus términos, a veces es recomendable utilizar la aproximación lineal.

$$(1+x)^n \simeq 1+nx;\ n \in Q \wedge x \to 0$$

- Calcular: $L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^3-1}\right)$

Observar que: $F(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$ asume la forma $\frac{0}{0}$ si $x=1$

Luego procedemos a factorizar cada término:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$$

$$\therefore L=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

2. PARA LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Se divide a cada término por la mayor potencia que representa dicha expresión:

- Calcular: $L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^3+5}\right)$

Observar que: $F(x)=\frac{x^2+4}{x^3+5}$ asume la forma $\frac{\infty}{\infty}$ si $x=\infty$.

Luego procedemos a dividir cada término por x^3 (mayor potencia)

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x^2+4}{x^3}}{\frac{x^3+5}{x^3}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}\right]$$

Para $x=\infty$: $\therefore L=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$

3. PARA LAS FORMAS $\infty-\infty$ y $0\cdot\infty$

Se efectúa las operaciones indicadas con el propósito de encontrar una de las dos formas vistas anteriormente para luego levantar la indeterminación.

team CALAPENSHKO

4. PARA LA FORMA 1^{∞}

Se debe buscar una función del tipo $F(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ para poder utilizar la siguiente relación.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

o equivalente $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Donde e es el número de Napier, cuya aproximación es:

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots..$$

PROPIEDADES PARA LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1) $\lim_{x\to 0}[\operatorname{sen}(x)]=0$
2) $\lim_{x\to 0}[\cos(x)]=1$
3) $\lim_{x\to 0}[\tan(x)]=0$
4) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]=1$
5) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)}{x}\right]=1$
6) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}\right]=1$
7) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\arctan(x)}{x}\right]=1$

TEOREMAS ADICIONALES

1) Sean F(x) y H(x) dos funciones algebraicas tales que $F(x)=\infty$ y $H(x)=\infty$ cuando $x\to\infty$, luego:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{F(x)}{H(x)}\right]$$

Si $[F]^{\circ}<[H]^{\circ}\Rightarrow L=0$

Si $[F]^{\circ}>[H]^{\circ}\Rightarrow L=\infty$

Si $[F]^{\circ}=[H]^{\circ}\Rightarrow L=\dfrac{\text{Coef. principal de F}}{\text{Coef. principal de H}}$

2) Dada la siguiente expresión: $L=\lim_{x\to a}\left[F(x)^{G(x)}\right]$

Si al evaluar F(x) tiende a 1 y G(x) tiende a ∞, entonces:

$$L=e^{\lim_{x\to a}[(F(x)-1)\,.\,G(x)]}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función es continua en un punto si el límite de la función coincide con el valor de la función en el límite. Si "a" es un punto de acumulación del dominio de la función F se dice que F es continua en $x = a$, si cumple simultáneamente las condiciones:

i) F(a) esta definido, es decir es real

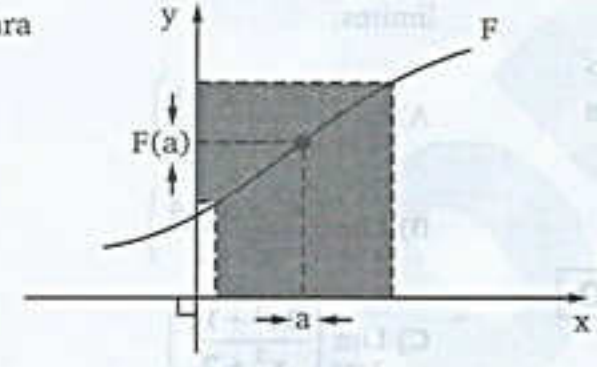
ii) Existe el límite de F en a

iii) $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

RECONOCIMIENTO GRÁFICO PARA LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función F es continua en un punto "a" que pertenece al dominio de F(F(a) debe estar definido) si su gráfica no tiene ruptura tipo "salto" a lo largo de la recta vertical $x = a$.

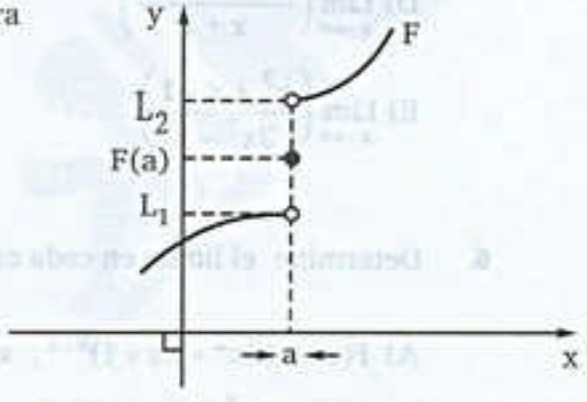
* Para



F(a) está definido
No hay salto en "a"
Existe $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

$\therefore$ F es continua en a

* Para



F(a) está definido
existe salto de F en "a"
los límites laterales son diferentes $(L_1 \neq L_2)$

$\therefore$ F no es continua en a

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Calcular cada uno de los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x}+1}\right)$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^5-x+1}{x+2}\right)$

C) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$

D) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\dfrac{x^2}{x+\sqrt{2}}\right)$

E) $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{|x|}{x}\right)$

2. Vincula con una línea las expresiones de la izquierda con su respectiva etiqueta de la derecha.

A) $\dfrac{0}{0}$

B) $\infty+\infty$

C) $\infty-\infty$

D) 1^{∞}

E) $\infty \cdot \infty$

INDETERMINADO

NO DEFINIDO

3. Calcula los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{x}\right)$

C) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\right)$

D) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^5+1}{x^3+1}\right)$

E) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

4. Determine los límites laterales de cada una de las siguientes funciones:

A) $F(x)=2x^5$, cuando $x\to 0^+$

B) $F(x)=3x^2+1$, cuando $x\to 1^-$

C) $F(x)=x^3+10$, cuando $x\to 2^-$

D) $F(x)=(2x-1)^2+x$, cuando $x\to 1^+$

E) $F(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$, cuando $x\to 0^-$

5. Calcular cada uno de los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^5+x+1}{x^2+x+1}\right)$

B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+4}{x^4+1}\right)$

C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+11}{x^3+2}\right)$

D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}\right)$

E) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^7+x-1}{2x^7-1}\right)$

6. Determine el límite en cada caso.

A) $F(x)=(2x^2-3x+1)^{x+1}$, $x\to 0$

B) $F(x)=3x^2-x-2$, $x\to -1$

C) $F(x)=(x^2+x-12)^x$, $x\to 3$

D) $F(x)=1-x-x^2$, $x\to 1$

E) $F(x)=\dfrac{2+x+x^2}{1+x^2}$, $x\to\infty$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Determine el número σ para el ε dada en: $\lim\limits_{x\to 2}(4x+5)=13;\ \varepsilon=0{,}01$

Resolución: Según la definición se plantea que:

$$|(4x+5)-13|<0{,}01 \text{ siempre que } 0<|x-2|<\sigma$$

$$\underbrace{|4x-8|<0{,}01}_{(1)} \text{ siempre que } \underbrace{0<|x-2|<\sigma}_{(2)}$$

A continuación damos forma a (1) tomando como modelo (2) para finalmente, por comparación, reconocer al número σ.

$$|4x-8|<0{,}01 \leftrightarrow 4|x-2|<0{,}01$$

$$|x-2|<\frac{0{,}01}{4} \leftrightarrow |x-2|<0{,}0025$$

Finalmente podemos reconocer que:

$$\therefore\ \sigma=0{,}0025$$

PROBLEMA 2 Sea la función f definida así

$$f(x)=\begin{cases} ax-3;\ x\leq -1 \\ x^2+a;\ x>-1 \end{cases}$$

Si $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe, ¿cuál es el valor de "a"?

Resolución: Si L es el límite, según el teorema de la unicidad se cumple que:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)$$

De acuerdo con la regla de correspondencia:

$$a(-1)-3=(-1)^2+a \leftrightarrow -a-3=1+a$$

$$-4=2a \leftrightarrow 2a=-4$$

$$\therefore\ a=-2$$

PROBLEMA 3 Calcular L, donde: $L=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+5}+x-1}{\sqrt{x-2}+1}\right)$

Resolución: Fácilmente podemos reconocer que la expresión a evaluar, $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+5}+x-1}{\sqrt{x-2}+1}$, es una función algebraica con dominio que contiene al punto de acumulación, luego se cumple que:

team CALAPENSHKO

$$L = f(3) = \frac{\sqrt[3]{8}+3-1}{\sqrt{1}+1} = \frac{2+3-1}{1+1} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore\ L = 2$$

PROBLEMA 4 Calcular: $L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)$

Resolución: Observar que: $F(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1}$; $Dom(F) = \mathbb{R} - \{-1\}$, como $x = 2 \in D_F$

$$L = \lim_{x\to 2}(F(x)) = F(2) = \frac{(2)^2-2+1}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\therefore\ L = 1$$

PROBLEMA 5 Calcular: $L = \lim_{x\to 1}[\![x]\!]$

Resolución: Analicemos los límites laterales, pues ellos deben ser iguales para que exista el límite pedido.

i) Por la izquierda: $L_1 = \lim_{x\to 1^-}[\![x]\!]$

Se plantea: $0 < x < 1$, de donde $[\![x]\!] = 0 \Rightarrow L_1 = 0$

ii) Por la derecha: $L_2 = \lim_{x\to 1^+}[\![x]\!]$

Se plantea: $1 < x < 2$, de donde $[\![x]\!] = 1 \Rightarrow L_2 = 1$

Finalmente como $L_1 \neq L_2$, se concluye que no existe el límite pedido.

PROBLEMA 6 Calcular el siguiente límite: $L = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{3x|x-2|}{|x-2|}\right)$

Resolución: Según límite lateral por la izquierda se plantea la relación:

$$x < 2 \ \rightarrow\ x - 2 < 0$$

Nótese que: $|x-2| = -(x-2) = 2-x$

$$L = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{3x|x-2|}{|x-2|}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{3x(2-x)}{2-x}\right] = \lim_{x\to 2^-}(3x)$$

$$\therefore\ L = 3.(2) = 6$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 7 Calcular: $L = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}\right)$

Resolución: Observa que: $F(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; asuma la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x = -1$

Factorizando: $L = \lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Evaluando: $L = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1}$

$\therefore \quad L = -2$

PROBLEMA 8 Calcular: $L = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$

Resolución: Observa que $F(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; asume la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x = 0$

Racionalizando: $L = \lim_{x \to 0}\frac{(\sqrt{(x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$$L = \lim_{x \to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$$

Evaluando: $L = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{1+1}$

$\therefore \quad L = \frac{1}{2}$

PROBLEMA 9 Calcular: $L = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3}\right]$

Resolución: Observa que: $F(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3}$; asuma la forma $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x = \infty$

Reacomodando: $L = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x}\right)\left(\frac{x+3}{x}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)$

Evaluando: $L = (1+0)(1+0)(1+0) = (1)(1)(1)$

$\therefore \quad L = 1$

PROBLEMA 10 Calcular: $L = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Resolución: Observa que $F(x) \equiv \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; asuma la forma $\infty-\infty$ cuando $x=\infty$

Racionalizando: $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

Evaluando: $\therefore \quad L = \dfrac{1}{\infty} = 0$

PROBLEMA 11 Calcular: $L = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Resolución: Observa que $F(x) \equiv \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$; asume la forma $\infty-\infty$ cuando $x=1$

Efectuando: $L = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)$

$$L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$$

$$L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$$

Evaluando: $\therefore \quad L = -\dfrac{1+2}{1+1+1} = -\dfrac{3}{3} = -1$

PROBLEMA 12 Calcular: $L = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

Resolución: Se observa que cuando $x=\infty$ se tiene la forma 1^∞, luego tenemos que buscar la forma $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ para que cuando $t\to 0$ se reemplace por e (número de napier)

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{\left(\frac{-x}{x+1}\right)}$$

Evaluando en $x=\infty$; $\dfrac{-1}{x+1}$ asume el valor cero, luego tenemos:

$$L = [e]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)} \quad \text{¡Por teorema adicional!}$$

$$L = [e]^{-1}$$

$$\therefore \quad L = e^{-1}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 13 Calcular: $L = \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$

Resolución: Por teorema adicional 2:

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{[(2x+1)-1]\frac{1}{x}\right\}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{x}\right\}} = e^{\lim 2_{x\to 0}}$$

$$\therefore \quad L = e^2$$

PROBLEMA 14 Calcular: $L = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

Resolución: Se observa que $F(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ asume la forma 1^{∞} cuando $x = 0$

Dando forma : $L = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$

Evaluando : $L = [e]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}$ ¡Límite trigonométrico!

$$L = e^1$$

$$\therefore \quad L = e$$

PROBLEMA 15 Calcular: $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x^2)}{x}\right)$

Resolución: Fácilmente podemos reconocer que cuando $x = 0$ la expresión a evaluar asume la forma $\frac{0}{0}$, por tal razón procedemos a levantar la indeterminación:

$$f(x) = \frac{\tan(x^2)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x\,.\cos(x^2)}$$

$$f(x) = \frac{x\,.\operatorname{sen}(x^2)}{x^2\,.\cos(x^2)} = \frac{x}{\cos(x^2)}\,.\,\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{(x^2)}$$

Finalmente según límites trigonométricos:

$$\therefore \quad L = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{1}.1 = 0$$

PROBLEMA 16 Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\right]$

Resolución: Sea la expresión: $F(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

Observar que si: $x=0 \Rightarrow F(x)=\dfrac{0}{0}$

Luego procedemos a levantar la indeterminación mediante la racionalización:

$$F(x)=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

Simplificando tenemos:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$$

Finalmente hallaremos el límite L:

$$L=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad L=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

PROBLEMA 17 Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{17x^3+5x+7}{2x^{10}+x^3+1}\right]$

Resolución: Sea la expresión: $F(x)=\dfrac{17x^3+5x+7}{2x^{10}+x^3+1}$

Observar que si: $x=\infty \Rightarrow F(x)=\dfrac{\infty}{\infty}$

Luego procedemos a levantar la indeterminación:

$$F(x)=\frac{\dfrac{17x^3+5x+7}{x^{10}}}{\dfrac{2x^{10}+x^3+1}{x^{10}}}=\frac{\dfrac{17}{x^7}+\dfrac{5}{x^9}+\dfrac{7}{x^{10}}}{2+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^{10}}}$$

Luego en el límite cuando $x=\infty$; se tendrá:

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} F(x)=\frac{0+0+0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

PROBLEMA 18 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^{2\cot(x)}$

Resolución: Sea la expresión: $F(x)=\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^{2\cot(x)}=\left\{\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2\right\}^{\cot(x)}$

$$F(x)=\Big[\underbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{1}+2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big]^{\operatorname{ctg}(x)}$$

Teniendo en cuenta las equivalencias trigonométricas conseguimos:

$$F(x) = [1+\text{sen}(x)]^{\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}} = \left\{[1+\text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}x}}\right\}^{\cos(x)}$$

Finalmente en el límite cuando $x = 0$ se obtendrá:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \left\{\lim_{x\to 0}[1+\text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}x}}\right\}^{\lim_{x\to 0}\cos(x)}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} F(x) = \{e\}^1 = e$$

PROBLEMA 19 Calcular: $L = \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\left[\dfrac{5x-\text{sen}(2x)}{3x+2\text{sen}(x)}\right]$

Resolución: Nótese que cuando $x = 0$ la expresión a evaluar asume la forma $\dfrac{0}{0}$, por tanto debemos levantar la indeterminación:

$$f(x) = \frac{5x-\text{sen}(2x)}{3x+2\text{sen}(x)} = \frac{\dfrac{5x-\text{sen}(2x)}{x}}{\dfrac{3x+2\text{sen}(x)}{x}}$$

$$f(x) = \frac{5-\dfrac{\text{sen}(2x)}{x}}{3+\dfrac{2\text{sen}(x)}{x}} = \frac{5-2.\left[\dfrac{\text{sen}(2x)}{2x}\right]}{3+2.\left[\dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right]}$$

Finalmente cuando $x \to 0$:

$$\therefore \quad L = \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\, f(x) = \frac{5-2.1}{3+2.1} = \frac{5-2}{3+2} = \frac{3}{5}$$

PROBLEMA 20 Calcular: $L = \underset{x\to 1}{\text{Lim}}\sqrt[3]{\dfrac{x^8-1}{x-1}}$

Resolución: Observa que si $x = 1$, obtenemos la forma $\dfrac{0}{0}$, luego para levantar la indeterminación será necesario suprimir de los términos al factor $(x-1)$

Por cociente notable:

$$\frac{x^8-1}{x-1} = x^7+x^6+x^5+\ldots\ldots+x+1$$

Ahora tenemos: $L = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^7 + x^6 + x^5 + ... + x + 1}$

$$L = \sqrt[3]{1+1+1+.....+1+1} = \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore L = 2$$

PROBLEMA 21 Determine el valor entero positivo de "n" tal que: $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}\right) = 5$

Resolución: La expresión a evaluar es:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}^{n}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

Por cociente notable: $f(x) = \underbrace{\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-2} + ... + \sqrt[n]{x} + 1}_{\text{"n" términos}}$

En el límite x = 1: $5 = \underbrace{1+1+.....+1+1}_{\text{"n" veces}} \leftrightarrow 5 = (1).n$

$$\therefore \quad n = 5$$

PROBLEMA 22 Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}\right)$

Resolución: Supongamos que: $x = u^{60}$. Luego si x = 1, entonces $u = u^{60} = 1$

Ahora tenemos: $L = \lim\limits_{u\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{u^{60}}-\sqrt[3]{u^{60}}}{\sqrt[4]{u^{60}}-\sqrt[5]{u^{60}}}\right)$

$$L = \lim_{u\to 1}\left(\frac{u^{30}-u^{20}}{u^{15}-u^{12}}\right) = \lim_{u\to 1}\left[\frac{u^{20}}{u^{12}}.\left(\frac{u^{10}-1}{u^3-1}\right)\right]$$

$$L = \lim_{u\to 1}\left[u^8.\left(\frac{u^{10}-1}{u^3-1}\right)\right] = \lim_{u\to 1}(u^8).\lim_{u\to 1}\left(\frac{u^{10}-1}{u^3-1}\right)$$

$$L = \lim_{u\to 1}(u^8).\lim_{u\to 1}\left(\frac{u^9+u^8+u^7+.....u+1}{u^2+u+1}\right)$$

Finalmente tenemos: $L = (1)^8.\left(\dfrac{1+1+1+.....+1+1}{1+1+1}\right) = (1).\left(\dfrac{10}{3}\right)$

$$\therefore \quad L = \frac{10}{3}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Calcular: $L = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)$

Resolución: La expresión a evaluar es:

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}-x$$

Racionalizando tenemos:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+x} = \frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}+x}$$

Cuando $x = \infty$ obtenemos: $\frac{\infty}{\infty}$, finalmente por teorema adicional, tenemos:

$$\therefore \quad L = \frac{-2}{\sqrt{1+1}} = \frac{-2}{2} = -1$$

PROBLEMA 24 Calcular: $L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3^n-2^n}\right)$

Resolución: La expresión propuesta es:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{1-\frac{2^n}{3^n}}\right]$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[3\sqrt[n]{1-\frac{2^n}{3^n}}\right] = 3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{2^n}{3^n}}$$

$$L = 3\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = 3\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right\}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Finalmente: $\therefore \quad L = 3\{1-0\}^0 = 3\{1\}^0 = 3.1 = 3$

PROBLEMA 25 Calcular: $L = \lim_{x\to a}\left(\frac{\text{sen}(x)-\text{sen}(a)}{x-a}\right)$

Resolución: Fácilmente podemos reconocer que cuando $x = a$ la expresión a evaluar asume la forma $\frac{0}{0}$, por tanto procedemos a levantar la indeterminación con el auxilio de la siguiente fórmula:

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2.\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

En la expresión dada:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(a)}{x-a} = \frac{2.\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$$

Reescribiendo convenientemente:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}.\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore \quad L = \lim_{x\to a} f(x) = 1.\cos\left(\frac{2a}{2}\right) = \cos(a)$$

PROBLEMA 26 Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{[\![x]\!]-x}{x}\right)$

Resolución: Recuerda que $x \to 0^+$ equivale a: $x > 0$, en el proceso de límite se puede establecer que: $0 < x < 1$. Ahora notamos que: $[\![x]\!] = 0$

Finalmente
$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{0-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{1}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-1)$$

$$\therefore L = -1$$

PROBLEMA 27 Si $m\sqrt{x^2-1} \le f(x) \le n\operatorname{sen}^2(x+1);\ \forall x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2}\right\rangle$

Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} f(x-1)$

Resolución: Por condición: $m\sqrt{x^2-1} \le f(x) \le n\operatorname{sen}^2(x+1);\ \forall x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2}\right\rangle$

Reemplazando (x) por (x – 1) tenemos:

$$m\sqrt{(x-1)^2-1} \le f(x-1) \le n\operatorname{sen}^2(x-1+1);\ \forall (x-1) \in \left\langle -2; -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$m\sqrt{x^2-2x} \le f(x-1) \le n\operatorname{sen}^2(x);\ \ \forall x \in \left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle$$

Aquí tomamos límite:

team CALAPENSHKO

$$\lim_{x\to 0}\left(m\sqrt{x^2-2x}\right) \le \lim_{x\to 0} f(x-1) \le \lim_{x\to 0}\left[n\,\text{sen}^2(x)\right]$$

En la evaluación tenemos:

$$0 \le \lim_{x\to 0} f(x-1) \le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x-1) = 0$$

PROBLEMA 28 Calcular: $L = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^x+3^x}\right)$

Resolución: La forma indeterminada que se presenta en nuestra expresión es $\dfrac{\infty}{\infty}$, según la teoría la indeterminación se suprime al dividir a cada término por 5^{x+1}:

$$f(x) = \frac{\dfrac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^{x+1}}}{\dfrac{5^x+3^x}{5^{x+1}}} = \frac{1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x+1}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}$$

Finalmente cuando $x \to \infty$:

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1+0}{\dfrac{1}{5}+0} = \frac{1}{\dfrac{1}{5}}$$

$$\therefore \quad L = 5$$

PROBLEMA 29 Calcular: $L = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left[\!\left[\dfrac{x+1}{x}\right]\!\right]\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

Resolución: Inicialmente analicemos el máximo entero:

$$\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] = \left[\!\left[1+\frac{1}{x}\right]\!\right]$$

Nótese que si $x \to \infty$, entonces $\dfrac{1}{x} = 0$. Por tanto:

$$\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] = [\![1+0]\!] = [\![1]\!] = 1$$

Ahora, el límite solicitado se puede reescribir así

$$L = \lim_{x\to\infty}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$$

Si suponemos que $y = \frac{1}{x}$ podemos reconocer que si x tiende al infinito, entonces y tiende a cero, por tanto:

$$\therefore \quad L = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\text{sen}(y)}{y}\right] = 1$$

PROBLEMA 30 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2a & ; \ x < -2 \\ 2ax+b & ; \ -2 \le x \le 1 \\ 3x-b & ; \ x > 1 \end{cases}$$

Calcular el valor de "2a+3b", siendo f una función continua.

Resolución: Como f es continua, según la teoría se plantea que:

$$f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x) \ \rightarrow \ 2a.(-2)+b = -2+2a$$

$$-4a+b = -2+2a \ \rightarrow \ b = 6a-2 \qquad .....(1)$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \ \rightarrow \ 2a.(1)+b = 3(1)-b$$

$$2a+b = 3-b \ \rightarrow \ 2a+2b = 3 \qquad .....(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$2a+2(6a-2) = 3 \ \rightarrow \ 2a+12a-4 = 3$$

$$14a = 7 \ \rightarrow \ a = \frac{1}{2} \qquad .....(3)$$

Reemplazando (3) en (1) tenemos:

$$b = 6\left(\frac{1}{2}\right)-2 \ \rightarrow \ b = 3-2 = 1$$

$$\therefore \quad 2a+3b = 4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular:

$$\lim_{x\to -4}\left[\frac{x^2+2x-8}{x+4}\right]$$

A) -2 B) -4 C) -6
D) -8 E) -10

2. Calcular:

$$L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x^3-6x^2+11x-6}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) -1 E) -2

3. Calcular:

$$L=\lim_{x\to 8}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}\right]$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

4. Calcular:

$$\lim_{x\to \infty}\left[\frac{5^{x+1}-3^{x+1}}{5^x-3^x}\right]$$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 4 E) 8

5. Proporcione el valor de:

$$K=\lim_{x\to \infty}\left[\sqrt{4x^2+3x+6}-\sqrt{4x^2+x+3}\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1
D) 2 E) -1

6. Calcular:

$$\lim_{x\to \infty}\left[\frac{x-1}{x+3}\right]^{x+3}$$

A) e^{-4} B) e^{-2} C) e^{-1}
D) e^{-3} E) $2e^{-1}$

7. Indicar el valor de verdad de:

( ) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$

( ) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$; no existe

( ) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

A) VFV B) VFF C) VVV
D) FFV E) FVF

8. Calcular:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}\right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 6
D) $\frac{3}{4}$ E) 2

9. Determine el valor de "n" para que:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(x+3)^n(4x+7)^{n-2}(3x-4)^{n+1}}{(9x^2+x+3)^n(2x-5)^{n-1}}=\frac{8}{243}$$

A) 1 B) 3 C) 6
D) 8 E) 4

10. Calcular:

$$\lim_{x\to \infty}\sqrt{a^n+b^n+c^n};\{a;b;c\}\in\mathbb{R}^+;c>a;c>b$$

A) a B) b C) c
D) 1 E) $\frac{1}{abc}$

11. Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\right)$$

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $-\frac{3}{8}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 1

12. Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-nx+n-1}{x^{n+1}-(n+1)x+n}\right);\ n\in\mathbb{Z}^+$$

A) $\frac{n-1}{n+1}$ B) $\frac{n}{n-1}$ C) $\frac{n+1}{n}$
D) $\frac{n-1}{n}$ E) $\frac{n+1}{n-1}$

13. Hallar los valores de a y b, si se sabe que:

$$L=\lim_{x\to 2b}\frac{x^3-x^2+ax+12}{x^2-4bx+4b^2}\in\mathbb{R}$$

Indicar: a . b

A) –8 B) 10 C) 4
D) –2 E) –4

14. Calcule el valor de:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}\right)$$

A) 4,6 B) 4,7 C) 4,9
D) 5 E) 4,8

15. Calcular:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{3+2x}}{1-\sqrt{5+4x}}\right)$$

A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) –1 E) 0

16. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}\right)$$

A) n^2-m^2 B) m^2-n^2
C) $2(n^2-m^2)$
D) $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$ E) $\frac{1}{2}(m^2-n^2)$

17. Indicar el valor de:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}\right\}$$

A) 5 B) 3 C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{5}{3}$ E) ∞

18. Calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{3a}{x}}\right)^{4x}$$

A) e^{3a} B) e^{-3a} C) e^{-6a}
D) $\sqrt[a]{e}$ E) $\sqrt[3a]{e}$

19. Sea "F" la función definida, según:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{3x+a}{x+3} & ;\ -3<x<-2\\ a+b-10 & ;\ x=-2\\ \sqrt{x+3}-6 & ;\ x>-2\end{cases}$$

Si existe: Lim F(x), calcular: a . b

A) 3 B) 4 C) 6
D) 2 E) 5

20. Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\left[(5+x^2-4x)^{\frac{x+2}{x^2-4x+4}}\right]$$

A) e B) e^2 C) e^3
D) e^4 E) e^5

team CALAPENSHKO

21. Tenemos:

$$F(x)=\begin{cases}5x-1 & ; \ x\le 1\\ 4-x & ; \ x>1\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}3-2x & ; \ x<1\\ 4x-2 & ; \ x>1\end{cases}$$

Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}(F+G)(x)$

A) -1 B) 1 C) -2
D) 3 E) 5

22. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}\right)$

A) 2 B) 4 C) -2
D) -4 E) 6

23. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2}\right)$

A) $8\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ C) $\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$

D) $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ E) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

24. Calcule: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}\right)$

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

25. Si:

$$x_1=\left(\frac{2}{3}\right)^4,\ x_2=\left(\frac{3}{4}\right)^5,\ x_3=\left(\frac{4}{5}\right)^6,\ \ldots.$$

Calcular: $L=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

A) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

D) $\dfrac{1}{e}$ E) $\dfrac{1}{e^2}$

26. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, siendo:

$$f(n)=\sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{1}{2}$ E) 2

27. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n viene dado por:

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}\ ;\ a>0\ ;\ b>0$$

A) {a; b} B) $\sqrt{n}$

C) n^n

D) máx.{a, b} E) -1

28. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, siendo:

$$x_n=\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$$

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) 1 E) n

29. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) -1 E) 6

30. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$$

A) 1 B) 0 C) $\dfrac{1}{2}$

D) -1 E) 2

31. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1};\ a>1;\ k,m\in\mathbb{N}$$

A) $\frac{m}{k}$ B) m C) k

D) $-\frac{m}{k}$ E) 1

32. Determine $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

A) n B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) 0 E) -1

33. Determine $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

A) 1 B) 0 C) -1

D) n E) n^2

34. Determine $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

A) $\sqrt{n}$ B) 1 C) 0

D) -1 E) $\frac{1}{2}$

35. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\sqrt[n]{n+a}$$

A) -1 B) $\sqrt{n}$ C) $\sqrt{a}$

D) 1 E) 0

36. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\sqrt[n]{an+b};\ a,b\in\mathbb{R}^+$$

A) -1 B) $\sqrt{n}$ C) 1

D) 0 E) 2

37. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\sqrt[n]{n^3-3n+1}$$

A) 1 B) -2 C) $\sqrt{n}$

D) n E) -1

38. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\sqrt[2n]{n^2-1}$$

A) 0 B) $\sqrt{n}$ C) $\sqrt{-1}$

D) 1 E) n

39. Determine $\lim_{n\to\infty} f(n)$, siendo:

$$f(n)=\sqrt[n]{2^n n^2+2n-1}$$

A) 0 B) -1 C) 2

D) n E) 1

40. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$, siendo:

$$x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$$

A) 1 B) $\sqrt{\frac{1}{n}}$ C) $\sqrt{n}$

D) n E) -8

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

41. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\frac{21-4n^4}{1-n+n^4}$$

A) -1 B) $\sqrt{2}$ C) -4
D) $\sqrt{n}$ E) -8

42. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, siendo:

$$f(n)=\sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$$

A) 0 B) $\sqrt{n}$ C) $\sqrt[n]{1}$
D) 1 E) -1

43. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n+n^3+2}$$

A) 2 B) 4 C) -1
D) n^3 E) $-\frac{1}{2}$

44. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{n}$ C) 1
D) 4 E) $-\frac{1}{2}$

45. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$$

A) $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ C) $\frac{2^n}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

46. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual que:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$$

A) e^3 B) n^2 C) e
D) 1 E) 0

47. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(n)$, siendo

$$f(n)=\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$$

A) $\frac{1}{e}$ B) e C) $\frac{1}{e^2}$
D) $-e$ E) $-\frac{1}{e}$

48. Calcular $L=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{|x+6|-|2x-5|}{|5x-3|}\right)$

A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 0

team CALAPENSHKO

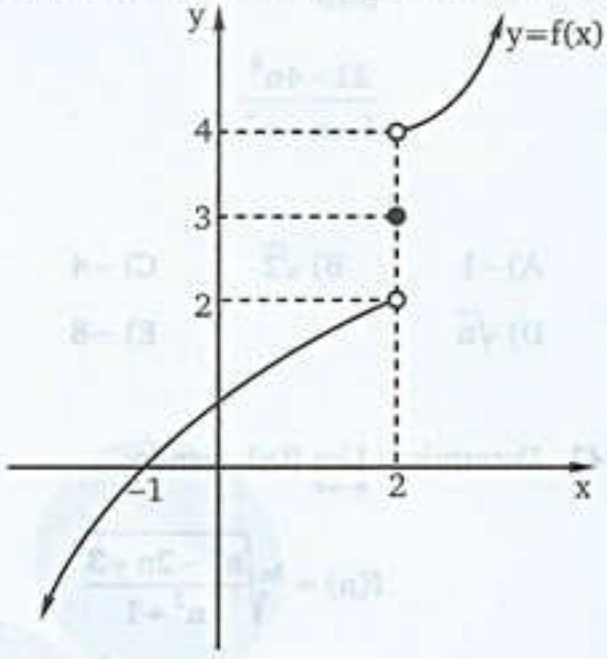
49. Calcular $\lim_{x\to 4} f(x)$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4}\,; & x>4\\ 8-2x\,; & x<4\end{cases}$$

A) -1 B) 1 C) 0

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

50. Respecto a la función f, cuya gráfica es:



Se dan las proposiciones:

I. $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

II. $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

III. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$

Luego la proposición verdadera es:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I ∧ II E) II ∧ III

team CALAPENSHKO

Capítulo 19

Derivadas

CAPACIDADES

- Determinar derivadas de las expresiones matemáticas
- Identificar funciones diferenciables.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right]$$

MARQUIS DE L' HOSPITAL

GUILLAUME FRANCOIS ANTOINE MARQUIS DE L' HOSPITAL, nació en 1 661 en Paris, Francia. Falleció el 2 de febrero de 1 704 en París. L' Hospital escribió el primer libro de cálculo en el años 1 696, el cuál estuvo influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L' Hospital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de su miopía. Desde este tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas y aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1 691. L' Hospital era un competente matemático, su fama se desprende de su libro: "*Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes*" (1 692).

En este libro creó la regla que ahora se conoce como regla de L' Hospital para encontrar el límite de una función racional, cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Regla de L' Hospital, el concepto de derivada que se aplica al caso clásico de la velocidad y la caída de los cuerpos y, un detalle metodológicamente importante, la aplicación de conceptos en las propias matemáticas.

team CALAPENSHKO

DERIVADAS

INTRODUCCIÓN

El concepto de Derivada surge históricamente de los problemas de la velocidad en Física y el problema de la tangente en la geometría. Sus aplicaciones se extienden a dominios más amplios y complejos con una gran cantidad de problemas donde su aplicación en el proceso de resolución es decisivo para determinar la solución.

Una condición necesaria, pero no suficiente, para poder derivar a una función es que la función sea continua en todo su dominio.

Una función F es derivable o diferenciable es el intervalo I = [a; b] si y solo si es derivable en cada punto de dicho intervalo.

Si F es derivable en x_0, entonces F es continua en x_0.

Si F es continua en x_0 no necesariamente F es derivable en x_0.

DEFINICIÓN

La derivada de una función F es otra función denotada por F' (se lee efe primal), notación introducida por el matemático francés Joseph Louis Lagrange, cuya regla de correspondencia es:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right]$$

Donde: $Dom(F') \subset Dom(F)$

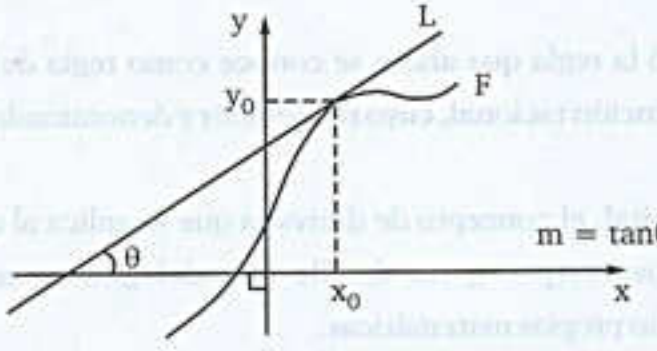
OBSERVACIÓN

F'(x) indica la primera derivada de la función F(o derivada de F) en cualquier punto (x; F(x)) y también se le puede representar de la forma siguiente:

$$F'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = D_x y = D_x F$$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

El concepto de la derivada está motivada por la noción intuitiva de la recta tangente L a la curva y = F(x) en el punto $(x_o; y_o)$



$$L : y - F(x_0) = m(x - x_0)$$

team CALAPENSHKO

Teorema: El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

$$m = F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right]$$

DERIVADAS LATERALES

1. **DERIVADA LATERAL IZQUIERDO:** Es la derivada de $F(x)$ en x_0 restringido al intervalo $\langle -\infty; x_0\rangle$

$$F'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right]$$

2. **DERIVADA LATERAL DERECHO:** Es la derivada de $F(x)$ en x_0, restringido al intervalo $\langle x_0; \infty\rangle$

$$F'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right]$$

TEOREMA

La derivada de una función F en el punto $x = x_0$ existe sí y solo sí sus derivadas laterales existen y son iguales, esto es:

$$F'(x_0) = F'(x_0^-) = F'(x_0^+)$$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $F(x) = x^n \Rightarrow F(x) = n\,.\,x^{n-1}; \quad \forall\, n \in \mathbb{Q}$

2) $F(x) = k \Rightarrow F'(x) = 0 \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$

3) $F(x) = G(x) + H(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x) + H'(x)$

4) $F(x) = G(x) - H(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x) - H'(x)$

5) $F(x) = G(x)\,.\,H(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x)\,.\,H(x) + G(x)\,.\,H'(x)$

6) $F(x) = \dfrac{G(x)}{H(x)} \Rightarrow F'(x) = \dfrac{G'(x)\,.\,H(x) - G(x)\,.\,H'(x)}{[H(x)]^2}$

7) $F(x) = [G(x)]^n \Rightarrow F'(x) = n[G(x)]^{n-1}.G'(x)$

8) $[F\circ G](x) = F(G(x)) \Rightarrow [F\circ G]'(x) = F'(G(x))G'(x)$

team CALAPENSHKO

REGLA DE LA CADENA

Si **y** es función de **u**, definida por $y = f(u)$, **u** es función de **x**, definida por $u = g(x)$, y si $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ existen, entonces **y** es función de **x** y $\frac{dy}{dx}$ existe y se define así:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) $y = \text{sen}[F(x)] \Rightarrow y' = \cos[F(x)] \cdot F'(x)$
2) $y = \cos[F(x)] \Rightarrow y' = -\text{sen}[F(x)] \cdot F'(x)$
3) $y = \tan[F(x)] \Rightarrow y' = \sec^2[F(x)] \cdot F'(x)$
4) $y = \cot[F(x)] \Rightarrow y' = -\csc^2[F(x)] \cdot F'(x)$
5) $y = \sec[F(x)] \Rightarrow y' = \sec[F(x)] \cdot \tan[F(x)] \cdot F'(x)$
6) $y = \csc[F(x)] \Rightarrow y' = -\csc[F(x)] \cdot \cot[F(x)] \cdot F'(x)$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1) $y = \text{Ln}[F(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{F(x)} \cdot F'(x)$
2) $y = \text{Log}_b F(x) \Rightarrow y' = \frac{\log_b e}{F(x)} \cdot F'(x)$
3) $y = k^{F(x)};\ k = cte \Rightarrow y' = k^{F(x)} \cdot \text{Ln}k \cdot F'(x)$

OBSERVACIÓN

Para derivar funciones de la forma $y = F(x)^{G(x)}$ se recomienda tomar logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad para luego según las reglas vistas anteriormente obtener y'.

DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Al proceso para determinar la derivada de una función se llama diferenciación frecuentemente la función se da explícitamente según la relación $y = F(x)$.

Si la función se da implícitamente: $F(x; y) = 0$, es decir resulta difícil o tedioso despejar la variable y en función de x se puede recurrir a la regla de derivación en cadena para determinar $\frac{dy}{dx}$.

team CALAPENSHKO

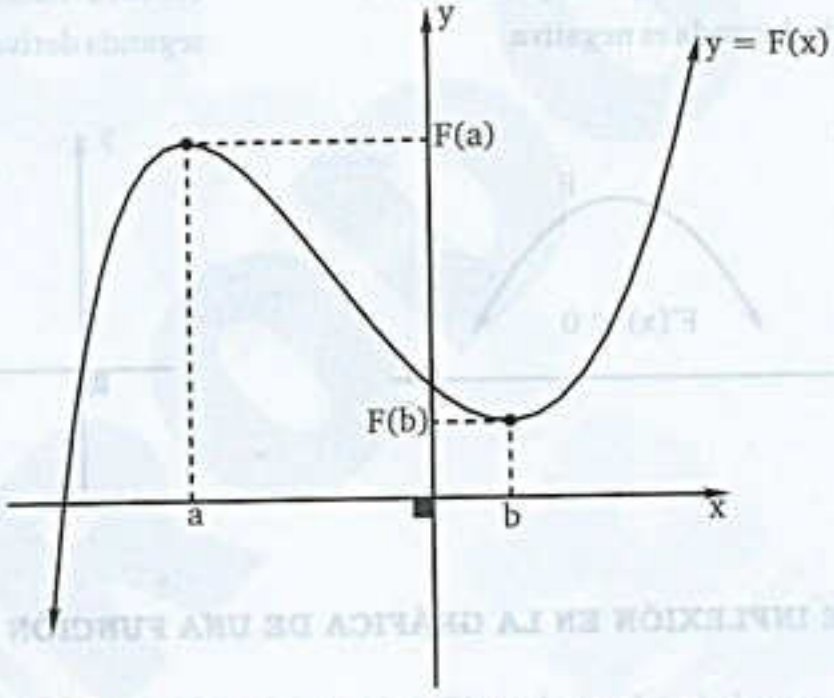
APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. REGIONES DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

A. $y = F(x)$ es creciente si y solamente si se verifica $F'(x) > 0$
Para encontrar el intervalo en el cual la función F es creciente se debe resolver la inecuación anterior

B. $y = F(x)$ es decreciente si y solamente si se verifica $F'(x) < 0$
Para encontrar el intervalo en el cual la función F es decreciente se debe resolver la inecuación anterior

2. EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES (MÁXIMOS Y MÍNIMOS)



Un punto crítico es el lugar geométrico donde la gráfica de una función alcanza un máximo o mínimo relativo.

(a; F(a)) es un punto crítico. Aquí existe máximo relativo.

(b; F(b)) es un punto crítico. Aquí existe mínimo relativo

Dada la función $y = F(x)$, se resuelve la siguiente ecuación $F'(x) = 0$

Sea x_0 la raíz de la ecuación anterior, luego:

A) Si $F''(x_0) < 0$ entonces $F(x)$ es máximo en $x = x_0$

B) Si $F''(x_0) > 0$ entonces $F(x)$ es mínimo en $x = x_0$

team CALAPENSHKO

OBSERVACIÓN

i) F"(x) es la segunda derivada de la función F

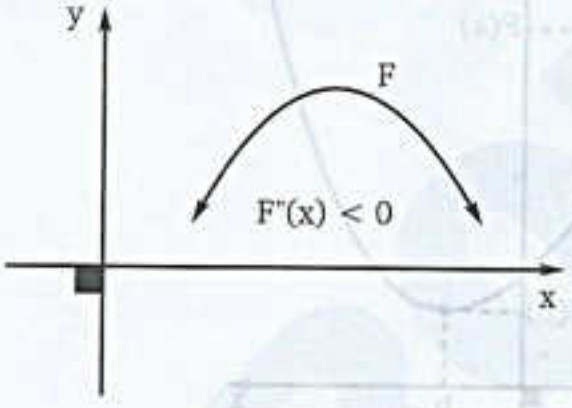
$F(x) = x^3 + 4x^2 - 7$

$F'(x) = 3x^2 + 8x \Rightarrow F''(x) = 6x + 8$

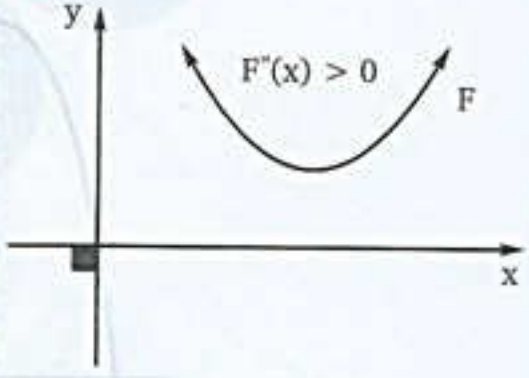
ii) x_0 es la abscisa del punto crítico $(x_0; F(x_0))$ de la función F.

3. CONCAVIDAD EN LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

A. Dada una función y = F(x), su curva es cóncava hacia abajo si y solo si su segunda derivada es negativa.

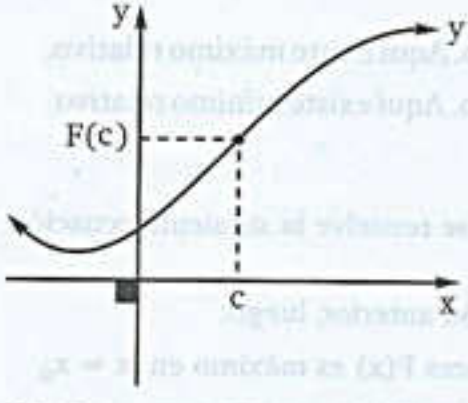


B. Dada una función y = F(x), su curva es cóncava hacia arriba si y solo si su segunda derivada es positiva.



4. PUNTO DE INFLEXIÓN EN LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Es el lugar geométrico donde la gráfica de una función cambia de concavidad, es decir de cóncavo hacia abajo pasa a cóncavo hacia arriba o viceversa.



Si (c; F(c)) es un punto de inflexión de F y existe F" (c) entonces F" (c) = 0

team CALAPENSHKO

5. REGLA DE L'HOSPITALL - BERNOULLI

Consideremos dos funciones derivables (diferenciables) F y G de modo que la expresión $\frac{F(x)}{G(x)}$ asuma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ cuando x = a, luego para levantar la indeterminación se deriva simultáneamente a cada término de la expresión.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{F'(x)}{G'(x)}\right]$$

6. RAÍZ DE MULTIPLICIDAD

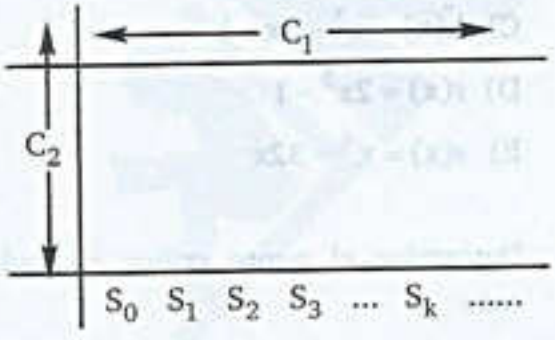
Si x = a es una raíz de multiplicidad "k" de la ecuación P(x) = 0, se debe cumplir:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = P'''(a) = \ldots = P^{k-1}(a) \ \wedge \ P^{k}(a) \neq 0$$

7. SUMA DE LAS K - ÉSIMAS POTENCIAS DE LAS RAÍCES EN UN POLINOMIO DE GRADO SUPERIOR

Sea P(x) un polinomio de grado $n \geq 3$; de raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

La suma de las K–ésimas potencias de las raíces de P(x), $k \in N$, son en forma sucesiva los coeficientes de la expresión trascendente que se obtiene al dividir P'(x) ÷ P(x) según el método de Horner.



$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \ldots\ldots\ldots + x_n^0$$
$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n$$
$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2$$
$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots\ldots\ldots + x_n^3$$
$$\vdots$$
$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots\ldots\ldots + x_n^k$$
$$\vdots$$

NOTA

La división planteada es no euclidiana por tanto no implica cociente ni residuo.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Determine la primera derivada de cada una de las siguientes funciones

A) $f_1(x) = x^3 + 3$

B) $f_2(x) = (x+1)^2$

C) $f_3(x) = 24$

D) $f_4(x) = \dfrac{x^2+4}{x+1}$

E) $f_5(x) = 2^x + x + 1$

2. Suponiendo que:
IC = intervalo de crecimiento.
ID = intervalo de decrecimiento.
Determine el IC y el ID para cada una de las siguientes funciones:

A) $F(x) = x^2 - 2x$

B) $G(x) = 1 - 2x - 3x^2$

C) $H(x) = x^3 + 3x - 1$

D) $P(x) = x^4 - 8x + 1$

E) $Q(x) = x^5 + x + 1$

3. Determine la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

A) $F(x) = 2x^5$

B) $F(x) = 3x^2 - 4x + 1$

C) $F(x) = x^3 + 5x^2 + 10$

D) $F(x) = (2x-1)^2 + x$

E) $F(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

4. Aplicar la regla de Hospitall - Bernoulli en cada caso:

A) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-x}{x}\right)$

C) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)$

D) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^5-1}{x^3-1}\right)$

E) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right)$

5. Calcular la abscisa del punto crítico en cada caso.

A) $f(x) = x^2 + 3$

B) $g(x) = 2x^2 - 4x$

C) $h(x) = x^3 - 3x + 1$

D) $r(x) = 2x^3 - 1$

E) $s(x) = x^4 - 32x$

6. Determine el punto crítico en cada caso

A) $F(x) = 2x^2 - 3x + 1$

B) $F(x) = 3x^2 - x - 2$

C) $F(x) = x^2 + x - 12$

D) $F(x) = 1 - x - x^2$

E) $F(x) = 2 + x - x^2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01: Según la definición determine f'(x), si se tiene que $f(x) = 5x^2 + 3$

Resolución: Según la definición tenemos:

$$f(x+h) = 5(x+h)^2 + 3 = 5x^2 + 10hx + 5h^2 + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 5x^2 + 10hx + 5h^2 + 3 - (5x^2 + 3)$$

$$f(x+h) - f(x) = 5x^2 + 10hx + 5h^2 + 3 - 5x^2 - 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 10hx + 5h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{10hx + 5h^2}{h} = 10x + 5h$$

Cuando $h \to 0$: $\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = 10x + 0$

$\therefore \quad f'(x) = 10x$

PROBLEMA 02: Si $x > 0$. Determine f'(x) según la definición, siendo: $f(x) = \sqrt{x}$

Resolución: Según la definición tenemos:

$$f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Al racionalizar el numerador tenemos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}).h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}).h} = \frac{h}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}).h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Cuando $h \to 0$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$

$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 03: Según la definición determine la primera derivada de la función $f(x) = e^x$.

Resolución: Según la definición se plantea:

$$f(x+h)-f(x)=e^{x+h}-e^x$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^x.(e^h-1)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^x.\left(\frac{e^h-1}{h}\right) \quad .....(1)$$

Nótese que si $h \to 0$ entonces se cumple que:

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

De donde al transformarse obtenemos:

$$1+h=e^h$$

$$h=e^h-1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{e^h-1}{h}=1$$

Ahora en (1), cuando $h \to 0$:

$$f'(x)=e^x.1$$

$$\therefore \quad f'(x)=e^x$$

PROBLEMA 04: Determine $f'(x)$, según la definición, siendo $f(x) = \text{sen}(x)$

Resolución: Según la definición se plantea:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}$$

Con el auxilio de la trigonometría tenemos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2.\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

team CALAPENSHKO

Se sabe que $\lim_{u\to 0}\left(\frac{\text{sen}(u)}{u}\right)=1$; finalmente cuando $h\to 0$:

$$f'(x)=1\,.\,\cos(x)$$

$$\therefore\quad f'(x)=\cos(x)$$

PROBLEMA 05: Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2+3$ en $x=1$.

Resolución: Según la teoría, la ecuación de la recta tangente "L" viene dada por:

$$y-f(x_0)=m(x-x_0) \qquad \text{.....(1)}$$

Donde: $x_0=1 \;\wedge\; f(x_0)=f(1)=1^2+3=1+3=4$

Además: $m=f'(x_0)=f'(1) \;\wedge\; f'(x)=2x \;\rightarrow\; m=2$

Finalmente en (1) tenemos:

$$y-4=2(x-1)$$

$$y-4=2x-2$$

$$\therefore\quad L: 2x-y+2=0$$

PROBLEMA 06: Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva: $f(x)=\sqrt[3]{x^{-2}}+1$ en el punto de abscisa $x=1$

Resolución: Según condición del problema la recta tangente, así como la recta normal, a f pasa por el punto de abscisa $x=1$.

$$\text{Punto de paso} = (1;\, f(1)) = (1;\, 2)$$

Además la pendiente de la recta tangente a f que pasa por el punto de abscisa $x=1$ es: $m=f'(1)$

Nótese que $f(x)=\sqrt[3]{x^{-2}}+1=x^{\frac{2}{3}}+1$, al derivar:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}.x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Haciendo $x=1$, tenemos:

$$f'(1)=m=\frac{2}{3}$$

La ecuación de la recta que pasa por (1; 2) y de pendiente $\frac{2}{3}$ viene dada por:

team CALAPENSHKO

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y-2}{x-1}$$

$$2x - 2 = 3y - 6$$

$$\therefore \quad L_T : 2x - 3y + 4 = 0$$

La ecuación de la recta normal se obtiene de:

$$m_N = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad .....(*)$$

Se sabe que m_T es la pendiente de la recta tangente y m_N es la pendiente de la recta normal, luego se cumple que: $m_T . m_N = -1$

Por tanto: $m_N = -\frac{3}{2}$, con lo cual en (*) tenemos:

$$-\frac{3}{2} = \frac{y-2}{x-1} \rightarrow -3x + 3 = 2y - 4$$

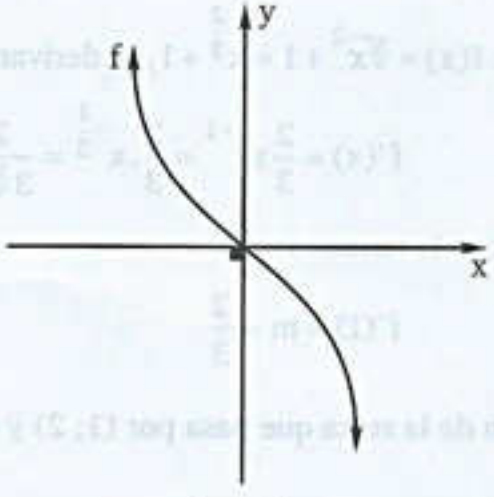
$$\therefore \quad L_N : 3x + 2y - 7 = 0$$

PROBLEMA 07: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ -x^2 & ; x > 0 \end{cases}$

I. Esbozar su gráfica.
II. ¿f es continua en x = 0?
III. Determine $f'(0^+)$ y $f'(0^-)$, si existen
IV. ¿f es derivable en x = 0?

Resolución: Según la teoría, veamos cada caso planteado:

I. $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ -x^2 & ; x > 0 \end{cases}$



team CALAPENSHKO

II. Veamos las tres condiciones de la continuidad.

Primero: $f(0) = 0$ ¡existe!

Segundo: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ¡existe!

Tercero: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ¡cumple!

Por tanto se afirma que f es continua en $x = 0$.

III. Veamos las derivadas laterales:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{h^2}{h}\right) = -\lim_{h\to 0^+} (h) = -0 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{h^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} (h) = 0$$

IV. Como las derivadas laterales existen y son iguales, entonces decimos que f es derivable en $x = 0$.

PROBLEMA 08: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2-3x \ ; \ x \le 1 \\ 4x-5 \ ; \ x > 1 \end{cases}$

I. Esbozar su gráfica.

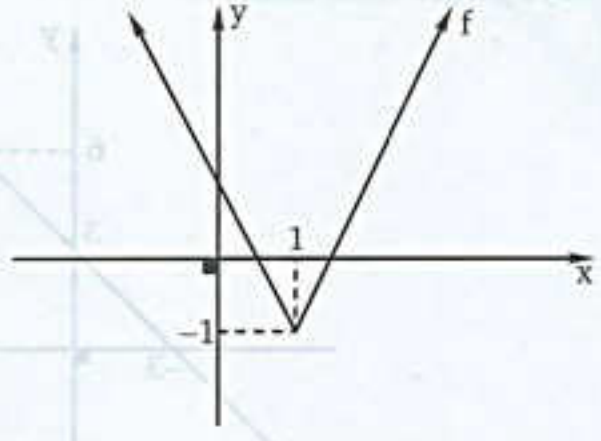
II. ¿f es continua en $x = 1$?

III. Determine $f'(1^+)$ y $f'(1^-)$, si existen

IV. ¿f es derivable en $x = 1$?

Resolución:

I. $y = f(x) = \begin{cases} 2-3x \ ; \ x \le 1 \\ 4x-5 \ ; \ x > 1 \end{cases}$



II. De la gráfica fácilmente podemos reconocer que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

team CALAPENSHKO

También, según la regla de f, se cumple que $f(1) = -1$

Nótese que: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -1$

Por tanto, f es continua en $x = 1$

III. Veamos las derivadas laterales:

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-3(1+h)-(-1)}{h} =$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{-3h}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} (-3) = -3$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(1+h)-5-(-1)}{h}$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{4h}{h}\right) = -\lim_{h\to 0^+} (4) = 4$$

IV. Nótese que $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, luego es evidente que f no es derivable en $x = 1$.

PROBLEMA 09: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} ; & x \neq 3 \\ 0 \quad ; & x = 3 \end{cases}$

I. ¿f es continua en $x = 3$?

II. ¿f es derivable en $x = 3$?

Resolución: La función dada se puede reescribir así:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 ; & x \neq 3 \\ 0 \quad ; & x = 3 \end{cases}$$

Cuya gráfica viene dada por:

twitter.com/calapenshko

I. Fácilmente podemos reconocer que:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

De la regla de correspondencia se tiene que:

$$f(3) = 0$$

Nótese que $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$, luego f no es continua en $x = 3$.

II. Como f no es continua en $x = 3$, entonces f no es derivable en dicho punto.

PROBLEMA 10: Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2.\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\ ; & x \neq 0 \\ 0 \quad\quad\quad ; & x = 0 \end{cases}$

Determine $f'(0)$

Resolución: Según la definición se plantea:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) + h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) + 1 \right]$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) + 1 \qquad .....(1)$$

Si $h \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\quad -1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1 \;\rightarrow\; -h \leq h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leq h$

$$\lim_{h\to 0}(-h) \leq \lim_{h\to 0}\left[h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)\right] \leq \lim_{h\to 0}(h) \;\rightarrow\; 0 \leq \lim_{h\to 0}\left[h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)\right] \leq 0$$

Es evidente que $\lim_{h\to 0}\left[h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)\right] = 0$, luego en (1):

$$\therefore \quad f'(0) = 0 + 1 = 1$$

PROBLEMA 11: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b\ ; & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} \quad ; & x > 1 \end{cases}$

Si f' existe. Calcular ab.

Por condición f es derivable en $x = 1$, pues $f'(x)$ existe.

Derivando por izquierda tenemos: $f'_-(x) = 2ax$

Derivando por derecha tenemos: $f'_+(x) = -\frac{1}{x^2}$

Ahora haciendo $x = 1$:

$$2a(1) = -\frac{1}{1} \leftrightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \qquad \text{.....(1)}$$

Como f es derivable en $x = 1$, necesariamente f es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow a + b = 1 \qquad \text{.....(2)}$$

De (1) y (2) tenemos que: $a = -\frac{1}{2} \wedge b = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad ab = -\frac{3}{4}$$

PROBLEMA 12: Calcule el valor de "a – b + c", de modo que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & ; x < -2 \\ bx^2 + cx & ; -2 \le x \le 3 \\ ax^2 + bx & ; x > 3 \end{cases}$$

Sea continua en $x = -2$ y derivable en $x = 3$.

Resolución: Según la teoría procedemos con las reglas de la continuidad

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$-2a + 5 = 4b - 2c \rightarrow 2a + 4b - 2c = 5 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$9b + 3c = 9a + 3b \rightarrow 3a - 2b - c = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

Ahora según las reglas de las derivadas laterales:

$$f'_-(x = 3) = f'_+(x = 3)$$

$$2b(3) + c = 2a(3) + b$$

$$6b + c = 6a + b \rightarrow 6a - 5b - c = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

Efectuando (1) – 2 . (2):

$$2a + 4b - 2c - 6a + 4b + 2c = 5 - 0$$

$$-4a + 8b = 5 \rightarrow a - 2b = -\frac{5}{4} \qquad \text{.....(4)}$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Efectuando (2) – (3):

$$3a-2b-c-6a+5b+c=0$$

$$-3a+3b=0 \rightarrow a=b \qquad \text{.....(5)}$$

Reemplazando (5) en (4):

$$b-2b=-\frac{5}{4} \rightarrow -b=-\frac{5}{4} \rightarrow b=\frac{5}{4} \wedge a=\frac{5}{4}$$

Finalmente en (2) tenemos:

$$3a-2b-c=0 \rightarrow 3a-2a-c=0 \rightarrow a=c=\frac{5}{4}$$

$$\therefore \quad a-b+c=\frac{5}{4}$$

PROBLEMA 13: Determine: $\frac{dy}{dx}$ a partir de $x^2y^3 + xy^2 = y + 3$

Resolución: Reescribiendo la ecuación dada, tenemos: $x^2y^3+xy^2-y-3=0$

Como la función esta dada implícitamente procedemos a derivar respecto a x:

$$\frac{d(x^2y^3)}{dx}+\frac{d(xy^2)}{dx}-\frac{dy}{dx}-\frac{d(3)}{dx}=\frac{d(0)}{dx}$$

$$\frac{d(x^2)}{dx}.y^3+x^2.\frac{d(y^3)}{dy}+\frac{dy}{dx}.y^2+x.\frac{d(y^2)}{dx}-\frac{dy}{dx}-0=0$$

$$2xy^3+x^2.\frac{d(y^3)}{dx}+y^2+x.\frac{d(y^2)}{dx}-\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{.....(1)}$$

Hagamos el siguiente artificio:

$$\frac{d(y^3)}{dx}=\frac{d(y^3)}{dy}.\frac{dy}{dx}=3y^2.\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{d(y^2)}{dx}=\frac{d(y^2)}{dy}.\frac{dy}{dx}=2y.\frac{dy}{dx}$$

Ahora en (1) tenemos:

$$2xy^3+x^2.3y^2.\frac{dy}{dx}+y^2+x.2y.\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=0$$

$$3x^2y^2.\frac{dy}{dx}+2xy.\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=-2xy^3-y^2$$

$$(3x^2y^2+2xy-1).\frac{dy}{dx}=-2xy^3-y^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^3+y^2}{3x^2y^2+2xy-1}$$

PROBLEMA 14: Si $x^3 + y^3 = 8xy$. Determine: $\frac{dy}{dx}$

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos a derivar en forma implícita:

$$\frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(8xy)}{dx}$$

$$3x^2 + \frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(8x)}{dx}.y + (8x).\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + \frac{d(y^3)}{dy}.\frac{dy}{dx} = 8y + 8x.\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 3y^2.\frac{dy}{dx} = 8y + 8x.\frac{dy}{dx}$$

$$3y^2.\frac{dy}{dx} - 8x.\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2$$

$$(3y^2 - 8x)\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

PROBLEMA 15: Determine: $\frac{dy}{dx}$ a partir de: $x^2\,\text{sen}(y) + y^3\cos(x) - 2x - 3y + 2 = 0$

Resolución: Según la teoría, procedemos de la manera siguiente:

$$\frac{d(x^2\,\text{sen}(y))}{dx} + \frac{d(y^3\cos(x))}{dx} - 2 - 3.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x.\text{sen}(y) + \frac{d(\text{sen}(y))}{dx}.x^2 + \frac{d(y^3)}{dx}.\cos(x) + \frac{d(\cos(x))}{dx}.y^3 - 2 - 3.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x.\text{sen}(y) + \frac{d(\text{sen}(y))}{dx}.x^2 + \frac{d(y^3)}{dx}.\cos(x) - \text{sen}(x).y^3 - 2 - 3.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$* \quad \frac{d(\text{sen}(y))}{dx} = \frac{d(\text{sen}(y))}{dy}.\frac{dy}{dx} = \cos(y).\frac{dy}{dx}$$

$$* \quad \frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(y^3)}{dy}.\frac{dy}{dx} = 3y^2.\frac{dy}{dx}$$

Ahora tenemos:

team CALAPENSHKO

$$2x.\text{sen}(y)+\cos(y).\frac{dy}{dx}.x^2+3y^2.\frac{dy}{dx}.\cos(x)-\text{sen}(x).y^3-2-3.\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^2\cos(y).\frac{dy}{dx}+3y^2\cos(x).\frac{dy}{dx}-3.\frac{dy}{dx}=\text{sen}(x).y^3-2x\,\text{sen}(y)+2$$

$$(x^2\cos(y)+3y^2\cos(x)-3).\frac{dy}{dx}=\text{sen}(x).y^3-2x\,\text{sen}(y)+2$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^3\,\text{sen}(x)-2x\,\text{sen}(y)+2}{x^2\cos(y)+3y^2\cos(x)-3}$$

PROBLEMA 16: Si: $f(x)=\left[\!\left[\frac{x^2+4}{x^2+5}\right]\!\right]$. Determine $f'(x)$.

Resolución: Redefiniendo la función f, tenemos:

$$\frac{x^2+4}{x^2+5}=\frac{(x^2+5)-1}{x^2+5}=1-\frac{1}{x^2+5}$$

* $\forall x\in\mathbb{R}$: $\quad 0\le x^2<\infty \;\leftrightarrow\; 5\le x^2+5<\infty$

$$0<\frac{1}{x^2+5}\le\frac{1}{5}\;\leftrightarrow\;-\frac{1}{5}\le-\frac{1}{x^2+5}<0$$

$$1-\frac{1}{5}\le 1-\frac{1}{x^2+5}<1+0\;\leftrightarrow\;\frac{4}{5}\le\frac{x^2+4}{x^2+5}<1$$

Nótese que $\left[\!\left[\frac{x^2+4}{x^2+5}\right]\!\right]=0$, con lo cual $f(x)=0$.

$$\therefore\quad f'(x)=0$$

PROBLEMA 17: Dada la función $f(x)=7^{x^2-2x+3}$. Calcular $f'(1)$

Resolución: Según la teoría tenemos:

$$f'(x)=7^{x^2-2x+3}.\ln(7).\frac{d(x^2-2x+3)}{dx}=7^{x^2-2x+3}.\ln(7).(2x-2)$$

$$\therefore\quad f'(1)=7^2.\ln(7).0=0$$

PROBLEMA 18: Si $f(x)=\ln(\cos(x))$. Calcular: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Resolución: Según la teoría tenemos:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos(x)}.\frac{d(\cos(x))}{dx}=\frac{1}{\cos(x)}.(-\text{sen}(x))$$

$$f'(x)=-\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$

Finalmente para $x=\frac{\pi}{6}$:

$$\therefore\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PROBLEMA 19: Si a, b, c ∧ d son las raíces del polinomio: $P(x)\equiv x^4-x^3+x^2-2x+1$

Calcular el valor de S, siendo: $S=a^3+b^3+c^3+d^3$

Resolución: Según aplicaciones de la derivada se pide el cuarto coeficiente de la expresión trascendente que se obtiene al dividir $P'(x)\div P(x)$.

$$P(x)\equiv x^4-x^3+x^2-2x+1$$

$$P'(x)\equiv 4x^3-3x^2+2x-2$$

Según el método de Horner:

1	4	−3	2	−2	0	0	0	.....
1		4	−4	8	−4			
−1			1	−1	2	−1		
2				−1	1	−2	1	.....
−1							...	
	4	1	−1	4				
	↓	↓	↓	↓				
	S_0	S_1	S_2	S_3				

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3+d^3=4$$

PROBLEMA 20: Determine los intervalos para los cuales la función f tiene representación gráfica cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba:

$$f(x)=x^4-5x^3+9x^2-2x+1$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Según la teoría se plantea cada caso.

I. Cóncava hacia abajo:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x - 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$$

Por condición $f''(x) < 0$, esto es:

$$12x^2 - 30x + 18 < 0$$
$$2x^2 - 5x + 3 < 0$$

$2x$ -3

x -1

$$(2x-3)(x-1) < 0 \quad \rightarrow \quad 1 < x < \frac{3}{2}$$

La función f tiene su gráfica cóncava hacia abajo en el intervalo $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$

II. Cóncava hacia arriba.

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x - 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$$

Por condición $f''(x) > 0$, esto es:

$$12x^2 - 30x + 18 > 0$$
$$2x^2 - 5x + 3 > 0$$
$$(2x-3)(x-1) < 0 \quad \rightarrow \quad x < 1 \ \vee \ x > \frac{3}{2}$$

La función f tiene su gráfica cóncava hacia abajo en el intervalo

$$\langle -\infty; 1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; \infty \right\rangle$$

PROBLEMA 21: Si la función $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ es decreciente en el intervalo $\langle a; b\rangle$. Calcular a.b

Resolución: De acuerdo con la teoría: $F'(x) < 0$

$$3x^2 - 12x + 9 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 < 0$$
$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 3$$

La función es decreciente en: $\langle 1; 3\rangle$, es decir $a = 1 \ \wedge \ b = 3$

$$\therefore \quad a \,.\, b = 3$$

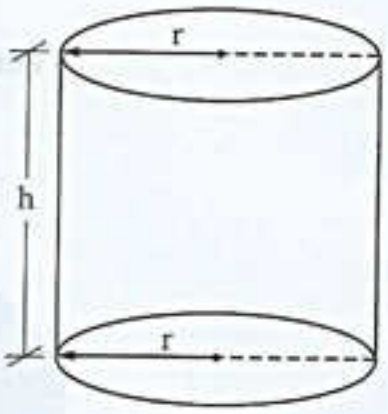
PROBLEMA 22: Se desea construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y 800 cm^3 de volumen. Determine la medida que debe tener la radio de la base para que la cantidad de metal sea mínima cuando el recipiente sea abierto.

Resolución:

$V = \text{Volumen} = \pi r^2 . h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ ..... (1)

A = Área total = Área lateral + Área de la base

$A = 2\pi rh + \pi r^2$ ..... (2)



Reemplazando (1) en (2): $A = 2\pi r\left(\dfrac{V}{\pi r^2}\right) + \pi r^2$

$A = \dfrac{2V}{r} + \pi r^2$

Por dato V = 800: $A = \dfrac{1600}{r} + \pi r^2$

Como A es función de r: $F(r) = 1600r^{-1} + \pi r^2$

Derivando tenemos: $F'(r) = -1600r^{-2} + 2\pi r$

Hallemos el punto crítico: $F'(r) = 0 \Leftrightarrow -1600r^{-2} + 2\pi r = 0$

$$2\pi r = \frac{1600}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{800}{\pi} \Leftrightarrow r = 2\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$$

Una rápida inspección permite observar que el valor de "r" evaluado en F"(r) origina un valor positivo, razón por la cual se puede afirmar que F(r) es mínimo cuando $r = 2\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}$

PROBLEMA 23: Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\right)$

Resolución: Observa que al evaluar en x = 0 se obtiene $L = \dfrac{0}{0}$, razón por la cual es recomendable levantar la indeterminación utilizando la regla de Hospitall – Bernoulli, veamos:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\right) \Leftrightarrow L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x}\right)$$

Observar que: $\sec^2 x - \cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$

$$\sec^2 x - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

Ahora tenemos : $L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos^2 x\,.\,(1-\cos x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)$

Evaluando : $\therefore \quad L = \frac{1+1+(1)^2}{(1)^2} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} = 3$

PROBLEMA 24: Calcular P(3), si P(x) es un polinomio de cuarto grado que verifica las condiciones:
I) $P(2) = P'(2) = 0;\ P''(2) \neq 0$
II) $P(-1) = 0;\ P'(-1) \neq 0$
III) $P(1) = 16 \ \wedge \ P(0) = 12$

Resolución:

Por condición : $x = 2$ es una raíz de multiplicidad dos
$x = -1$ es una raíz simple

El polinomio es : $P(x) \equiv (x-2)^2\,.\,(x+1)\,.\,(ax+b)$ .....(1)

Haciendo $x = 1$: $P(1) = (1)(2)(a+b) \Leftrightarrow 16 = 2(a+b) \Leftrightarrow a+b = 8$

Haciendo $x = 0$: $P(0) = (-2)^2(1)(b) \Leftrightarrow 12 = 4b \Leftrightarrow b = 3 \ \wedge \ a = 5$

Ahora en (1) : $P(x) \equiv (x-2)^2\,.\,(x+1)\,.\,(5x+3)$

Haciendo $x = 3$: $P(3) = (1)^2\,.\,(4)\,.\,(18)$

$\therefore \quad P(3) = 72$

PROBLEMA 25: Para que valor del parámetro "n" la función:

$$F(x) = 9x^2 - 12x + 5n + 2$$

Asume por mínimo valor: 8

Resolución:

La función dada es: $F(x) = 9x^2 - 12x + (5n+2)$ .....(1)

Su 1era derivada es: $F'(x) = 18x - 12$ .....(2)

Su 2da derivada es: $F''(x) = 18$ .....(3)

Notar que en (3): $F''(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, con lo cual hemos verificado que la función F(x) tiene mínimo.

Ahora hallaremos el valor de x que hace mínimo la función.

De (2) se plantea: $F'(x) = 0 \Rightarrow 18x - 12 = 0$

De donde obtendremos: $x = \frac{2}{3}$

Finalmente en (1) tenemos: $F(x)_{min} \leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Veamos: $F\left(\frac{2}{3}\right) = 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{2}{3}\right) + 5n + 2$

Por condición: $8 = 4 - 8 + 5n + 2 \rightarrow 5n - 2 = 8$

$\therefore \quad n = 2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 26: Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{Ln(x+1)-2x}{3x}\right]$

Resolución: Sea la expresión: $F(x)=\frac{Ln(x+1)-2x}{3x}$

Observar que si: $x=0 \Rightarrow F(x)=\frac{0}{0}$

Luego por la regla de L´Hospitall – Bernoulli tenemos:

$$G(x)=\frac{\frac{d(Ln(x+1)-2x)}{dx}}{\frac{d(3x)}{dx}}=\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right).1-2}{3}=\frac{\frac{1}{x+1}-2}{3}$$

Ahora evaluamos $G(x)$ en $x=0$

$$\frac{\frac{1}{0+1}-2}{3}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{Ln(x+1)-2x}{3x}\right]=-\frac{1}{3}$$

PROBLEMA 27: Calcular: $L=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}\right]$

Resolución: Como la forma es $\frac{0}{0}$ podemos dar uso de la Regla de Hospitall – Bernoulli:

$$L=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-\pi\ sen(\pi x)}{2(x-1)}\right]$$

Al evaluar, nuevamente obtenemos la forma $\frac{0}{0}$, razón por la cual utilizaremos otra vez la Regla de Hospitall – Bernoulli:

$$L=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-\pi^2.\cos(\pi x)}{2}\right]$$

Finalmente para $x=1$:

$$\therefore L=\frac{-\pi^2.\cos(\pi)}{2}=\frac{-\pi^2.(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 28 Calcular: $E = \sqrt{n^2 - m^2}$, si: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}\right) = \dfrac{9}{2}$

Resolución:

Supongamos que: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}\right)$

Hospitall – Bernoulli: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-m\,\text{sen}(mx)+n\,\text{sen}(nx)}{2x}\right)$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-m^2\cos(mx)+n^2\cos(nx)}{2}\right)$$

Evaluando en $x = 0$: $L = \dfrac{-m^2\cos(0)+n^2\cos(0)}{2} = \dfrac{-m^2+n^2}{2}$

Por condición tenemos: $\dfrac{-m^2+n^2}{2} = \dfrac{9}{2} \leftrightarrow n^2 - m^2 = 9$

Finalmente conseguimos: $E = \sqrt{n^2 - m^2} = \sqrt{9}$

$$\therefore E = 3$$

PROBLEMA 29: Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 0}[\cos(x)+a\,\text{sen}(bx)]^{\frac{1}{x}}$; $a,b \in \mathbb{R}^+$

Resolución:

Observa que cuando $x = 0$ se obtiene la forma 1^{∞}, luego por el teorema adicional podemos plantear:

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)+a\,\text{sen}(bx)-1}{x}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Supongamos que hacemos:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)+a\,\text{sen}(bx)-1}{x}\right] = L_1$$

Por Hospitall – Bernoulli:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\text{sen}(x)+ab\cos(bx)}{1}\right] = L_1$$

Ahora evaluemos en $x = 0$:

$$-\text{sen}(0)+ab\cos(0) = L_1$$

$$0 + ab.1 = L_1 \leftrightarrow L_1 = ab$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$\therefore \quad L = e^{L_1} = e^{ab}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30: Esbozar la gráfica de la siguiente función: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

Resolución: Para trazar la gráfica de una función con mayor precisión se procede de la manera siguiente.

I. Intervalo de crecimiento:

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 > 0 \leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0$$
$$(x+3)(x-1) > 0 \leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$$

La función es creciente en el intervalo: $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$

II. Intervalo de decrecimiento

$$f'(x) < 0 \leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 < 0 \leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$
$$(x+3)(x-1) < 0 \leftrightarrow -3 < x < 1$$

La función es creciente en el intervalo: $\langle -3; 1\rangle$

III. Extremos relativos o locales:

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0 \leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Los puntos críticos son $(-3; f(-3))$ y $(1; f(1))$, donde:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 1 = -27 + 27 + 27 + 1 = 28$$

$$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 1 = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$$

Nótese que $f(-3) = 28$ es el máximo relativo de la función y $f(1) = -4$ el mínimo relativo.

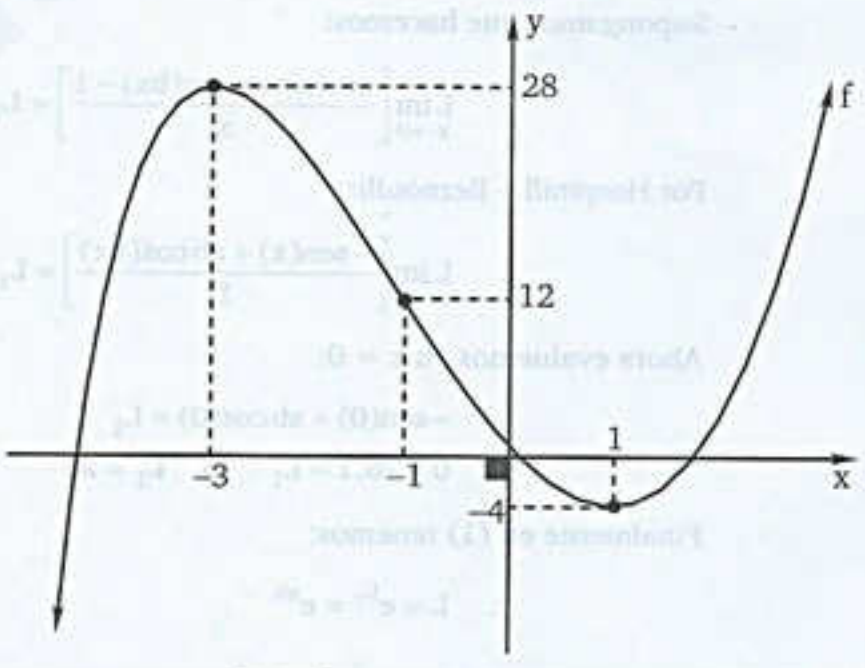
IV. Punto de inflexión:

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow 6x + 6 = 0 \leftrightarrow x = -1$$

El punto de inflexión es $(-1; f(-1))$, donde:

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) + 1 = -1 + 3 + 9 + 1 = 12$$

Finalmente graficando tenemos:



team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $F(x) = 3x^4 + 2x$.
Determine $F'(x)$

A) $12x$ B) $12x^3$ C) $12x + 2$
D) $12x^3 + 2$ E) $12x^2 + 2$

2. Si $F(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
Determine $F'(x)$

A) $\dfrac{x^2-8x+1}{x^2-2x+1}$ B) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-1}$
C) $\dfrac{x^2-3}{x^2-2x+1}$
D) $2x$ E) 1

3. Si $F(x) = \ln(x^2)$. Halle $F'(x)$.

A) $\dfrac{2}{x}$ B) $2x$ C) $\dfrac{1}{x}$
D) $\dfrac{1}{x^2}$ E) x

4. Si $H(x) = 3x^3 + 4x^2 - x$. Determine: $H''(x)$

A) $9x^2 + 8x$ B) $9x^2 + 4x - 1$
C) $18x + 4$
D) $9x + 4$ E) $27x + 4$

5. Si $F(x) = x^2 + 2x$. Calcular:
$F(1) + F''(2)$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

6. Si $H(x) = \text{sen}(5x^2) + 4$. Determine $H'(x)$

A) $\cos(5x^2)$ B) $5x\cos(5x^2)$
C) $10x\cos(5x^2) + 1$
D) $10x\cos(5x^2)$ E) $-10x\cos(5x^2)$

7. Si: $F(x) = \dfrac{1}{x}$
Determine $F''(x)$

A) x^2 B) $-\dfrac{2}{x^2}$ C) $\dfrac{2}{x^2}$
D) $\dfrac{2}{x^3}$ E) $-\dfrac{2}{x^3}$

8. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{7x^3+x-8}{x^2-1}\right]$

A) 11 B) 10 C) 12
D) $\dfrac{7}{2}$ E) 13

9. Halle el mínimo valor de la función F definida por: $F(x) = x^2 - 6x + 13$

A) 3 B) -3 C) 4
D) -4 E) 5

10. Si $F(x) = \text{sen}^2(x)$, entonces: $F'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ es:

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ E) $\dfrac{1}{4}$

team CALAPENSHKO

11. Si $F(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Calcular $F'(-2)$

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

12. Si $F(x) = e^{2x+3}$, calcular: $F'(0)$.

A) e^3 B) $2e$ C) $2e^2$

D) $2e^3$ E) 0

13. La función $F(x) = 3x^2 - 4x + 8$ es creciente en el intervalo.

A) $\left\langle -\infty; \frac{2}{3} \right\rangle$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right\rangle$ C) $\left[\frac{2}{3}; \infty \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{3}; \infty \right\rangle$

14. Hallar la ecuación de la tangente a la curva: $y = 4x^2 + 1$ en el punto $P(1; 5)$

A) $8x - y - 3 = 0$ B) $6x - y - 2 = 0$

C) $6x + y + 2 = 0$

D) $6x + 2y - 1 = 0$ E) $6x - 2y - 1 = 0$

15. Si $n \in \mathbb{Z}^+ / F(x) = x^n + n$. Calcular "n" sabiendo que la n - ésima derivada de F(x) es 720

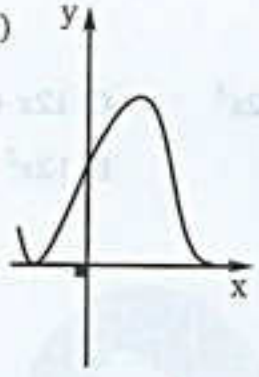
A) 5 B) 6

C) 7

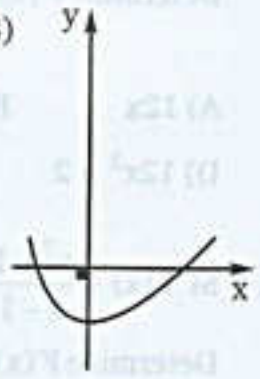
D) 4 E) Faltan datos

16. ¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la gráfica de una función polinomial definida así: $F(x) = x^3 + ax + b; a \neq 0$?

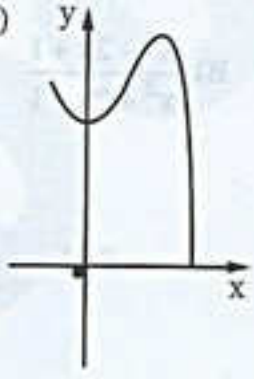
A)



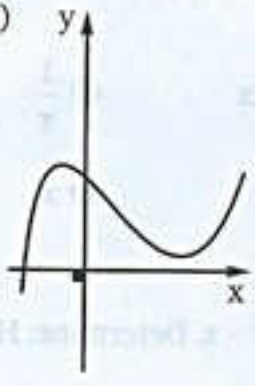
B)



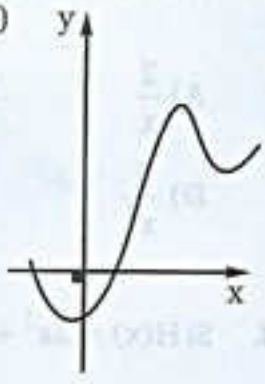
C)



D)



E)



17. Calcular:

$$\lim_{x \to 6}\left[\frac{x - \sqrt{3x-2} - \sqrt[3]{x+2}}{x - \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{4x+3}}\right]$$

A) $\frac{117}{116}$ B) $\frac{111}{118}$ C) $\frac{117}{119}$

D) $\frac{117}{118}$ E) $\frac{118}{117}$

team CALAPENSHKO

18. Obtener el máximo valor de la función:

$$F(x) = 1 + 6x - \frac{1}{2}x^3$$

A) 9 B) 4 C) 11
D) 5 E) 13

19. Con respecto al problema anterior. ¿Cuál es el mínimo valor de F(x)?

A) −9 B) 4 C) 7
D) −7 E) 10

20. Si $F(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. Calcular : F'(1)

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

21. Si $a \in R^*$. Calcular F'(2a), si $F(x) = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$

A) $\frac{8}{9a}$ B) $\frac{16}{9a}$ C) $\frac{8a}{9}$
D) $\frac{16a}{9}$ E) $\frac{16}{9}$

22. Determine la mayor abscisa de los puntos de inflexión de la curva descrita por la función:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$$

A) 0 B) −1 C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) −4

23. Determine $\frac{dy}{dx}$ a partir de:

$$3x^6 + 2x^3y - xy^7 = 10$$

A) $\frac{y^7 - 18x^5 - 6x^2y}{2x^3 + 7xy^6}$ B) $\frac{y^7 - 18x^5 - 6xy}{2x^3 - 7xy^6}$
C) $\frac{y^7 - 18x^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$
D) $\frac{y^7 + 18x^5 - y}{x^3 - 4xy^6}$ E) $\frac{y^7 - 18x^5 - 6y}{x^3 - 7xy^6}$

24. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 4x^2 ; x < -\frac{1}{2} \\ bx - 3 \quad ; x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Determine los valores de "a" y "b" de modo que f sea derivable en todo su dominio.

A) −4; −8 B) −8; −10 C) 8; 10
D) −6; −8 E) −2; −4

25. Calcular la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación:

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 = 0$$

A) 4 B) −4 C) 10
D) −10 E) 12

26. Calcular:

$$R = \lim_{x \to 0}\left[\frac{a^x - 4^x}{x}\right]; \ a \in \mathbb{R}^+$$

A) 1 B) 2 C) $\text{Ln}\left(\frac{a}{2}\right)$
D) $\text{Ln}\left(\frac{a}{4}\right)$ E) $\text{Ln}\left(\frac{a}{8}\right)$

27. Sea:

$$F(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 8$$

Marcar verdadero o falso en:

( ) Tiene un mínimo relativo en $x = -1$
( ) Tiene 2 raíces reales
( ) Su menor raíz está ubicada en $\langle -3; -2\rangle$

A) VFF B) FVF C) FFV
D) VVV E) FFF

28. Sea la función polinomial:

$$F(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$$

¿En qué intervalo la función es creciente?

A) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle -1/2; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
E) $\langle -\infty; -4\rangle \cup \langle -2; -1\rangle$

29. Si:

$$F(x) \equiv \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

indique el valor de verdad de:

( ) F es creciente $\langle -\infty; -1\rangle$
( ) Es continua en $[0; 1/2]$
( ) Es una función par en su dominio

A) VVF B) VVV C) FFF
D) FFV E) FVF

30. Calcular el valor de la derivada de la función:

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 2$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

31. Determine la altura "h" de un cilindro recto que tenga la superficie lateral máxima; inscrito en una esfera de radio R.

A) $h = R\sqrt{3}$ B) $h = R\sqrt{2}$ C) $h = \frac{R}{2}$
D) $h = \frac{R}{3}$ E) $h = \frac{2}{3}R$

32. Un arrendador ha adquirido un nuevo edificio con 100 departamentos para rentar y encuentra que entre más unidades x que quiera rentar, más deberá ser su precio P(x), de acuerdo a la fórmula:

$$P(x) = 180 - 1{,}2x \ \wedge \ 0 \le x \le 100$$

¿Cuántas unidades debía rentar y a que precio para maximizar sus ingresos?

A) 75; 90 B) 70; 95 C) 40; 25
D) 80; 60 E) 10; 20

33. Un rectángulo con lados horizontales y verticales tiene un vértice en el origen, otro en el eje de las x (rama positiva), uno más en el eje positivo de y, y el último en la recta cuya ecuación es: $2x + y = 100$. ¿Cuál es la máxima área del rectángulo?

A) 1 000 u^2 B) 225 C) 1 200
D) 1 250 E) 1 300

34. Calcular el valor aproximado de: $\frac{x^x - 1}{\ln x}$

Cuando x se aproxima a 1

A) 0 B) ∞ C) 1
D) 2 E) 4

35. Se tiene una hoja rectangular de papel, de lados 8 y 15 pulgadas, se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente las partes restantes. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados de tal manera que se obtenga el mayor volumen posible.

A) 5/3 B) 5/2 C) 2/3
D) 3 E) 2/5

36. Calcular: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

A) 1 B) −1 C) abc
D) $\frac{1}{abc}$ E) $\sqrt[3]{abc}$

team CALAPENSHKO

37. Determinar la mayor área posible de un triángulo isósceles cuyo perímetro es 18 pulgadas.

A) $9\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 12
D) $2\sqrt{6}$ E) 4,5

38. Determine el valor máximo de:

$$F(x) = \operatorname{sen} x + \cos x;\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) $2\sqrt{2}$

39. Calcular mn, si el polinomio:

$$P(x) = mx^4 + nx^3 + 1$$

tiene 1 como raíz doble.

A) 6 B) –6 C) 12
D) –12 E) –18

40. Si el polinomio: $P(x) = x^3 + ax^2 + 12x + b$, admite un cero real doble. ¿Cuál es el menor valor entero positivo que puede asumir "a"?

A) 6 B) 5 C) 4
D) 7 E) 8

41. Grafique: $F(x) = x^4 - 4x^3$ e indique el valor de verdad.

( ) F es creciente en $\langle -\infty; 0\rangle$
( ) F es decreciente en $\langle 0; 3\rangle$
( ) F es creciente en $\langle 3; \infty\rangle$

A) FFF B) VVV C) FVV
D) VFF E) FVF

42. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área y con los lados paralelos a los ejes coordenados que pueden inscribirse en la figura limitada por las dos parábolas:

$$3y = 12 - x^2\ ;\ 6y = x^2 - 12$$

Indicar la suma de tales dimensiones (base y altura)

A) 8 B) 2 C) –2
D) 4 E) –4

43. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

A) 6 cm y 4 cm B) 7 cm y 3 cm
C) 8 cm y 4 cm
D) 5 cm y 10 cm E) 5 cm y 8 cm

44. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{x}\right)$; $a \wedge b \in \mathbb{R}^+$

A) $\ln(ab)$ B) ab C) $\ln(a - b)$
D) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ E) $a + b$

45. Si: $f'(x) = 2x + 3$ y $f(1) = 8$
Entonces: f(0) es igual a:

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

46. Dadas las funciones definidas por:

$$f(x) = ax^2 + 2x\ ;\ g(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Calcular el valor de "a" para que se cumpla $(f \circ g)'_{(2)} = 30$

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{2}$ E) 1

team CALAPENSHKO

47. Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x e^{7x} - x}{1-\cos(\sqrt{7x})}\right]$

Donde "e", es la base de los logaritmos neperianos.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) 4 E) $\frac{1}{4}$

48. Dado: $F(x) = x^2 \ln x$, hallar: $f^{100}_{(1)}$.

Observación: $f^{(n)}_{(1)} \rightarrow$ n–ésima derivada.

A) $-(97)!$ B) $2(97)!$ C) $-2(97)!$

D) $\frac{1}{2}(97)!$ E) $96!$

49. Si:

$$L = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^x - a^x}{x-a}\right)$$

Calcular: $\sqrt[a]{L}$

A) a B) $\sqrt{a}$ C) $\sqrt[a]{a}$

D) 1 E) 0

50. Calcular ad + bc, en la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

para que pase por el punto P(–1; 1) y tenga un punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0; –2)

A) – 10 B) – 8 C) 6

D) 12 E) 14

team CALAPENSHKO

Capítulo 20

Nociones de Lógica

CAPACIDADES

- Reconocer proposiciones simples y compuestas.
- Construir tablas de verdad para fórmulas moleculares.
- Reconocer, transformar y construir funciones proposicionales.

GEORGE BOOLE

(Lincoln, Reino Unido, 1815 - Ballintemple, actual Irlanda, 1864) Matemático británico. Procedía de una familia venida a menos y tuvo que desestimar la idea de convertirse en monje al verse obligado a mantener a sus padres.

A los dieciséis años enseñaba matemáticas en un colegio privado y más tarde fundó uno propio. A los veintecuatro años, tras la publicación de su primer escrito, pudo ingresar en Cambridge, pero desestimó la oferta, de nuevo a causa de sus deberes respecto a su familia. En 1849 fue nombrado profesor de matemáticas del Queen's College, en Cork, donde permaneció el resto de su vida.

El gran descubrimiento de Boole fue aplicar una serie de símbolos a operaciones lógicas y hacer que estos símbolos y operaciones –por elección cuidadosa– tuvieran la misma estructura lógica que el álgebra convencional. En el álgebra de Boole, los símbolos podían manipularse según reglas fijas que producirían resultados lógicos.

En 1854 publicó Investigación sobre las leyes del pensamiento, libro que trataba por completo de la lógica simbólica y su álgebra. La influencia de esta lógica matemática sobre las matemáticas modernas tendría una evolución lenta: si en un primer momento no parecía más que un intrincado juego de palabras, más adelante se vio que era de lo más útil, y hasta completamente indispensable para conseguir la matemática lógica. Boole se casó a la edad de cuarenta años y tuvo cinco hijas, a las que no llegó a ver adolescentes.

team CALAPENSHKO

NOCIONES DE LÓGICA

CONCEPTO DE LÓGICA

Es la ciencia que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico.

DEFINICIONES BÁSICAS

1. **ENUNCIADO:** Es toda frase u oración en un lenguaje preciso.
   Algunos ejemplos son:
   a. Te estoy esperando.
   b. ¡Oh!
   c. Judith estudia.

2. **PROPOSICIÓN:** Es todo enunciado de tipo informativo, es decir puede ser calificado como verdadero o falso.
   Algunos ejemplos son:
   a. 7 es un número par.
   b. $\sqrt{100} + \sqrt[3]{8} = 12$

CLASES DE PROPOSICIONES

1. **PROPOSICIÓN SIMPLE (P. S.):** Llamada también **proposición atómica**, es la proposición que contiene una sola afirmación, se representa por letras minúsculas. Algunos ejemplos son:
   p: Katy es una niña inquieta.
   q: Oscar es arquitecto.
   r: Marcelina es ama de casa.
2. **PROPOSICIÓN COMPUESTA (P. C.):** Llamada también **proposición molecular,** es aquella que está formada por dos o más proposiciones simples o la negación de una proposición simple.

CONECTIVO LÓGICO

Es una representación simbólica de alguna palabra que sirve para ligar dos proposiciones o negar una proposición

1. **NEGACIÓN (~):** Se utiliza para indicar el cambio de un contenido afirmativo a un contenido negativo o viceversa. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	~p
V	F
F	V

Algunos ejemplos son:
p: Juan es profesor.
~ p: Juan no es profesor.
q: Oscar es ingeniero.
~ q: Oscar no es ingeniero.

team CALAPENSHKO

2. CONJUNCIÓN (∧):

Sean p y q dos proposiciones; p ∧ q es la proposición compuesta llamada conjunción que se lee "p y q" y es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas, en cualquier otro caso es falso. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Algunos ejemplos son:

a. Gauss y Villarreal fueron matemáticos.

p: Gauss fue matemático ..... (V)

q: Villarreal fue matemático ..... (V)

Luego por la tabla p ∧ q es verdadero:

p ∧ q
(V) (V)
(V)

b. 15 es múltiplo de 5 y 2

p: 15 es multiplo de 5...(V)

q: 15 es multiplo de 2...(F)

Luego por la tabla p ∧ q es falso

p ∧ q
(V) (F)
(F)

3. DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL (∨):

Sean p y q dos proposiciones , p∨q es la proposición compuesta llamada disyunción inclusiva que se lee "p o q" y es falsa si ambas proposiciones son falsas , en cualquier otro caso es verdadera. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE (Δ):

Sean las proposiciones p y q; p Δ q es la proposición compuesta amada disyunción exclusiva y se le reconoce por que el término sugiere que la verdad o falsedad de una proposición es incompatible con la verdad o falsedad de otro. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. CONDICIONAL (→):

Sean las proposiciones p y q; p→q es la proposición compuesta llamada condicional que se lee " si p entonces q" donde p es el antecedente y q el consecuente. Una proposición condicional es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Su tabla verdadera es la siguiente.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. BICONDICIONAL (↔):

Sean las proposiciones p y q; $p \leftrightarrow q$ es la proposición compuesta llamada bicondicional. Una bicondicional es verdadera sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TAUTOLÓGICAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS

1. TAUTOLOGÍA: Consideremos la siguiente proposición compuesta $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ cuya tabla de verdad es:

p q	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V V	V V V V V
V F	F F V V F
F V	V F F V V
F F	V F F V F

Observa que la proposición compuesta resulta siempre verdadera, independiente del valor de las componentes, luego decimos que se tiene una tautología o ley lógica.

2. CONTRADICCIÓN: Consideremos la siguiente proposición compuesta. $\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)]$ cuya tabla de verdad es:

p q	$\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)]$
V V	F V V V
V F	F V V V
F V	F V V V
F F	F F V F

Observa que la proposición compuesta resuelta siempre falsa, luego decimos que la proposición expresa una contradicción.

3. CONTINGENCIA:

Consideremos la siguiente proposición compuesta $p \vee \sim q$ cuya tabla de verdad es:

p q	$p \vee \sim q$
V V	V
V F	V
F V	F
F F	F

Observa que la proposición compuesta contiene indistintamente valores verdaderos y falsos, luego decimos que la proposición es una CONTINGENCIA.

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Siendo p, q y r proposiciones, tenemos:

1) IDEMPOTENCIA

1A. $p \vee p \equiv p$

1B. $p \wedge p \equiv p$

2) ASOCIATIVA

2A. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

2B. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

3) CONMUTATIVA

3A. $p \vee q \equiv q \vee p$

3B. $p \wedge q \equiv q \wedge q$

team CALAPENSHKO

4) DISTRIBUTIVA

4A. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4B. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5) DE IDENTIDAD

5A. $p \vee F \equiv p$

5B. $p \vee V \equiv V$

5C. $p \wedge V \equiv p$

5D. $p \wedge F \equiv F$

6) DE COMPLEMENTO:

6A. $p \vee \sim p \equiv V$

6B. $\sim\sim p \equiv p$

6C. $p \wedge \sim p \equiv F$

6D. $\sim V \equiv F\ ;\ \sim F \equiv V$

7) DE D'MORGAN:

7A. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7B. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

8) DE ABSORCIÓN:

8A. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

8B. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

FUNCIÓN PROPOSICIONAL

Todo proposición simple asigna a un sujeto particular una determinada propiedad.

Si "p" es la propiedad denotamos con P(x) al conjunto de todas las proposiciones que se obtienen al sustituir el sujeto variable (x) por un individuo; quedando definida una función proposicional c o n una variable. P(x) es una función proposicional, carece de sentido decir que es verdadera o falsa; pero cada (x) particular se convierte en proposición.

PROPIEDAD:

Dado un conjunto A y sobre el una función proposicional P(x), P(a) tiene la propiedad de ser verdadero o falsa para todo $a \in A$.

OBSERVACIÓN:

A partir funciones proposicionales se pueden obtener proposiciones generales mediante el proceso lógico denominado CUANTIFICACIÓN.

CUANTIFICADORES

Son expresiones que denotan cantidad y que al ligarse con funciones proposicionales forman una proposición.

1. **CUANTIFICADOR UNIVERSAL ($\forall$):** Se utiliza para indicar que la variable de la función proposicional puede asumir todos los valores del conjunto dado .
   El cuantificador universal se simboliza con $\forall$ y se lee asi:
   "Para todo"
2. **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL ($\exists$):** Se utiliza para indicar que la variable de la función proposicional puede asumir al menos uno de los valores de un conjunto dado.
   El cuantificador existencial se simboliza con $\exists$ y se lle asi:
   " existe al menos un"

OBSERVACIONES :

A) Para el cuantificar universal $\forall$, la proposición será verdadera si la función proposicional es verdadera para todos los elementos del conjunto de referencia.

B) Para el cuantificador existencial $\exists$, la proposición será verdadera si se encuentra por lo menos un elemento del conjunto de referencia que hace verdadera la función proposicional.

NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES:

A. PARA EL UNIVERSAL

$\sim (\forall x : p(x)) \equiv (\exists x :\sim p(x))$

Ejemplo:

"Todos los hombres son mortales".

Simbolizando: $\forall$ x: P(x)

Negando: $\sim (\forall$ x: P(x))

"Algún hombre no es mortal".

Simbolizando: $\exists$ x: $\sim$ P(x)

B. PARA EL EXISTENCIAL

$\sim (\exists x : p(x)) \equiv (\forall x :\sim p(x))$

Ejemplo:

"Algunos hombres son virtuosos"

Simbolizando: $\exists$ x: P(x)

Negando: $\sim (\exists$ x: P(x))

"Todos los hombres no son virtuosos"

Simbolizando: $\forall$ x: $\sim$ P(x)

EQUIVALENCIAS LÓGICAS

DEFINICIÓN:

Dos proposiciones se dice que son lógicamente equivalentes si los resultados de su tabla de verdad son idénticos. Si p y q son proposiciones equivalentes, se denota: $p \equiv q$.

Ejemplo: Veamos la tabla de verdad de: $p \to q$.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ahora veamos la tabla de verdad de: $\sim p \vee q$

p	q	~ p	~ p ∨ q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

$\therefore p \to q \equiv \sim p \vee q$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Escribe (E) si es enunciado o (P) si es propo-
sición , según corresponda en la oración.

A. Te extraño ...( )
B. Juan y Carlos son hermanos ...( )
C. Mayo tiene 30 días. ...( )
D. $3+3<5$ ... ( )
E. Estudio es progreso ...( )

2. Escribe 3 proposiciones simple (ps) y 3 proposiciones compuestas (pc)

(ps): _____
(ps): _____
(ps): _____
(pc): _____
(pc): _____
(pc): _____

3. Determine el valor del siguiente enunciado

"si $6+\sqrt[5]{32}=4$, entonces $\sqrt{25}+1>\sqrt{64}$"

Resolución:

4. Sean p, q y r proposiciones tales que p es verdadero, q es falso y r es falso.
Determine el valor de verdad de la proposición: $(p\vee q)\wedge r$

Resolución:

twitter.com/calapenshko

5. Para cada proposición dada reconoce si es tautología, contradicción o contingencia.

I. $[((\sim p)\vee q)\wedge \sim q]\rightarrow \sim p$

_____

II. $(p\wedge \sim q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$

_____

III. $p\rightarrow(r\vee \sim q)$

_____

6. Simplificar en cada caso:

A. $\sim p\vee \sim(p\wedge q)$

B. $[p\rightarrow(\sim p\wedge q)]\rightarrow[\sim q\wedge \sim p]$

C. $\sim[(p\rightarrow(\sim p\wedge \sim q))\wedge(p\wedge(p\vee q))]$

D. $\{(\sim p\vee q)\vee[(p\rightarrow q)\wedge r]\}\wedge q$

E. $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01: Sean: p: Trabajo mucho.
q: Aprobaré mis exámenes.
r: Iré a la Universidad.
Expresar simbólicamente las siguientes proposiciones:
a) Trabajo mucho y aprobaré mis exámenes.
b) Si trabajo mucho, iré a la universidad.
c) Iré a la universidad si y sólo si trabajo mucho y apruebo mis exámenes.

Resolución: De acuerdo con la teoría tenemos:

a) $p \wedge q$ b) $p \rightarrow r$ c) $r \leftrightarrow (p \wedge q)$

PROBLEMA 02: Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:
a) Si $4 + 3 = 8$ entonces $3 + 3 = 6$.
b) No es verdad que $5 + 5 = 8$ si y sólo si $6 + 6 = 14$

Resolución: Para cada caso tenemos:

a) $p: 4+3=8$, $q: 3+3=6$: $p \rightarrow q$ → (F) (F) → (V)

∴ La proposición es verdadera.

b) $p: 5+5=8$, $q: 6+6=14$: $p \leftrightarrow q$ → (F) (F) → (V)

Finalmente: $\sim (p \leftrightarrow q)$ → ↓ V → (F)

∴ La proposición es falsa

PROBLEMA 03: Determine el grado de validez de p, q y r. Si la proposición:
$(\sim p \wedge q) \rightarrow r$ es falsa.

Resolución: De acuerdo con la tabla de la condicional:
$(\sim p \wedge q)$ debe ser verdadera y r falsa.
Ahora como $(\sim p \wedge q)$ es verdadera, necesariamente se cumple que:
$\sim p$ es verdadera; luego p es falsa.
También que: q es verdadera.
Finalmente: ∴ p es falsa (F); q es verdadera (V) y r es falsa (F).

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 04: Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:

I. $2 \neq 7$, es una proposición simple.

II. $3x + 2 = 10$, es una proposición simple.

III. $2x + 3 \leq 7$, es una proposición compuesta.

IV. $5 + 4 \leq 6$, es una proposición compuesta.

Resolución:

De acuerdo con la teoría tenemos:

I. Es falso. Porque se trata de la negación de $2 = 7$.

II. Es falso. Porque no podemos determinar el valor de x.

III. Es falso. Porque no se precisa el valor de x.

IV. Verdadero. Porque se puede descomponer en proposiciones simples, veamos: $5+4\leq 6 \leftrightarrow \underbrace{5+4=6}_{p} \vee \underbrace{5+4<6}_{q}$

PROBLEMA 05: Si "p" y "q" son proposiciones falsa y verdadera respectivamente. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. $(p \vee q) \rightarrow p$ II. $\sim q \rightarrow p$

III. $\sim p \rightarrow q$ IV. $\sim p \rightarrow (p \wedge q)$

Resolución:

Por condición: $p : F$ y $q : V$

En cada caso sustituimos los valores y tenemos:

I. $(p \vee q) \rightarrow p$

$\underbrace{F \quad V}_{V} \quad F$

$\underbrace{\quad V \quad F \quad}_{F}$

La proposición es falsa

II. $\sim q \rightarrow p$

$\underbrace{F \quad F}_{V}$

La proposición es verdadera.

III. $\sim p \rightarrow q$

$\underbrace{V \quad V}_{V}$

La proposición es verdadera.

IV. $\sim p \rightarrow (p \wedge q)$

$\underbrace{\quad F \quad V}_{F}$

$\underbrace{V \quad F}$

La proposición es falsa.

PROBLEMA 06: Si la proposición $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ es falsa. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $r \rightarrow q$?

Resolución:

Por condición : $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

F

Ahora notamos que : $p \wedge \sim q$; $p \rightarrow r$

$V \qquad F$

Con lo cual tenemos: $p : V \quad q : F \quad r : F$

team CALAPENSHKO

Finalmente : $r \rightarrow q$

F F

Ⓥ

$\therefore$ La proposición es verdadera.

PROBLEMA 07: Si se sabe que $s \wedge t$ es verdadera, $r \leftrightarrow s$ es falsa, $p \rightarrow q$ es falsa, $\sim p \vee r$ es falsa. Determinar los valores de "p", "q", "r", "s" y "t".

Resolución: Completando los valores de abajo hacia arriba.

I. $s \wedge t$ — Ⓥ Ⓥ — V

II. $p \rightarrow q$ — Ⓥ Ⓕ — F

III. $\sim p \vee r$ — Ⓕ Ⓕ — F

Ahora tenemos: $s : V$, $t : V$, $p : V$, $q : F$, $r : F$

Comprobando con: $r \leftrightarrow s$

Ⓕ Ⓥ

F

PROBLEMA 08: Determine la forma más simple de: $p * (p * q)$, si:

p	q	p * q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Resolución: Una minuciosa inspección a la tabla dada permite asegurar que esta corresponde a la negación de la disyuntiva débil, luego:

$$p * q = \sim (p \vee q)$$

Sea la proposición dada:

$$T = p * (p * q)$$
$$T = p * [\sim (p \vee q)]$$
$$T = \sim \{p \vee [\sim (p \vee q)]\}$$

Por leyes lógicas: $T = \sim [p \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

$$T = \sim [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)]$$
$$T = \sim (p \vee \sim q)$$
$$\therefore T = \sim p \wedge q$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 09: Simbolizar lógicamente la expresión "Juan Pérez saldrá elegido y será congresista si, y sólo si obtiene apoyo en su provincia".

Resolución: De acuerdo con el texto podemos identificar las siguientes proposiciones:

p: Juan Pérez saldrá elegido.

q: Juan Pérez será congresista.

r: Juan Pérez obtiene apoyo en su provincia.

Ahora el texto tiene la siguiente forma:

$\underbrace{\text{Juan Pérez saldrá elegido}}_{p}$ y $\underbrace{\text{será congresista}}_{q}$ si, y sólo si $\underbrace{\text{obtiene apoyo en su provincia.}}_{r}$

$\therefore$ Fórmula molecular: $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

PROBLEMA 10: Dadas las funciones proposicionales:

$p(x): x^2 = 16 \quad q(x): x - 4 = 8 \quad r(x) = x^2 - 5 > 2 \quad s(x) = \sqrt{x+3} \geq 0$

Determine el valor de verdad de:

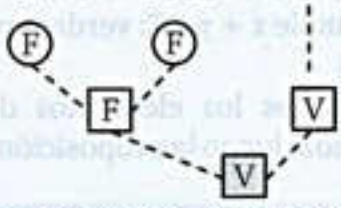
I) $\{\sim p(4) \wedge q(3)\} \rightarrow s(-3)$ II) $p(3) \vee \{r(3) \leftrightarrow s(-1)\}$

Resolución: En cada caso es necesario determinar el valor de verdad de cada función proposicional según el valor asignado a su variable.

I) $p(4): 4^2 = 16$ (V);
$q(3): 3 - 4 = 8$ (F)
$s(-3): \sqrt{-3+3} \geq 0$ (V)

Ahora tenemos:

$\{\sim p(4) \wedge q(3)\} \rightarrow s(-3)$

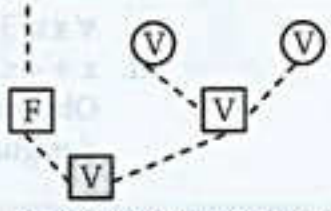


$\therefore$ La proposición es verdadera.

II) $p(3): 3^2 = 16$ (F);
$r(3): 3^2 - 5 > 2$ (V);
$s(-1): \sqrt{-1+3} \geq 0$ (V)

Ahora tenemos:

$p(3) \vee \{r(3) \leftrightarrow s(-1)\}$



$\therefore$ La proposición es verdadera.

PROBLEMA 11: Sabiendo que: $x^2 \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$ se plantea:

si $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$, se pide establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\forall x \in B$, se cumple que: $x^2 \leq 16$ II. $\exists x \in B$, tal que: $2x + 3 = 5$

team CALAPENSHKO

Resolución: Para cada uno de los casos citados se tendrá:

I. $x^2 \leq 16 \rightarrow -4 \leq x \leq 4$ C.S.$= \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

Fácilmente notamos que: $B \subset C.S.$

$\therefore \forall x \in B$, se cumple : $x^2 \leq 16$ es verdadera.

II. $2x+3=5 \rightarrow 2x=2 \quad \therefore \ x=1$

Al inspeccionar los elementos del conjunto B descubrimos que al menos un valor de x, que pertenece a B, satisface la igualdad.

$\therefore \exists x \in B$, tal que $2x + 3 = 5$ es verdadera.

PROBLEMA 12: Si: $A = \{1;2;3;4;5\}$ determine el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\exists x \in A \mid x+3=10$ II. $\exists x \in A \mid x+3<5$ III. $\forall x \in A : x+2 \leq 6$

Resolución: Analizando cada caso tenemos:

I. $x+3=10 \rightarrow x=7$.
Observa que $7 \notin A$, luego la proposición es falsa.

II. $x+3<5 \rightarrow x<2$
Observa que al menos un valor de $x \in A$, esto es $x = 1$, satisface la desigualdad obtenida. Por tanto la proposición es verdadera.

III. $x+2 \leq 6 \rightarrow x \leq 4$
Observa que no todos los elementos de A satisfacen la desigualdad obtenida, luego la proposición es falsa.

PROBLEMA 13: Si: $A = \{1;2;3;4;5\}$ proporcione el valor de verdad en cada caso:

I. $\exists x \in A \mid x+3 \leq 10$ II. $\forall x \in A, \exists y \in A \mid x+y \leq 7$ III. $\forall x \in A : x+4 \leq 8$

Resolución: Analizando cada uno de los casos tenemos:

I. $x+3 \leq 10 \rightarrow x \leq 7$.
Observa que al menos un elemento de A satisface la desigualdad obtenida, luego la proposición es verdadera.

II. $x \in \{1;2;3;4;5\}$ $y \in \{1;2;3;4;5\}$
$\forall x$ si $\exists y$ tal que cumple $x + y \leq 7$: verdadero.

III. $x+4 \leq 8 \rightarrow x \leq 4$
Observa que no todos los elementos de A satisfacen ($x = 5$) la desigualdad obtenida, luego la proposición es falsa.

PROBLEMA 14: Sea: $A = \{1;2;3\}$ determine el valor de verdad de las siguientes expresiones:

I. $\exists x \in A, \forall y \in A \mid x^2 < y+1$ II. $\forall x \in A, \exists y \in A \mid x^2+y^2<12$

III. $\exists x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A \mid x^2+y^2<2x^2$

Resolución: De acuerdo con las proposiciones, consideremos:

$x \in \{1;2;3\}$, $y \in \{1;2;3\}$, $z \in \{1;2;3\}$

team CALAPENSHKO

I. $\forall$ y si $\exists$ x; que cumple: $x^2 < y + 1$. La proposición es verdadera.

II. $\forall$ x si $\exists$ y; que cumple: $x^2 + y^2 < 12$. La proposición es verdadera.

III. $\forall$ z no $\exists$ x ni $\exists$ y; que cumple: $x^2 + y^2 < 2x^2$. Por ejemplo:

Si $z = 1$ tenemos $x^2 + y^2 < 2$, luego fácilmente notamos que no existe $x \in \{1; 2; 3\}$ ni $y \in \{1; 2; 3\}$ que satisface la desigualdad.

La proposición es falsa.

PROBLEMA 15: Negar la siguiente proposición "para todo número racional r existe un número entero n tal que $n \leq r < n + 1$"

Resolución: Mediante un lenguaje simbólico notamos que se pregunta por T, donde:

$$T = \sim [\forall r \in Q; \exists n \in \mathbb{Z} \mid (n \leq r \wedge r < n+1)]$$
$$T = \exists r \in Q; \forall n \in \mathbb{Z} \mid \sim (n \leq r \wedge r < n+1)$$
$$\therefore T = \exists r \in Q; \forall n \in \mathbb{Z} \mid n > r \wedge r \geq n+1$$

PROBLEMA 16: Dadas las proposiciones:

$p: \{\exists x \in \mathbb{N} \mid x+2=5\} \wedge \{\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > x\}$

$q: \{\forall x \in \mathbb{Z}, -a < 0\} \vee \{\exists x \in \mathbb{Z} \mid -x = x\}$

$r: \exists x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$

Indicar el valor de verdad de sus negaciones.

Resolución:

I. $\sim p: \underbrace{\{\forall x \in \mathbb{N} \mid x+2 \neq 5\}}_{(F)} \vee \underbrace{\{\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq x\}}_{(V)}$ $\therefore$ La proposición $\sim p$ es verdadera.

II. $\sim q: \underbrace{\{\exists a \in \mathbb{Z}, -a \geq 0\}}_{(V)} \vee \underbrace{\{\forall x \in \mathbb{Z} \mid -x \neq x\}}_{(F)}$ $\therefore$ La proposición $\sim q$ es falsa.

III. $\sim r: \forall x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$ $\therefore$ Es evidente que esta proposición es falsa.

PROBLEMA 17: Simplificar: $[p \rightarrow (\sim p \wedge q)] \rightarrow [\sim q \wedge \sim p]$

Resolución: Dando uso de las leyes lógicas procedemos de la manera siguiente:

$$[p \rightarrow (\sim p \wedge q)] \rightarrow (\sim q \wedge \sim p)$$

Condicional: $[\sim p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (\sim q \wedge \sim p)$

Absorción: $\sim p \rightarrow [\sim q \wedge \sim p]$

Conmutativa: $\sim p \rightarrow [\sim p \wedge \sim q]$

Condicional: $p \vee [\sim p \wedge \sim q]$

team CALAPENSHKO

Distributiva: $(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ Conmutativa: $\sim q \vee p$

Complemento: $V \wedge (p \vee \sim q)$ Condicional: $\therefore\ q \rightarrow p$

Identidad: $p \vee \sim q$

PROBLEMA 18: Simplificar: $\sim [(p \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge (p \vee q))]$

Resolución: Dando uso de las leyes lógicas, tenemos:

$\sim [(p \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge (p \vee q))]$

Condicional: $\sim [(\sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge (p \vee q))]$

Absorción: $\sim [(\sim p) \wedge (p)]$

Complemento: $\sim [F]$

Finalmente obtenemos: V

PROBLEMA 19: Simplificar: $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Resolución: Dando uso de las leyes lógicas tenemos:

$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow (q \rightarrow p)$

Condicional: $[(\sim p \vee q) \rightarrow p] \rightarrow (\sim q \vee p)$

Condicional: $[\sim (\sim p \vee q) \vee p] \rightarrow (\sim q \vee p)$

$[(p \wedge \sim q) \vee p] \rightarrow (\sim q \vee p)$

Conmutativa: $[p \vee (p \wedge \sim q)] \rightarrow (\sim q \vee p)$

Absorción: $p \rightarrow (\sim q \vee p)$

Condicional: $\sim p \vee (\sim q \vee p)$

$\sim p \vee (p \vee \sim q)$

Asociativa: $(\sim p \vee p) \vee \sim q$

Complemento: $V \vee \sim q$

Finalmente por identidad obtenemos: V

PROBLEMA 20: Si # es un operador lógico definido por: $p \# q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
¿será $p \# q$ una tautología?

Resolución: Elaborando la tabla de verdad para la formula proposicional dada, tenemos:

p q	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$		
V V	V	V	V
V F	F	V	V
F V	F	V	V
F F	F	V	F

$\therefore$ En efecto: $p \# q$ es una tautología.

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21: Si la proposición: "No es cierto que estudiemos y no aprobemos" es verdadera. Entonces podemos afirmar que:

A) Aprobamos y no estudiamos
B) Estudiamos y no aprobamos
C) Estudiamos y aprobamos
D) Estudiamos o aprobamos
E) Aprobamos o no estudiamos

Resolución:

Damos nombres a las proposiciones: p: Estudiamos q: Aprobamos

$\underbrace{\text{No es cierto que estudiamos}}_{\sim p}$ $\underbrace{\text{No aprobemos}}_{\sim q}$

Del enunciado del problema se tiene que:

$\sim p \wedge \sim q$ (Es verdadera).

Con lo cual: $\sim p \equiv V \rightarrow p \equiv F$

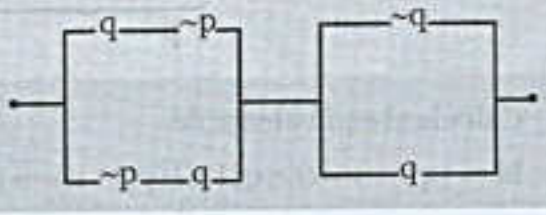
$\sim q \equiv F \rightarrow q \equiv V$

De las alternativas: A) $q \wedge \sim p \equiv F$ B) $p \wedge \sim q \equiv F$ C) $p \wedge q \equiv F$

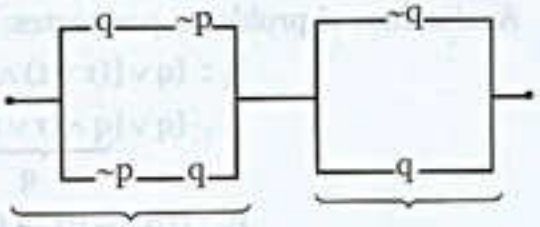
D) $p \vee q \equiv F$ E) $q \vee \sim p \equiv V$

$\therefore$ Cumple la alternativa E.

PROBLEMA 22: Calcule el circuito más simple equivalente de:



Resolución:



$\underbrace{[\underbrace{(q \wedge \sim p)}_{(\sim p \wedge q)} \vee (\sim p \wedge q)]}_{(\sim p \wedge q)} \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_{V}$

$\sim p - q \rightarrow$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 23: Simplificar el esquema: $E = [(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge p$.

Resolución:

$[(\sim p \vee q) \rightarrow \underbrace{(q \rightarrow p)}] \wedge p$ — Condicional.

$[\underbrace{(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p)}] \wedge p$ — Condicional

$[\underbrace{\sim(\sim p \wedge q)} \vee (\sim q \vee p)] \wedge p$ — de Morgan

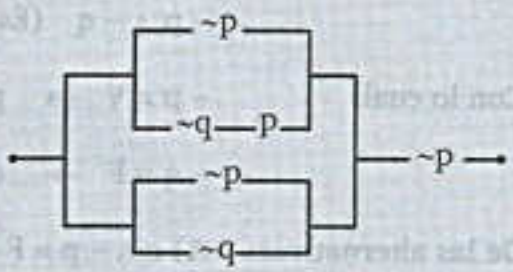
$\underbrace{[(p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p)]} \wedge p$ — Identidad

$(p \vee \sim q) \wedge p$ — Conmutativa

$\underbrace{p \wedge (p \vee \sim q)}$ — Absorción

p

PROBLEMA 24: Indique el enunciado lógico que representa al siguiente circuito:



Resolución: Del circuito obtenemos:

$\underbrace{\{[\sim p \vee (\sim q \wedge p)]} \vee (\sim p \vee \sim q)\} \wedge \sim p$

$\underbrace{\{(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee \sim q)\}} \wedge \sim p$

$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p$

$\underbrace{\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)}$

$\therefore \sim p$

PROBLEMA 25: Calcule el equivalente de:

$M = \{q \vee [(r \vee t) \wedge q]\} \wedge [(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$

Resolución: Analizamos el problema por partes:

$P_1 : \{q \vee [(r \vee t) \wedge q]\}$ — Conmutativa

$\{q \vee [\underbrace{q \wedge (r \vee t)}]\}$ — Absorción

q

$P_2 : [(p \wedge \sim q) \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow q)}]$ — Condicional

$\underbrace{[(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)]}$ — Condicional

$[\sim(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)]$ — Morgan

$\underbrace{[(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)]}$ — Idenpotente

$\sim p \vee q$

Finalmente se tiene que:

$$M = P_1 \wedge P_2$$

team CALAPENSHKO

$M = q \wedge (\sim p \vee q)$ C
$M = q \wedge (q \vee \sim p)$ A
$M = q$

PROBLEMA 26: Simbolice correctamente: "No estudie para el examen final porque trabaje hasta tarde; ya que llegaron muchos clientes".

Resolución:

Damos nombres a las proposiciones:

p: Estudie para el examen final. r: Llegaron muchos clientes.

q: Trabaje hasta tarde

Expresamos simbólicamente el enunciado del problema:

"No "p" porque "q"; ya que "r"".

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim p}}_{\sim p} \rightarrow \sim p}_{q \rightarrow \sim p} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)}$$

PROBLEMA 27: La siguiente expresión es verdadera: "Si Juan no esta enfermo o estudia el sábado en la noche entonces esta enfermo". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Juan estudia Sábado en la mañana. b) Juan esta enfermo.

c) Juan no estudia el Sábado.

d) Juan va al médico. e) Juan no está enfermo.

Resolución:

Damos nombre a las proposiciones:

p: Juan está enfermo

q: Juan estudia el Sábado en la noche.

Expresamos simbólicamente el enunciado del problema.

Si no "p" o "q" entonces "p"

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim p}}_{\sim p} \vee q}_{\sim p \vee q} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{(\sim p \vee q) \rightarrow p}$$

Aplicamos leyes lógicas:

$(\sim p \vee q) \rightarrow p$ Condicional
$\sim (\sim p \vee q) \vee p$ Morgan
$(p \wedge \sim q) \vee p$ Conmutativa
$\underbrace{p \vee (p \wedge \sim q)}_{p}$ Absorción

Como p es verdadero, finalmente se tiene que: "Juan esta enfermo"

PROBLEMA 28: Se define: $p \# q \equiv \sim p \wedge q$; $p \theta q \equiv p \vee \sim q$.
Además la proposición: $\sim [(q \# p) \rightarrow (q \theta r)]$ es verdadera. Calcule los valores de verdad de p; q y r respectivamente.

Resolución: Se puede deducir que: $p \theta q \equiv \sim (p \# q)$

Del problema: $\sim [(q \# p) \rightarrow (q \theta r)]$

Aplicamos leyes lógicas:

$\sim [(q \# p) \rightarrow (q \theta r)]$ Condicional

$\sim [\sim (q \# p) \vee \underbrace{(q \theta r)}]$

$- [\sim (q \# p) \vee \sim (q \# r)]$ de Morgan

$(q \# p) \wedge (q \# r)$

$\underbrace{(\sim q \wedge p) \wedge (\sim q \wedge r)}$

$\sim q \wedge p \wedge r$

Como la proposición final es verdadera, entonces deducimos que:

$p \equiv V$; $q \equiv F$; $r = V$

PROBLEMA 29: Encuentre el equivalente a la siguiente fórmula lógica:
$\sim (q \wedge \sim p) \wedge \{\sim (\sim p) \vee \sim q)]$

Resolución: Aplicamos leyes lógicas:

$\underbrace{\sim (q \wedge \sim p)} \wedge \{\sim (\sim p) \vee \sim q\}$ de Morgan

$(\sim q \vee p) \wedge \{\underbrace{\sim (\sim p)} \vee \sim q\}$ Involución

$(\sim q \vee p) \wedge \{\underbrace{p \vee \sim q}\}$ Conmutativa

$\underbrace{(\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee p)\}}$ Condicional

$\therefore \quad q \rightarrow p$

PROBLEMA 30: Hallar el valor de verdad de: $A = \{1; 2; 3\}$ en:

I. $\sim [\exists x \in A / x^2 = 4]$

II. $\sim [\forall x \in A / x + 1 > 3]$

III. $\sim [\forall x \in A / x + 2 = 5]$

Resolución: Para cada caso, según la teoría tenemos:

I) $\forall x \in A \mid x^2 \neq 4$ (Falsa porque no cumple para $x = 2$)

II) $\exists x \in A \mid x + 1 \geq 3$ (Verdadero porque cumple para $x = 1$ o para $x = 2$)

III) $\exists x \in A \mid x + 2 \neq 5$ (Verdadero porque cumple para $x = 1$ o para $x = 2$)

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Del enunciado:
"No es cierto que Carlos sea escritor y no sea poeta" es equivalente a:

A) Carlos es poeta y no es escritor.
B) Carlos es poeta o escritor.
C) Carlos es poeta o no es escritor.
D) Carlos es escritor o no es poeta.
E) Carlos es poeta y es escritor.

2. La negación de:
Ni Elizabeth estudia matemática ni atiende a la clase es:

A) No es cierto que, Elizabeth estudie matemática y atienda a la clase.
B) Elizabeth atiende a la clase y estudia matemática.
C) Elizabeth no atiende a la clase o no estudia matemática.
D) Elizabeth atiende a la clase o no estudia matemática.
E) Elizabeth atiende a la clase o estudia matemática.

3. Al desarrollar la tabla de verdad de:
$(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim q)$
El número de valores verdaderos en el operador principal es:

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

4. De: $[\sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)] \wedge (p \Delta q)$
Se afirma que:

A) Es tautológico
B) Es contingente.
C) Es contradictorio
D) Faltan datos.
E) Ninguna de las anteriores.

5. Indicar los valores de verdad de las siguientes proposiciones.
I. $(2+7=9) \vee (6-2=5)$
II. $(4-3=2) \rightarrow (2-7=1)$
III. $(3+4=7) \wedge (6-2>3)$
IV. $(3\times4=10) \leftrightarrow (9\times4=3)$

A) VVVV B) VVFV C) VVFF
D) VFVF E) VVVF

6. Se define el operador # por:
$$p \# q \equiv \sim p \vee q$$
Hallar el equivalente a:
$$(p \# \sim q) \# (q \# \sim p)$$

A) $\sim p \vee q$ B) $p \wedge \sim q$ C) $\sim q \wedge p$
D) $p \wedge q$ E) Tautología

7. Si la proposición: $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$ es falsa. Determinar el valor de p, q y r

A) FVF B) FVV C) FFF
D) VFF E) FFV

8. Aplicando equivalencias lógicas, simplificar lo más posible la siguiente proposición:
$$a \vee (b \vee c)$$
$a \equiv \{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\}$
$b \equiv [(p \wedge q) \wedge (p \vee q)]$
$c \equiv [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]$

A) $\sim p \wedge q$ B) $\sim p \vee q$ C) $p \wedge q$
D) $\sim (p \rightarrow q)$ E) $\sim p \leftrightarrow q$

9. Simplificar a su mínima expresión:
$\sim \{\sim [\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)]\}$

A) $\sim q \rightarrow p$ B) $\sim p \vee \sim q$
C) $p \rightarrow \sim q$
D) $\sim p \wedge \sim q$ E) $p \wedge \sim q$

team CALAPENSHKO

10. Simplificar la expresión:
$[p \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \rightarrow \sim q$

A) $p \vee \sim q$ B) $p \wedge q$ C) $\sim p \vee q$
D) $\sim p \wedge \sim q$ E) $p \rightarrow \sim q$

NIEGA LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

11. Algunos alumnos no estudian.

A) Todos los alumnos no estudian.
B) Algunos alumnos estudian.
C) Ningún alumno estudia.
D) Todos los alumnos estudian.
E) Ninguna de las anteriores.

12. Todos los hombres son honestos.

A) Los hombres son deshonestos.
B) Todos los hombres son deshonestos
C) Algunos hombres son deshonestos.
D) Ningún hombre es deshonesto.
E) Algunos hombres son honestos.

13. Algunos médicos no son colegiados.

A) Todos los médicos no son colegiados.
B) Algunos médicos son colegiados.
C) Ningún médico es colegiado.
D) Todos los médicos son colegiados.
E) Los médicos deben colegiarse.

14. Ningún economista es contador.

A) Algún economista no es contador.
B) Algún economista es contador.
C) Todos los economistas son contadores.
D) Ningún economista es contador.
E) Todos los economistas no son contadores.

15. Todos los patos vuelan.

A) Algunos patos vuelan.
B) Ningún pato vuela.
C) Algunos patos no vuelan.
D) Ningún pato no vuela.
E) Por lo menos un pato vuela.

16. Dada la siguiente proposición; determine cual de los enunciados proposicionales es correcto.
"Todos los mamíferos son vertebrados".
Implica:
I. Es falso que algunos mamíferos no son vertebrados.
II. Es verdad que ningún mamífero es vertebrado.
III. Es cierto que algún mamífero es vertebrado.
Las proposiciones correctas son:

A) I y II B) I y III C) II y III
D) Todas E) Ninguna

17. Dadas las proposiciones, ¿cuáles son equivalentes entre sí?
I. Es necesario que Carlos no vaya al cine para que termine su tarea.
II. No es cierto que Carlos termina su tarea o vaya al cine.
III. Carlos no termina su tarea y no irá al cine.

A) Sólo I y II
B) Sólo II y III
C) Sólo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna es equivalente.

18. Dadas las siguientes premisas.
– Todos los que estudian arquitectura saben dibujar.
– Algunos estudiantes de arquitectura hacen deporte.
Se deduce que:

A) Ninguno que estudia arquitectura hace deporte.
B) Todos los que hacen deporte saben dibujar.
C) Todos los que estudian arquitectura no hacen deporte.
D) Algunos que hacen deporte saben dibujar.
E) Ninguno que hace deporte estudia arquitectura.

team CALAPENSHKO

19. Dado: $A = \{1; 2; 3; 4\}$; determine el valor de verdad de:

I. $\exists x \in A \mid 2x - 1 = 7$

II. $\forall x \in A : \sqrt{x} > 1$

III. $\forall x \in A : 2x + 3 < 9$

A) VFV B) VFF C) VVF
D) FVV E) FFF

20. ¿Cuál de las siguientes no es una función proposicional?

A) $x + 3 = 8$
B) "x" es una ciudad del Perú.
C) $2x + 10 < 6 - x$
D) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
E) El segundo nombre de Juan es "x".

21. Simplifique:
$\{[(p \leftrightarrow q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)] \wedge (p \vee q)\} \wedge \sim q$

A) $p \vee q$ B) $p \wedge q$ C) $p \wedge \sim q$
D) $q \wedge \sim p$ E) $q \leftrightarrow p$

22. Si se define al operador * por:
$p * q = q \wedge p$, simplifique:
$E = [(p * q) * p] * [(q * p) * q]$

A) p B) q C) $p \wedge \sim q$
D) $\sim p$ E) $p * q$

23. Si:
- Algunos W que son Z no son T.
- Todos los Z son W.
- Ningún W es T.

Entonces:
I. Ningún Z es T.
II. Todos los W son Z.
III. Algunos T no son W.

Respecto de estas afirmaciones, las correctas son:

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y III E) II y III

24. Respecto de: "Si gana Perú, no voy a estudiar". Indique la alternativa que se puede concluir:

A) Si estudié, ganó Perú.
B) Si no ganó Perú, estudié.
C) Si no estudié, ganó Perú.
D) Si fui a estudiar, no ganó Perú.
E) Nunca estudio porque siempre gana Perú.

25. Si ninguna persona que toma mate toma café y algunas personas que toman té toman café, entonces:

A) Ninguna persona que toma té toma mate.
B) Todas las personas que toman mate toman té.
C) Algunas personas que toman mate toman café.
D) Algunas personas que toman mate no toman té.
E) Todas las personas que toman café toman té.

26. De los siguientes enunciados:
* ¡Qué gusto me da verte!
* Todos los animales son mamíferos.
* Eratóstenes fue un filósofo griego.
* $x^2 + 4 > 13$.
* $2003^2 - 2002^2 < 4000$
* $x + 2 \neq 5$.

¿Cuál de las siguientes alternativas es correcta?

A) Existen 4 proposiciones.
B) Tres no son proposiciones.
C) Hay 3 enunciados abiertos.
D) Sólo 2 son proposiciones.
E) No hay ningún enunciado abierto.

team CALAPENSHKO

27. Sean: $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 20\}$ y $B = \{x \in A / x < 5\}$
Indique el valor de verdad de:
I. $\forall x \in A \rightarrow B \cap A = \varnothing$.
II. $\exists x \in A; \exists y \in B / x + y < 6$.
III. $\forall x \in A; \exists y \in B / x.y > 60$.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FVF

28. Dadas las proposiciones:
p: "1 es un número primo".
q y r cualquiera tal que:
$\sim [(p \vee r) \rightarrow (r \rightarrow q)]$ es verdadera. Hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares.
A: $r \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$
B: $[r \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
C: $(p \rightarrow q)\ \Delta \sim r$

A) VFF B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

29. De la falsedad de:
$(\sim p \rightarrow q) \vee (\sim s \rightarrow r)$
deducir el valor de verdad de:
I. $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
II. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$
III. $[(s \vee r) \rightarrow q] \wedge (T \rightarrow p)$
Dar como respuesta la(s) que tiene un valor verdadero.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) II y III E) I y III

30. Indicar el valor de verdad correspondiente a cada una de las siguientes proposiciones:
I. 8 es mayor que 6 ó 9 es menor que 5.
II. $\sqrt{25} - 5$ y $-2^2 = 4$.
III. Si $5 + 3 = 7$ entonces $7 < 6$.
IV. No es verdad que $1 + 1 = 3$ o que $3 + 4 = 7$

A) VVVF B) FFVF C) VFVF
D) VFFF E) VFVV

31. ¿Cuáles son proposiciones condicionales?
I. "Siempre que llueve, el viento sopla".
II. "Progresaré ya que siempre trabajo".
III. "5 es múltiplo de 2, incluso múltiplo de 3"
IV. Si $\sqrt{2}$ es irracional entonces $\sqrt{4}$ no es irracional.

A) I y II B) II y IV C) I, II y IV
D) II, III y IV E) Todas

32. Si: $\sim [(\sim p \vee q) \vee (r \rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \rightarrow (q \wedge \sim p)]$ es verdadera.
Los valores de verdad de p, q y r son respectivamente.

A) FFV B) VVF C) VVV
D) VFV E) FVV

33. Indique de que tipo es cada una de las fórmulas: Tautología (V), Contradicción (F) o contingencia (C).
I. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)$
II. $[(p \wedge q) \vee \sim p] \rightarrow q$
III. $[(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge (p \wedge \sim q)$

A) VFV B) VCV C) VCF
D) VVF E) FFC

34. Se tiene las siguientes fórmulas moleculares:
A: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q)] \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$
B: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
Simplificar el siguiente esquema:
$[(p \Delta q) \vee A] \rightarrow \sim [(q \rightarrow p) \rightarrow [B \vee ((q \rightarrow p) \wedge r)]]$

A) $p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) V
D) F E) $p \leftrightarrow q$

team CALAPENSHKO

35. La proposición:
$[(\sim p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ equivale a:

A) $\sim p \vee q$ B) $p \vee \sim q$ C) $\sim p \wedge q$
D) $p \vee q$ E) $p \wedge \sim q$

36. Si el siguiente enunciado: "Si no estudio, entonces ingresaré o seré profesional" es falso, entonces el enunciado: "Si no estudio pero ingreso, entonces seré profesional"; será verdadero si:

A) Estudio
B) No estudio
C) Ingreso
D) Siempre será verdadero.
E) En ningún caso será verdadero.

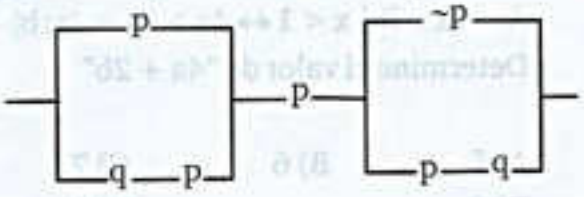
37. ¿Cuántas de las siguientes fórmulas son equivalentes a: $\sim p \rightarrow \sim (q \wedge \sim r)$?
I. $q \rightarrow (r \vee p)$
II. $\sim q \wedge (r \vee p)$
III. $\sim r \rightarrow (\sim q \vee p)$

A) Sólo I B) Sólo II C) II y III
D) I y III E) Todas.

38. Dada la equivalencia:
$p * q \equiv \sim [(q \rightarrow \sim p) \sim (\sim q \rightarrow \sim p)]$
Simplificar:
$p * (p * q) \rightarrow [\sim p * (\sim p \vee q)]$

A) $\sim p$ B) $\sim q$ C) $\sim p \vee q$
D) $\sim p \vee \sim q$ E) $\sim p \wedge \sim q$

39. Reducir el siguiente circuito lógico:



A) $p \vee q$ B) $p \wedge q$ C) $p \vee r$
D) $p \wedge r$ E) $p \wedge \sim q$

40. Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a "Es necesario pagar S/. 10 y ser más joven para ingresar al baile"
I. No ingresar al baile o pagar S/. 10 y ser más joven.
II. Pagar S/. 10 o ser joven y no ingresar al baile.
III. Pagar S/. 10 y ser joven o no ingresar al baile.

A) Sólo I B) Sólo III C) I y II
D) I y III E) Todas

41. Determine el cardinal del conjunto A.
$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x > 8 \rightarrow x = 2\}$

A) 0 B) 1 C) 7
D) 8 E) 9

42. Dado el conjunto: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Determine el valor de verdad de las proposiciones:
$p: \exists x \in A \mid (x + 2 = 6) \rightarrow (x - 6 = 8)$
$q: \exists x \in A \mid (x + 2 > 2) \vee (x + 2 < 2)$
$r: \forall x \in A;\ \exists y \in A \mid x + y > 2$

A) FFF B) FVV C) FFV
D) VVF E) VVV

team CALAPENSHKO

43. Sabiendo que:
$A = \{x \in R \mid x < 1 \leftrightarrow 4x > 3\} = \langle a; b \rangle$
Determine el valor de "4a + 2b"

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

44. Determine el valor de verdad para cada una de las proposiciones:
$p: 5 < 8 \leftrightarrow \{6 < 1 \leftrightarrow (1 \leq 2)\}$
$q: 2 < 3 \rightarrow \{(4 > 5 \leftrightarrow (2 \leq 3)) \Delta (2 < 3)\}$
$r: (a \rightarrow b) \vee (\sim a \rightarrow b)$

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) FVF

45. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. $21 \neq 24$ es una proposición simple.
II. $2x + 4 = 5$ es una proposición simple.
III. $2x + 4 \leq 5$ es una proposición compuesta.
IV. $2 + 4 \leq 5$ es una proposición compuesta.

A) FFVV B) FFFV C) VFVV
D) VFVF E) FFFF

46. Si $(\sim (q \rightarrow p)) \rightarrow (s \rightarrow r)$ es falsa,
Determine el valor veritativo de las proposiciones adjuntas; siendo W y T proposiciones lógicas.
I. $(\sim r \leftrightarrow p) \rightarrow T$.
II. $q \vee (T \rightarrow W)$.
III. $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow s)$.

A) VVF B) VFV C) VFF
D) VVV E) FVV

47. De las proposiciones:
I. $p \rightarrow (p \vee q)$
II. $(p \wedge q) \rightarrow p$
III. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
IV. $(p \wedge (\sim p \rightarrow q)) \vee \sim p$
Son tautológicas.

A) I, II $\wedge$ III B) II, III $\wedge$ IV C) III $\wedge$ IV
D) I $\wedge$ IV E) I, II, III $\wedge$ IV

48. Si:
$(\sim p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \equiv (s \wedge t) \leftrightarrow (\sim s \vee \sim t)$
Simplificar:
$[(p \wedge r) \rightarrow (s \vee t)] \wedge (q \wedge t)$

A) $s \vee t$ B) $\sim t$ C) $\sim s$
D) t E) s

49. El equivalente de:
$[(\sim p \vee q) \vee \sim (p \wedge \sim q)] \wedge [p \wedge \sim r]$ es:

A) $(p \rightarrow q) \wedge \sim (p \rightarrow r)$
B) $(p\,q) \sim (p \rightarrow r)$
C) $\sim (p\,q) \rightarrow r$
D) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r)$
E) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

50. Si se define # así:
$$p \# q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$
Determine una expresión equivalente a: $p \# q$.

A) $p \rightarrow q$ B) p C) $p \leftrightarrow q$
D) $p \Delta q$ E) $\sim (p \leftrightarrow q)$

team CALAPENSHKO

Capítulo 21

Sucesiones y Series

CAPACIDADES:

- Reconocer sucesiones y series.
- Determinar convergencia de sucesiones y series.
- Identificar sucesiones monótonas y acotadas

$$\{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

twitter.com/calapenshko

LEONARDO FIBONACCI

LEONARDO FIBONACCI (c. 1 170 – c. 1 240), también llamado Leonardo Pisano, matemático italiano que recopiló y divulgó el conocimiento matemático de clásicos grecorromanos, árabes e indios y realizó aportaciones en los campos matemáticos del álgebra y la teoría de número; introdujo los números arábigos en Europa.

Nació en Pisa, una ciudad comercial donde aprendió las bases del cálculo de los negocios mercantiles. Cuando tenía unos 20 años, se fue a Argelia, donde empezó a aprender métodos de cálculo árabes, conocimientos que incrementó durante viajes más largos. Utilizó esta experiencia para mejorar las técnicas de cálculo comercial que conocía y para extender la obra de los escritores matemáticos clásicos, como los matemáticos griegos Diofante y Euclides.

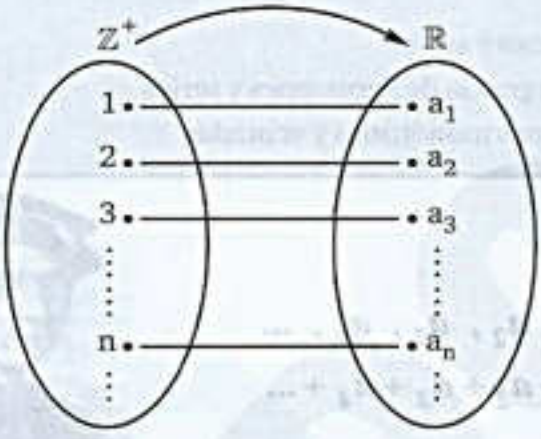
Nos han quedado pocas obras de Fibonacci. Escribió sobre la teoría de números, problemas prácticos de matemáticas comerciales y geodesia, problemas avanzados de álgebra y matemáticas recreativas. sus escritos sobre matemáticas recreativas, que a menudo los exponía como relatos, se convirtieron en retos mentales clásicos ya en el siglo XIII. Estos problemas entrañaban la suma de sucesiones, como la sucesión de Fibonacci que él descubrió ($k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$, por ejemplo, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). A cada término de esta sucesión se le denomina número de Fibonacci (la suma de los dos números que le preceden en la sucesión).

team CALAPENSHKO

SUCESIONES

DEFINICIÓN

Una sucesión es aquella función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y rango cualquier sub conjunto del conjunto de los números reales. $a: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$



Del diagrama tenemos:

a_1 = Primer elemento (o término) de la sucesión

a_n = Término n–ésimo de la sucesión

OBSERVACIÓN

1) Si la sucesión tiene "n" términos se le podrá representar de la manera siguiente:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Veamos un ejemplo:

$$\{2n+1\} = 3, 5, 7, 9, \ldots, (2n+1)$$

2) Si la sucesión consta de infinitos términos su representación será:

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Veamos un ejemplo:

$$\{n.(-1)^n\}_{n\geq 1} = -1, 2, -3, 4, \ldots, n.(-1)^n, \ldots$$

DETERMINACIÓN DE UNA SUCESIÓN

1. POR REGLA DE CORRESPONDENCIA

Aquí se conoce al término n–ésimo de la sucesión y a partir de el se obtienen los otros términos.

- Si: $a_n = n^2 + 1$, tenemos:

$$\{a_n\}_{n\geq 1}: 2, 5, 10, 17, \ldots.$$

team CALAPENSHKO

2. POR LEY DE RECURRENCIA

Aquí se conoce algún término particular de la sucesión más cierta relación que vincula a los otros términos.

- Si: $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n + 1$, tenemos:

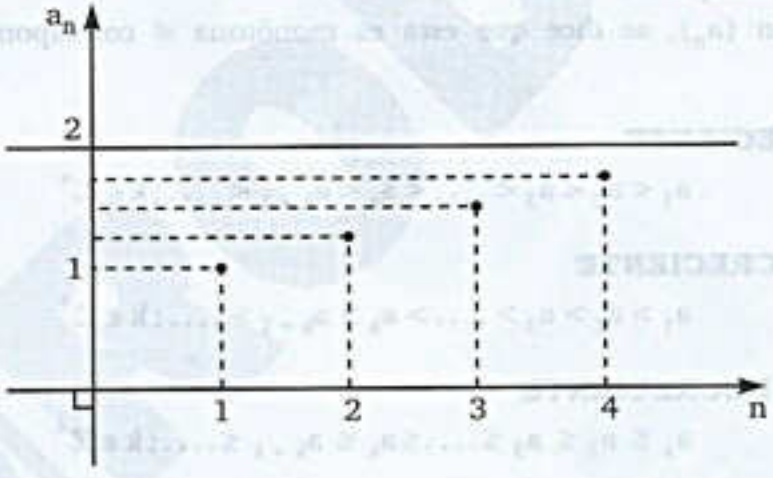
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3.2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3.7 + 1 = 22$$
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3.22 + 1 = 67$$

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Graficar una sucesión consiste en representar cada par ordenado de la forma $(n; a_n)$ en el plano cartesiano

- Para la sucesión $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ tenemos:

$$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n\geq 1} : 1; \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \ldots.$$



LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se dice que esta tiene por límite al número real L, si cuando n tiende al infinito $(n \to \infty)$ simultáneamente a_n tiende a L $(a_n \to L)$

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n) = L$$

Definición:

Sea la sucesión $\{a_n\}$, si se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim_{n\to\infty} (a_n) = L = \text{número real}$$

Se afirmara que $\{a_n\}$ es convergente y converge a L

team CALAPENSHKO

Teorema:

Si la sucesión $\{a_n\}$ converge a L cuando $n \to \infty$ se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$

OBSERVACIÓN

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n) = +\infty \quad \to \quad \{a_n\}$ es divergente

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n) = -\infty \quad \to \quad \{a_n\}$ es divergente

3) Las propiedades para el límite de una sucesión son análogas a las del límite de una función visto en el capítulo 18, por tanto se recomienda al lector considerarlas igual en este capítulo.

SUCESIONES MONÓTONAS

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se dice que esta es monótona si corresponde a cualquiera de los siguientes casos:

1. SUCESIÓN CRECIENTE

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k < a_{k+1} < \ldots; k \in \mathbb{Z}^+$$

2. SUCESIÓN DECRECIENTE

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_k > a_{k+1} > \ldots; k \in \mathbb{Z}^+$$

3. SUCESIÓN NO DECRECIENTE

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \ldots; k \in \mathbb{Z}^+$$

4. SUCESIÓN NO CRECIENTE

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots; k \in \mathbb{Z}^+$$

OBSERVACIÓN

1) $\{a_n\}$ es una sucesión constante si y sólo si $a_n = c$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

- $\{a_n\}$ con $a_n = 8$ verifica:

$$\{a_n\} = 8, 8, 8, 8, \ldots.$$

2) $\{a_n\}$ es una sucesión oscilante si sus términos se intercalan según la forma: m, n, m, n, m, ...; de acuerdo con la definición no es monótona.

- $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n$ verifica:

$$\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots.$$

team CALAPENSHKO

SUCESIONES ACOTADAS

Dada la sucesión $\{a_n\}$

1) Se dice que la sucesión es acotada inferiormente si y sólo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq M$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

2) Se dice que la sucesión es acotada superiormente si y sólo si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq N$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Definición:
$\{a_n\}$ es una sucesión acotada si y sólo si es acotada inferiormente y superiormente a la vez.

$$M \leq a_n \leq N \;;\; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Teorema:
Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Propiedad:
Si una sucesión es convergente, entones es acotada, el retorno no necesariamente se cumple.

PRUEBA DE LA RAZÓN PARA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \;\; ; \;\; L \in \mathbb{R}$$

Si $L < 1$, entonces la sucesión es convergente y converge a cero.

Teorema del Encaje:
Dadas las sucesiones $\{a_n\}$; $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Si: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n) = L \;\; ; \;\; L \in \mathbb{R}$

Entonces: $\lim_{n\to\infty} (b_n) = L$

Teoremas Adicionales:

1) **De la media aritmética:** Siendo $\{a_n\}$ una sucesión convergente:
Si se tiene: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = a$
Entonces: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \right) = a$

2) **De la media geométrica:** Siendo $\{a_n\}$ una sucesión convergente
Si se tiene: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = a$
Entonces: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \right) = a$

team CALAPENSHKO

SERIES INFINITAS DE NÚMEROS REALES

DEFINICIÓN

Una serie es la suma de todos los términos de una sucesión, así pues para la sucesión $\{a_n\}$ tenemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

La serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n + \ldots.$$

- Para $a_n = \frac{1}{3^n}$ tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots. + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

SERIES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Definición 1:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente cuando la suma de sus "n" primeros términos no excede a alguna cantidad finita por grande que sea n $(n \to \infty)$

Definición 2:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente cuando la suma de sus "n" primeros términos es mayor que cualquier cantidad finita considerado n suficientemente grande $(n \to \infty)$

Teorema:

Dadas las series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas a y b respectivamente

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot a \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{R}^*$

Propiedad:

Si la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a \ldots. + a_n + \ldots.$$

es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty}(a_n) = 0$

OBSERVACIÓN

Si la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

team CALAPENSHKO

SERIES NOTABLES

1. SERIE ARMÓNICA

Es aquella serie que presenta la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n}+\ldots.$$

es divergente

2. SERIE GEOMÉTRICA

Es aquella serie que representa la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(aq^{n-1})=a+aq+aq^2+\ldots.+aq^{n-1}+\ldots.$$

Si $|q|<1$ la serie es convergente
Si $|q|\geq 1$ la serie es divergente

3. SERIE TELESCÓPICA

Es aquella que presenta la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\ldots.$$

La serie telescópica converge si y sólo si b_{n+1} tiende a un número finito cuando $n\to\infty$, siendo su suma:

$$S=b_1-\lim_{n\to\infty}(b_{n+1})$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

1. DE COMPARACIÓN DIRECTA

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

A) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es convergente $\forall\ n\in\mathbb{Z}^+$ tal que $a_n\leq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente

B) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente $\forall\ n\in\mathbb{Z}^+$ tal que $a_n\geq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente

2. DE LA RAZÓN

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tal que: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$, entonces :

A) Si $L<1$, la serie es convergente
B) Si $L>1$, la serie es divergente
C) Si $L=1$, el criterio no decide

3. DE LA RAÍZ (CAUCHY)

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tal que: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$, entonces :

A) Si $L<1$, la serie es convergente
B) Si $L>1$, la serie es divergente
C) Si $L=1$, el criterio no decide

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Desarrolla los cinco primeros términos de cada sucesión:

A) $\{n^2-1\}_{n\geq 1}$

B) $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$

C) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

D) $\left\{\frac{n^2-n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

E) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

2. Determine la suma de los tres primeros términos de cada sucesión:

A) $\{n-2\}_{n\geq 1}$

B) $\{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\}_{n\geq 1}$

C) $\left\{\frac{1}{n^2-1}\right\}_{n\geq 1}$

D) $\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}_{n\geq 1}$

E) $\{(-1)^{n+1}\}_{n\geq 1}$

3. Colocar en cada recuadro C (converge) o NC (no converge) según corresponda a cada sucesión:

A) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ ..... ☐

B) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ ..... ☐

C) $\left\{\frac{n+1}{n^3-2}\right\}_{n\geq 1}$ ..... ☐

D) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ ..... ☐

E) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right\}_{n\geq 1}$ ..... ☐

4. Indique el término n – ésimo de cada sucesión:

A) 1; 3; 5; 7; 9; ....

B) $1;\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{24};\frac{1}{120};\ldots$

C) 1; 3; 6; 10; 15; 21; .....

5. Marcar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda

A) $\left\{\frac{n}{5n+4}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente ( )

B) $\{n^3\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente ( )

C) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente ( )

6. Determine el equivalente en cada caso:

A) $\sum_{k=1}^{10}(k)$ B) $\sum_{k=1}^{25}(2k-1)$

C) $\sum_{k=1}^{60}(2k)$

D) $\sum_{k=1}^{20}(k^2)$ E) $\sum_{k=1}^{20}(k^3)$

7. Con respecto a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^5+1}{n^5+2}\right)$$ se afirma

A) Converge a 2

B) Converge a 1

C) Converge a 0

D) Converge a $\frac{1}{2}$

E) No converge

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Mostrar los cuatro primeros términos de la sucesión:

$$\{a_n\}_{n \geq 1}, \text{ donde: } a_n = \frac{\lfloor n}{n^{n-1}}$$

Sabiendo que:

$$\lfloor n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución: La sucesión es: $\{a_n\}_{n \geq 1} = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Por la fórmula:

$$a_n = \frac{\lfloor n}{n^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{\lfloor 1}{1^{1-1}} = \frac{1}{1^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{\lfloor 2}{2^{2-1}} = \frac{2}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{\lfloor 3}{3^{3-1}} = \frac{6}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{\lfloor 4}{4^{4-1}} = \frac{24}{4^3} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \{a_n\}_{n \geq 1} = 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \ldots$$

PROBLEMA 2 Determinar el producto del tercer y cuarto término de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definida según $a_1 = 2; a_{n+1} = 3a_n - 1$

Resolución: Con la fórmula:

$$a_{n+1} = 3a_n - 1$$

Hagamos que $n = 1$:

$$a_2 = 3(a_1) - 1$$

$$a_2 = 3(2) - 1 = 5$$

Hagamos que $n = 2$:

$$a_3 = 3(a_2) - 1$$

$$a_3 = 3(5) - 1 = 14$$

Hagamos que n = 3:

$$a_4 = 3(a_3) - 1$$

$$a_4 = 3(14) - 1 = 41$$

El valor pedido es:

$$a_3 . a_4 = (14) . (41)$$

$$\therefore \ a_3 . a_4 = 574$$

PROBLEMA 3 Determina la suma de los cuatro primeros términos de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, donde:

$$a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$$

Resolución: La sucesión dada es:

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Según la fórmula:

$$a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$$

$$a_1 = \sqrt{0} - \sqrt{1} \ \rightarrow \ a_2 = \sqrt{1} - \sqrt{2}$$

Luego:

$$a_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \ \rightarrow \ a_4 = \sqrt{3} - \sqrt{4}$$

Efectuando la adición:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sqrt{0} - \sqrt{4}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 - 2$$

$$\therefore \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -2$$

PROBLEMA 4 Induce la fórmula del n – ésimo término de la sucesión:

1, 3, 6, 10, 15, 21

Resolución: Realizando una adecuada inspección de cada uno de los términos mostrados tenemos:

$$a_1 = 1 = \frac{1^2 + 1}{2} = \frac{1.(1+1)}{2}$$

team CALAPENSHKO

$$a_2 = 3 = \frac{2^2+2}{2} = \frac{2.(2+1)}{2}$$

$$a_3 = 6 = \frac{3^2+3}{2} = \frac{3.(3+1)}{2}$$

$$a_4 = 10 = \frac{4^2+4}{2} = \frac{4.(4+1)}{2}$$

$$a_5 = 15 = \frac{5^2+5}{2} = \frac{5.(5+1)}{2}$$

$$a_6 = 21 = \frac{6^2+6}{2} = \frac{6.(6+1)}{2}$$

$$\vdots$$

Finalmente podemos inducir que:

$$\therefore\ a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

PROBLEMA 5 Considera la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ donde: $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$.
Determina la diferencia de los términos décimo y octavo.

Resolución: De acuerdo con la fórmula:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$$

Para n = 10:

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 8 + 9 + 10$$

Para n = 8:

$$a_8 = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 8$$

Observa que:

$$a_{10} - a_8 = 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots + 0 + 9 + 10$$

$$a_{10} - a_8 = 0 + 9 + 10$$

$$\therefore\ a_{10} - a_8 = 19$$

PROBLEMA 6 ¿Cuál de las sucesiones:

I. $\left\{\frac{5n^2+n+1}{3n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$ II. $\left\{\frac{n^4+n+2}{n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$

Es convergente?

twitter.com/calapenshko

Resolución: Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$; se sabe que si:

$L = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \in \mathbb{R}$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y converge a L (su límite).

Así mismo si $L = \infty$ ó $L = -\infty$ diremos que la sucesión es divergente.

Para (I):

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n+1}{3n^2+1}\right)$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n^2+n+1}{n^2}}{\frac{3n^2+1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$L = \frac{5+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{5+0+0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

Como $L = \frac{5}{3}$ ¡número real!

$\therefore$ La sucesión es convergente y converge a $\frac{5}{3}$

Para (II):

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+n+2}{n^2+1}\right)$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^4+n+2}{n^4}}{\frac{n^2+1}{n^4}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)$$

$$L = \frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0+0}{0+0};\ L = \frac{1}{0} \Rightarrow L = \infty$$

$\therefore$ La sucesión es divergente.

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 7 Dada la sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos tal que:

$$a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}$$

¿Cuál debe ser el valor del primer término de la sucesión para que todos los términos sean iguales?

Resolución: Por condición:

$$a_{n+2} = a_{n+1} = a_n = a_1 > 0$$

Ahora en la fórmula dada:

$$a_1 = \frac{1 + a_1}{a_1} \quad \leftrightarrow \quad a_1^2 = 1 + a_1$$

$$a_1^2 - a_1 = 1 \quad \leftrightarrow \quad a_1^2 - a_1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \rightarrow \quad a_1 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \; a_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

PROBLEMA 8 Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$.

Determine el valor al cual converge la sucesión.

Resolución: En la fórmula dada:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$$

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty}(a_n) + 15}$$

Por teorema de unicidad se cumple que:

$L = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n)$, luego se tendrá:

$$L = \sqrt{2L + 15} \quad \rightarrow \quad L^2 = 2L + 15 \; ; \; L > 0$$

$$L^2 - 2L - 15 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (L - 5)(L + 3) = 0$$

$$L - 5 = 0 \; \vee \; L + 3 = 0 \leftrightarrow \quad L = 5 \; \vee \; L = -3$$

$$\therefore \; L = 5$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Reducir:

$$E=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{9}+\frac{1}{8}-\frac{2}{27}+\ldots$$

Resolución: Reescribiendo la expresión propuesta , de modo que se agrupen todos los términos positivos y todos los negativos tenemos:

$$E=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right.$$

Aplicando la suma límite:

$$E=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-2\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-2\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$E=1-2\left(\frac{1}{2}\right)=1-1$$

$$\therefore\ E=0$$

PROBLEMA 10 Reducir:

$$E=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}+\sum_{k=0}^{n}2^{k}-2\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}$$

Resolución: Desarrollando por separado cada sumatoria tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}&=2^0+2^1+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^n=S\\ \sum_{k=0}^{n}2^{k}&=2^0+2^1+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^n=S\\ \sum_{k=0}^{n}2^{n-k}&=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots+2^0=S\end{aligned}\right\}\text{son iguales}$$

Finalmente tenemos:

$$E=S+S-2S=2S-2S$$

$$\therefore\ E=0$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 11 Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión definida por:

$$\{a_n\}=\left\{1;\ \frac{9}{6};\ \frac{19}{11};\ \frac{33}{18};\ \ldots.\right\}$$

¿Cuál es el valor de convergencia?

Resolución: La sucesión es: $\{a_n\}=\left\{\frac{3}{3};\frac{9}{6};\frac{19}{11};\frac{33}{18};\ldots.\right\}$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{2+1}{1+2};\frac{8+1}{4+2};\frac{18+1}{9+2};\frac{32+1}{16+2};\ldots.\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{2(1)^2+1}{(1)^2+2};\frac{2(2)^2+1}{(2)^2+2};\frac{2(3)^2+1}{(3)^2+2};\frac{2(4)^2+1}{(4)^2+2};\ldots.\right\}$$

Donde se observa que:

$$a_n=\frac{2n^2+1}{n^2+2}\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+2}\right)$$

$$L=\frac{2}{1}\qquad\Rightarrow L=2$$

$\therefore$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y converge a 2

PROBLEMA 12 Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida asi:

$$\{a_n\}=\left\{1;\ \frac{3}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{5}{17};\ \frac{3}{13};\ \ldots.\right\}$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) La sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

II) La sucesión $\{a_n\}$ converge a cero.

III) El término a_{20} es $\frac{21}{401}$

Resolución: Podemos observar que:

$$a_n=\frac{n+1}{n^2+1}$$

I) Veamos si es decreciente:

$$a_k>a_{k+1}\ ;\ \forall\ k\in\mathbb{Z}^+$$

$$a_k-a_{k+1}=\frac{k+1}{k^2+1}-\frac{k+1+1}{(k+1)^2+1}$$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{k+1}{k^2+1} - \frac{k+2}{k^2+2k+2}$$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{k^2+3k}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} > 0 \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{R}^+$$

$$a_k > a_{k+1} \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{R}^+$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ es decreciente (VERDADERO)

II) Veamos la convergencia :

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$L = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} \quad \Rightarrow L = 0$$

$\therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ es convergente y converge a cero (VERDADERO)

III) Veamos al vigésimo término :

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$a_{20} = \frac{20+1}{20^2+1}$$

$$a_{20} = \frac{21}{401}$$

$\therefore$ El término a_{20} es $\frac{21}{401}$ (VERDADERO)

PROBLEMA 13 ¿A qué valor converge la serie: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^k+2^k}{5^k}\right)$?

team CALAPENSHKO

Resolución: Se sabe que si : $|a| < 1$, entonces :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$$

La serie dada es : $L = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^k+2^k}{5^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{2}{5}\right)^\kappa\right\}$

$$L = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^\kappa$$

$$L = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad L = \frac{13}{6}$$

PROBLEMA 14 Dada la serie:

$$\frac{11}{a} + \frac{101}{a^2} + \frac{1001}{a^3} + \ldots . \quad ; a > 10$$

Determine el valor de "a" sabiendo que la serie converge a $\frac{20}{19}$

Resolución: La serie dada es : $L = \frac{11}{a} + \frac{101}{a^2} + \frac{1001}{a^3} + \ldots .$

$$L = \frac{10+1}{a} + \frac{10^2+1}{a^2} + \frac{10^3+1}{a^3} + \ldots .$$

$$L = \frac{10}{a} + \frac{10^2}{a^2} + \frac{10^3}{a^3} + \ldots . + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots .$$

$$L = \left(\frac{10}{a}\right) + \left(\frac{10}{a}\right)^2 + \left(\frac{10}{a}\right)^3 + \ldots . + \left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

Serie geométrica : $L = \frac{\frac{10}{a}}{1-\frac{10}{a}} + \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} = \frac{10}{a-10} + \frac{1}{a-1}$

Por condición : $\frac{10}{a-10} + \frac{1}{a-1} = \frac{20}{19} = 1 + \frac{1}{19}$

De donde observamos : $a - 1 = 19$

$$\therefore \quad a = 20$$

PROBLEMA 15 Determine:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k^2} \cdot 2^{-k}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Observar que: $(-1)^{k^2} = (-1)^k \;;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$

Ahora tenemos: $L = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Serie geométrica: $L = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$\therefore \quad L = \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 16 Calcular:

$$L = \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \ldots.$$

Resolución: La serie dada es: $L = \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \ldots.$

$$L = \frac{2^2-1}{4} + \frac{2^3-1}{4^2} + \frac{2^4-1}{4^3} + \frac{2^5-1}{4^4} + \ldots.$$

$$L = \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{4^2} + \frac{2^4}{4^3} + \ldots. - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots.\right.$$

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots. - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots.\right.$$

Serie geométrica: $L = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 2 - \frac{1}{3}$

$$\therefore \quad L = \frac{5}{3}$$

PROBLEMA 17 Calcular:

$$L = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 - k}\right)$$

Resolución: La serie dada es: $L = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k(k-1)}\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]$

Serie telescopica: $L = \dfrac{1}{2-1} - \dfrac{1}{\infty} = \dfrac{1}{1} - 0$

$$\therefore \quad L = 1$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Determine el valor de convergencia de la siguiente serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k}$

Resolución: Se sabe que si : $|a| < 1$, entonces :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

La serie dada es : $L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1} \cdot 4}$

$$L = \sum_{k-1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1} \cdot 4}$$

Hagamos que $k-1=q$: $L = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{4^q \cdot 4} = \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{4^q}$

$$L = \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^q = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$L = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{5}$$

PROBLEMA 19 Calcular: $3M - 4N$, sabiendo que:

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right) \quad ; \quad N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Resolución: Desarrollando cada una de las sumatorias tenemos:

$$M = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

$$N = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots.$$

Restando miembro a miembro obtenemos:

$$M - N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots.$$

$$M - N = \frac{1}{2^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.\right)}_{\text{Es la serie M}}$$

$$M - N = \frac{1}{4} \cdot M \quad \Leftrightarrow \quad 4M - 4N = M$$

$$4M - M - 4N = 0$$

$$\therefore \quad 3M - 4N = 0$$

PROBLEMA 20 Determine x de modo que la serie, sea convergente

$$\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}+\left(\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}\right)^3+....$$

Resolución: La serie dada es: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}\right)^k$

Por el criterio de la raíz podemos plantear lo siguiente:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sqrt[k]{\left(\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}\right)^k}\right]<1 \;;\; 1-x\geq 0$$

De donde:

$$\frac{4\sqrt{1-x}+3}{2\pi}<1 \;\wedge\; 1-x\geq 0$$

$$4\sqrt{1-x}<2\pi-3 \;\wedge\; x-1\leq 0$$

$$1-x<\frac{4\pi^2-12\pi+9}{16}\wedge x-1\leq 0$$

$$x-1>\frac{-4\pi^2+12\pi-9}{16}\wedge x-1\leq 0$$

$$x>\frac{7+12\pi-4\pi^2}{16}\wedge x\leq 1$$

$$\therefore\quad \frac{7+12\pi-4\pi^2}{16}<x\leq 1$$

PROBLEMA 21 Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión que verifica:

$$a_1=1 \;;\; a_2=2 \;\text{ y }\; a_n=\frac{1}{2}(a_{n-2}+a_{n-1}) \;;\; \forall\, n\geq 3$$

Calcular: $|a_{101}-a_{100}|$

Resolución: La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ puede reescribirse de la manera siguiente:

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})\Leftrightarrow a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)\;;\forall\, n\geq 1$$

$$2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

Restando $2a_{n+1}$ tenemos:

$$2a_{n+2}-2a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n) \quad .....(1)$$

Hagamos: $b_n=a_{n+1}-a_n \Leftrightarrow b_1=a_2-a_1$

$$b_1=2-1$$

$$b_1=1$$

team CALAPENSHKO

Asimismo: $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$

Luego de (1) conseguimos la siguiente relación:

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n \quad \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = -\frac{1}{2}$$

"Razón de cierta progresión geométrica"

Por tanto tenemos: $b_n = b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$b_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Que es equivalente a: $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Hagamos que n=100: $a_{101} - a_{100} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{99}$

$$\therefore \quad |a_{101} - a_{100}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$$

PROBLEMA 22 Dada la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$:

$$a_{n+1} = a_n^2 - \frac{a_n}{2}$$

¿Para qué valores de a_1 la sucesión converge?

Resolución: De la fórmula: $a_{n+1} = a_n^2 - \frac{a_n}{2}$

$$a_{n+1} = a_n\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n - \frac{1}{2}$$

Si la sucesión converge, según la prueba de la razón se podra plantear la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 1$$

De donde tenemos: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 1 \;;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

Hagamos que n = 1: $\left|a_1 - \frac{1}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow -1 < a_1 - \frac{1}{2} < 1$

$$-\frac{1}{2} < a_1 < \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad a_1 \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$$

PROBLEMA 23 Determine si la sucesión, es convergente o divergente

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{23}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n^2+1}{5n^2+3}}\right\}_{n\geq 1}$$

Resolución: Sea la sucesión : $\{a_n\}=\left\{\sqrt[n]{\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{23}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n^2+1}{5n^2+3}}\right\}$

Donde : $b_n=\dfrac{n^2+1}{5n^2+3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{5n^2+3}\right)=\dfrac{1}{5}$

Por el teorema de la media geométrica tenemos :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\ldots\cdot b_n}=\frac{1}{5}$$

Es decir : $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\dfrac{1}{5}$

$\therefore$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente

PROBLEMA 24 La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ con $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}$ ¿Es acotada?

Resolución: Del término general: $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}=\dfrac{(n^2+1)}{(n^2+1)-n}$

$$a_n=\frac{1}{1-\dfrac{n}{n^2+1}}$$

Se sabe que $(n-1)^2\geq 0 \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, de donde podemos reacomodar de la forma siguiente:

$$n^2+1\geq 2n \Leftrightarrow 2n\leq n^2+1<\infty$$

Transformando : $2\leq \dfrac{n^2+1}{n}<\infty \Leftrightarrow 0<\dfrac{n}{n^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}\leq -\frac{n}{n^2+1}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq 1-\frac{n}{n^2+1}<1$$

$$1<\frac{1}{1-\dfrac{n}{n^2+1}}\leq 2 \Leftrightarrow 1<a_n\leq 2$$

Como los extremos encontrados para a_n son reales, se afirmara que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es acotada

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 25 Sabiendo que: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lfloor k}=e$, calcular: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2+k+6}{\lfloor k}\right)$

Resolución:

Sea la serie: $L=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4k^2+k+6}{\lfloor k}\right]$

Transformando: $L=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4(k+1)^2+(k+1)+6}{\lfloor k+1}\right]$

$$L=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4(k+1)^2}{\lfloor k+1}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k+1}{\lfloor k+1}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{6}{\lfloor k+1}\right]$$

Simplificando: $L=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4(k+1)}{\lfloor k}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\lfloor k}\right]}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{6}{\lfloor k+1}\right]$

$$L=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4k+5}{\lfloor k}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{6}{\lfloor k+1}\right]$$

$$L=4\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k}{\lfloor k}\right]+5\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\lfloor k}\right]+6\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\lfloor k+1}\right] \quad .....(1)$$

Tener en cuenta que: $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k}{\lfloor k}\right]=0+1+\frac{2}{\lfloor 2}+\frac{3}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 4}+....$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k}{\lfloor k}\right]=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+....=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k}{\lfloor k+1}\right]=\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+....=e-1$$

Finalmente en (1): $L=4e+5e+6(e-1)=9e+6e-6$

$\therefore \quad L=15e-6$

PROBLEMA 26 Analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^n$$

Resolución:

Notamos que: $a_n=\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^n$

Luego: $\sqrt[n]{a_n}=\frac{3n+1}{4n-1}$

Según el teorema de Cauchy (Criterio de la raíz) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)=\frac{3}{4}<1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^n$ es convergente

PROBLEMA 27 Calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{10}{17}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{3n+1}{5n+2}}\right\}_{n\geq 1}$$

Resolución: Sea K el límite de la sucesión, luego se plantea:

$$K=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{10}{17}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{3n+1}{5n+2}}\right]$$

Observa que:

$$a_1=\frac{4}{7};\quad a_2=\frac{7}{12};\quad a_3=\frac{10}{17};\quad \ldots\ldots\qquad a_n=\frac{3n+1}{5n+2}$$

Luego dando uso al teorema de la media geométrica tenemos:

$$K=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)$$

$$\therefore\quad K=\frac{3}{5}$$

PROBLEMA 28 Determinar si las siguientes sucesiones:

I) $\left\{\frac{n+3}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$ II) $\left\{\frac{5n^3+1}{2n^3}\right\}_{n\geq 1}$ III) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

Son convergentes o divergentes.

Resolución: Para determinar la convergencia o divergencia de una sucesión bastará calcular el límite de dicha sucesión:

I) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$

como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$ ¡esta determinado!

$\therefore\ \left\{\frac{n+3}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente

II) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+1}{2n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{1}{n^3}}{2}\right)=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}$

como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+1}{2n^3}\right)=\frac{5}{2}$ ¡esta determinado!

$\therefore\ \left\{\frac{5n^3+1}{2n^3}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente.

team CALAPENSHKO

$$\text{III) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\frac{1}{n}}{1}\right)=\frac{\infty+0}{1}=\infty$$

$$\text{note que: } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)=\infty \qquad \text{¡no esta determinado!}$$

$$\therefore \quad \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n\geq 1} \text{ es divergente.}$$

PROBLEMA 29 El problema establece calcular:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)$$

donde:

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

Resolución: Este límite lo obtendremos acotando, veamos:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Sumando:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq a_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Tomando límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)\leq\lim_{n\to\infty}(a_n)\leq\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

De donde:

$$1\leq\lim_{n\to\infty}(a_n)\leq 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(a_n)=1$$

PROBLEMA 30 La siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente, calcular su suma si:

$$a_n = \cos\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right).\text{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

Resolución: Por condición:

$$a_n = \cos\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right).\text{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

Recordemos la siguiente equivalencia trigonométrica:

$$\boxed{\text{sen A}.\cos B = \frac{1}{2}[\text{sen}(A+B)+\text{sen}(A-B)]}$$

Ahora en el problema tenemos:

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2n+1}{n^2+n}\right)+\text{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}-\frac{2n+1}{n^2+n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2n+2}{n^2+n}\right)+\text{sen}\left(\frac{-2n}{n^2+n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{n}\right)-\text{sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

De donde:

$$a_k = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{k}\right)-\text{sen}\left(\frac{2}{k+1}\right)\right]$$

Tomando sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{k}\right)-\text{sen}\left(\frac{2}{k+1}\right)\right]$$

Por propiedad telescópica se establece que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{1}\right)-\text{sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\text{sen}\,2-\text{sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right], \text{ ahora si : } n \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\text{sen}\,2-\text{sen}\,0] = \frac{1}{2}[\text{sen}\,2-0]$$

$$\therefore \quad \sum_{n\ 1}^{\infty} = \frac{\text{sen}2}{2}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dadas las sucesiones:

I. $\{n^2\}_{n\geq 1}$ II. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$

III. $\{(-n)^n\}_{n\geq 1}$

Marcar (V) o (F):

( ) Es creciente
( ) Es decreciente
( ) Es convergentes

A) VVV B) VFF C) VVF
D) VFV E) FVF

2. Marcar correcto (C) o incorrecto (I)

( ) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ converge a cero

( ) $\left\{\frac{\cos(n)}{n^2+4}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada

( ) $\{1-n\}_{n\geq 1}$ es monótona

A) CIC B) ICC C) CCC
D) IIC E) III

3. La siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}\right\}$$

converge a:

A) 1 B) 3 C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

4. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left\{\frac{2^n+3^n}{2^n+4^n}\right\}_{n\geq 1}$$

A) Converge a 1
B) Converge a 1/2
C) Converge a 3/4
D) Converge a 0
E) No converge

5. ¿A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$?, si:

$$a_n = \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

6. Marcar (V) ó (F):

( ) La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ con: $a_n = 1$; $a_2 = 1$; $a_{n+2} = 0{,}5(a_n + a_{n+1})$ es una sucesión constante.

( ) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, siempre que $|r| < 1$

( ) Si: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n . a_n = 0$

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFF

7. Sea: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = x^3 + 2x + 1$$

La sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

¿A qué valor converge la sucesión:

$\{F(a_n)\}$?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

8. Si el décimo término de la sucesión: $\{a_n\}$ es 1, donde:

$$a_n = \frac{k\,.\,n+10}{4n+10}$$

Luego se afirma que la sucesión converge a:

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 1
D) 2 E) 0

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

9. ¿Cuántos términos tiene la sucesión:

$\{13; 16; 21; 28; 37; \ldots; 796\}$

A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 31

10. Indicar la sucesión (sucesiones) que verifican:

$a_n < a_{n+1} \; ; \; \forall n \geq 1$

I. $\{2n+1\}$ II. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ III. $\left\{\frac{3n-1}{4n+1}\right\}$

A) Sólo I B) Sólo III C) I y II
D) I y III E) Todas

11. Dada la sucesión:

$$\left\{\frac{5}{5}; \frac{9}{10}; \frac{13}{5}; \frac{17}{20}; \ldots\right\}$$

A partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que 0,81.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

12. Respecto a la sucesión $\{a_n\}$ con:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2-n+1}$$

Obtener el valor de las proposiciones:
( ) $\{a_n\}$ es acotada
( ) $\{a_n\}$ es decreciente
( ) $\{a_n\}$ es convergente

A) VVV B) VFV C) FFF
D) VFF E) FVV

13. Sea la sucesión $\{a_n\}$ cuyo término enésimo esta dado por la fórmula de recurrencia:

$$a_1 = 2 \quad \wedge \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$$

Calcular:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

A) 4 B) 6 C) 20
D) –6 E) 8

14. Sea la sucesión:

$$\left\{\frac{6}{5}; \frac{11}{5}; \frac{16}{8}; \frac{21}{11}; \ldots\right\}$$

Marcar (V) o (F)
( ) La sucesión es creciente
( ) El término de lugar 81 es $\frac{203}{121}$
( ) La sucesión es acotada
( ) La sucesión es convergente

A) VVVV B) VFVF C) VFFV
D) FVFV E) FVVV

15. Proporcionar el valor de verdad:

I. La sucesión $\{a_n\}$ con $a_n = \frac{4n+5}{2n-1}$ converge a 2

II. La sucesión $\{b_n\}$ con $b_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ es monótona creciente.

III. La sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = \frac{n^2+2n+5}{n^2+2n+1}$ es acotada

A) VVF B) VFF C) FVV
D) FVF E) VFV

16. En la sucesión $\{a_n\}$, donde:

$$a_n = \frac{n}{n+3}$$

Hallar el menor entero positivo "n" si existe tal que:

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{140}$$

A) 14 B) 15 C) 16
D) 18 E) 19

17. Calcular la suma de la serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^k \cdot 2^{-3k}\right]$$

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{12}$
D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{72}$

team CALAPENSHKO

18. Analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\right]$$

A) Converge a 1/2
B) Converge a 3/4
C) Converge a 1/6
D) Converge a 1/12
E) No converge

19. La serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n+1}{2}\right].4^{-2n}$$

Converge a:

A) $\frac{1}{4^4(4^4+1)}$ B) $\frac{1}{4^4(4^4-1)}$ C) $\frac{4^{16}}{4^4-1}$
D) $\frac{4^{20}}{4^5-1}$ E) N.A.

20. Analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{a_n\}$$

Donde:

$$a_n=\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{3^{n-1}}$$

A) Converge a 0
B) Converge a 7/2
C) Converge a 1/4
D) Converge a 7/4
E) Converge a 5/2

21. Determinar el valor de:

$$\sum_{k=1}^{6}(a_n)$$

Donde:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+6}\,.\,(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{7}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{7}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{7}$

22. Calcular:

$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$

A) $\frac{1}{4\,.\,6^4}$ B) $\frac{1}{5\,.\,6^5}$ C) $\frac{1}{6^4}$
D) $\frac{1}{6^5}$ E) $\frac{1}{3\,.\,6^3}$

23. Calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n^2+2n+n^4}\,.\,\pi^{-2n}\right]$$

A) $\frac{1}{\pi-1}$ B) $\frac{1}{\pi^2+1}$ C) $\frac{1}{\pi+1}$
D) $\frac{1}{\pi^2-1}$ E) $\frac{1}{\pi}$

24. La serie:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+3)\right]^{-1}$$

Cuando "n" crece ilimitadamente converge a:

A) $\frac{11}{8}$ B) $\frac{11}{6}$ C) $\frac{11}{18}$
D) $\frac{13}{18}$ E) La serie es divergente

25. Sea:

$$\{a_n\}_{n\geq 1}\,/\,a_1>0\ \wedge\ a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+60}$$

Entonces, la sucesión converge a:

A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) 5
D) $\frac{9}{2}$ E) $3\sqrt{3}$

26. Calcular:

$$\sum_{k=1}^{20}\left[(-1)^k\,.\,k^2\right]$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

team GALAPENSHKO

27. Dado la sucesión: $\{x_n\}_{n\geq 1}$, definida por:

$$x_{n+1} = \sqrt{4x_n - x_n^2} \ ; \ x_1 \in \langle 0; 2\rangle$$

¿A qué valor converge?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{3}{2}$ E) No converge

28. ¿Qué valor asume "r", si la serie:

$$S = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots.$$

Converge a 4?

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{2}$ E) Hay 2 correctas

29. Calcular:

$$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100}(i+j)$$

A) 100 B) $100 . 10^4$

C) $100 . 10^3$

D) $100 . 10^2$ E) $100 . 10^5$

30. ¿A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$, donde:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \ ?$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) -2 E) -1

31. Calcular:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{(k+1)!}\right]$$

A) 3 B) 2 C) 1

D) 4 E) 5

32. El equivalente de:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\lfloor 1}+\frac{1}{4\lfloor 2}+\ldots.+\frac{1}{(n+1)\lfloor n-1}$$

es:

A) $1+\frac{1}{\lfloor n+1}$ B) $1-\frac{1}{\lfloor n+1}$ C) $1-\frac{n}{\lfloor n+1}$

D) $1+\frac{1}{\lfloor n}$ E) $1-\frac{1}{\lfloor n}$

33. Dada la serie:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)$$

Marcar (V) o (F):

I. Si: $S = a + \frac{b}{2^n} + \frac{nc}{2^{n+1}}$; entonces: $a+b+c=4$

II. La serie S converge a cero.

III. La serie puede expresarse así:

$$2^{11}.\sum_{k=12}^{n+11}(a_k) \ ; \text{ donde: } a_k = \frac{2k-23}{2^k}$$

A) VVF B) VFV C) FVF

D) FFV E) FFF

34. Con respecto a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$$

Se afirma:

A) Converge a 2 B) Converge a 1

C) Converge a 0

D) Converge a 1/2 E) Es divergente

35. Encuentre el intervalo de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^n . \frac{1}{n^4}$$

A) $\left\langle \infty; \frac{2}{5}\right\rangle$ B) $\left[\frac{2}{5}; \infty\right\rangle$ C) $\left[-\frac{2}{5}; \infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty; -\frac{2}{5}\right\rangle$ E) $\left[\frac{5}{2}; \infty\right\rangle$

team CALAPENSHKO

36. La sucesión de Fibonacci está dada por:

$$a_1 = a_2 = 1 \ \wedge \ a_{n+2} = a_{n+1};\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Hallar: a_9

A) 21 B) 34 C) 55
D) 89 E) 13

37. El matemático Karl Wiestras, estableció que: "Si una sucesión es monótona a partir de cierto número y acotada, ella tiene límite finito".
Analizar la sucesión:

$$\left\{\frac{n^3}{3^n}\right\};\ n \in \mathbb{Z}^+$$

A) Es convergente
B) Es divergente
C) Es acotada
D) Hay 2 correctas
E) Es monótona

38. Calcular:

$$E = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

A) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
B) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$
C) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
D) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$
E) $\dfrac{n(n+1)(n^2+1)}{4}$

39. Calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n^2+n}{\lfloor n}\right]$$

A) 12e B) 13e C) 14e
D) 9e E) 16e − 5

40. Sea: $a_0 = 0{,}5 \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}^+$; de modo que:

$$a_k = (2^k+1)^{-1} + (2^k+2)^{-1} + (2^k+3)^{-1} + \ldots + (2^k+2^k)^{-1}$$

Respecto a la serie:

$$S_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

Se afirma:

A) Converge a cero
B) Converge a uno
C) Converge a e
D) Es oscilante
E) Crece indefinidamente

41. Respecto a las siguientes series:

I. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{5^k + 8^k}$ II. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k - 4}{5k^4 + 2}$

III. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{e^{k^2}}$

A) I y II converge B) Todas convergen
C) I y III converge
D) Ninguna diverge E) Sólo I converge

42. Sabiendo que: $e = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots$

donde "e" es base de los logaritmos neperianos, calcular:

$$S = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{10}{4!} + \ldots$$

A) 2e B) e^2 C) 2e + 2
D) 2e − 2 E) e + 1

43. Determinar el conjunto sobre el que la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(x+1)^k$$

converge.

A) $\langle -2; 0\rangle$ B) $\langle -2; 0]$ C) $[-2; 0]$
D) $[-1; 0]$ E) $\langle -1; 0]$

team CALAPENSHKO

44. Respecto a la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{4}{3^{2k+1}}$$

podemos afirmar que:

A) Converge a 1
B) Converge a 1/2
C) Converge a 2
D) Converge a 6/5
E) Diverge

45. Dada la sucesión: $\{a_n\} = \left\{\frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}\right\}$

Entonces, Lim $\{a_n\}$ es:

A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

46. Dada la sucesión: $a_n = 2 + \frac{3}{\sqrt{n}}$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. a_n es creciente
II. a_n es acotada
III. $|a_n - 2| < 4 \Rightarrow n > \frac{9}{16}$

A) FVV B) FFV C) VFV
D) VVV E) FFF

47. Sean las sucesiones b_n.

$$b_{n+1} = b_n + 4 \text{ con } b_1 = 5$$

$$c_{n+1} = -3c_n \text{ con } c_1 = 5;\ n \in \mathbb{N}$$

El valor $\frac{b_n}{c_n}$, para "n" suficiente grande se aproxima a:

A) 1 B) 0 C) $\frac{4}{3}$
D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

48. Denotamos por:

$$a_n = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{cuando "n" es impar} \\ 1 + \frac{1}{2n} & \text{cuando "n" es par} \end{cases}$$

Entonces, podemos afirmar que:

A) La sucesión (a_n) converge a cero
B) La sucesión (a_n) converge a uno
C) El conjunto (a_n) no satisface la definición de sucesión.
D) La sucesión (a_n) contienen dos subsucesiones convergentes.
E) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

49. Considere la sucesión dada por:

$$a_1 = 2;\ a_2 = \frac{9}{4};\ a_3 = 1 \text{ y}$$

$$a_n = \frac{4n-3}{2n+1};\ n \geq 4$$

¿Qué elementos de la sucesión, satisfacen:

$$|a_n - 2| < \frac{1}{2}?$$

A) Todos los elementos de la sucesión.
B) Solamente a_1 y a_2.
C) Todos los elementos de la sucesión excepto a_3 y a_4.
D) Todos los elementos de la sucesión a partir de a_4.
E) Todos los elementos de la sucesión a partir de a_5.

50. Considere la relación:

$$\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + ak) = n(n+1)(bn+5)$$

Calcular "ab"

A) 6 B) 4 C) 8
D) 16 E) 12

team CALAPENSHKO

Capítulo 22

Progresiones

CAPACIDADES:

- Reconocer progresiones aritméticas y geométricas.
- Aplicar propiedades sobre progresiones.
- Interpolar medios aritméticos y geométricos.

$$t_1 + t_1q + t_1q^2 + \ldots + t_1q^{n-1} = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

REY SHERAM Y LAHUR SESSA

LA PAGA IMPOSIBLE, una antiquísima leyenda cuenta que Sheram, príncipe de la India, quedó tan maravillado cuando conoció el juego del ajedrez, que quiso recompensar generosamente a Sessa, el inventor de aquel entretenimiento. Le dijo: "Pideme lo que quieras", se cuenta que Sessa pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla de su tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente hasta la casilla 64.

El príncipe creyó que podría pagar y de ese modo cumplir fácilmente su promesa, quedando sorprendido cuando le dijeron que no había bastante trigo en todo su reino para satisfacer la demanda del matemático.

En efecto: el número de granos de trigo necesarios para satisfacer a Sessa es igual a la suma de los términos de una progresión geométrica a razón 2, primer término 1 y número de términos 64 cuya suma es igual a $2^{64} - 1$, es decir: 18 445 815 160 671 830 015, para obtener tal cantidad había que sembrar la tierra entera 65 veces.

team CALAPENSHKO

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la que cada término excepto el primero es igual al término anterior aumentado en un valor constante llamada razón de la progresión.

REPRESENTACIÓN DE UNA P.A.

$$+ a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_n$$

$$+ a_1 . a_1 + r . a_1 + 2r . \ldots . a_1 + (n-1)r$$

Donde:

$+$	=	inicio de la P.A.
$.$	=	separación de término
a_1	=	primer término
a_n	=	término n-ésimo
n	=	número de términos
r	=	razón de la P.A.

CLASES DE P.A.

1) Si $r > 0$, la P.A. es creciente

2) Si $r < 0$, la P.A. es decreciente

OBSERVACIÓN

Si $r = 0$ se dice que la progresión aritmética es trivial.

PROPIEDADES DE UNA P.A.

Dada la siguiente progresión aritmética:

$$+ a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_{n-1} . a_n$$

Se cumple:

1) Razón (r)

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

team CALAPENSHKO

2) Término n-ésimo (a_n)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

3) Número de términos (n)

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

4) Términos equidistantes de los extremos $(a_x \wedge a_y)$

$$+\ a_1 \ldots . a_x \ldots . a_y \ldots . a_n$$

"m" términos "m" términos

$$a_x + a_y = a_1 + a_n$$

5) Término central (a_c) : Siendo "n" impar la P.A. admite término central.

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

6) Suma de los "n" primeros términos de una P.A. (S_n)

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) . n$$

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] . n$$

MEDIOS ARITMÉTICOS

Son los términos de una P.A. comprendidos entre sus extremos, veamos un ejemplo:

$$+\ 3\ .\ \underbrace{7\ .\ 11\ .\ 15\ .\ 19\ .\ 23\ .\ 27}_{\text{Medios aritméticos}}\ .\ 31$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Consiste en formar una P.A, para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión aritmética:

$$+\ a\ .\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" Medios aritméticos}}\ .\ b$$

team CALAPENSHKO

Por fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$ donde N° de términos $n = m + 2$

Reemplazando: $b = a + (m + 1)r$

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

PROGRESIÓN ARMÓNICA (P.H)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión donde ninguno de sus términos es cero y los recíprocos de los mismos forman una progresión aritmética.

Si la sucesión:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \ldots\ldots ; a_n$$

Es una progresión armónica, se verifica lo siguiente:

$$\frac{1}{a_1} . \frac{1}{a_2} . \frac{1}{a_3} . \ldots\ldots . \frac{1}{a_n}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la cual el primer término es diferente de cero y se caracteriza porque cualquier término, excepto el primero, es igual al término anterior multiplicado por un valor constante llamada razón de la progresión.

REPRESENTACIÓN DE UNA P.G.

$$\leftrightarrow t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_n$$

$$\leftrightarrow t_1 : t_1 q : t_2 q^2 : \ldots\ldots : t_1 q^{n-1}$$

Donde:

$\leftrightarrow$ = inicio de la progresión

: = separación de término

t_1 = primer término

t_n = término n-ésimo

n = número de término

q = razón de la P.G.

team CALAPENSHKO

CLASES DE P.G.

1) Si $q > 1$, la P.G. es creciente
2) Si $0 < q < 1$, la P.G. es decreciente

} Para P.G de términos positivos

3) Si $q < 0$, la P.G. es oscilante

PROPIEDADES DE UNA P.G.

Dada la siguiente progresión geométrica

$$\leftrightarrow t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_{n-1} : t_n$$

Se cumple:

1) Razón (q)

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \ldots\ldots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

2) Término n-ésimo (t_n)

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

3) Número de términos (n): Teniendo en cuenta que t_n, t_1 y q son positivos.

$$n = \frac{\log(t_n) - \log(t_1)}{\log(q)} + 1$$

4) Términos equidistantes de los extremos (t_x y t_y)

$$\leftrightarrow t_n : \ldots : t_x : \ldots : t_y : \ldots : t_n$$

"m" términos "m" términos

$$t_x \cdot t_y = t_1 \cdot t_n$$

5) Término central (t_c) : Siendo "n" impar, la P.G. admite término central.

$$t_c = \sqrt{t_1 \cdot t_n}$$

team CALAPENSHKO

6) Suma de los "n" primeros términos de una P.G. (S_n)

$$S_n = t_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \quad ; q \neq 1$$

7) Suma límite (S_{lim}) : Para P.G. de infinitos términos, es decir en caso de que $n \to \infty$

$$S_{lim} = \frac{t_1}{1 - q} \quad ; -1 < q < 1$$

8) Producto de los "n" primeros términos de una P.G. (P_n)

$$P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

MEDIOS GEOMÉTRICOS

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos, veamos un ejemplo:

$$\leftrightarrow 1 : \underbrace{2 : 4 : 8 : 16 : 32}_{\text{Medios geométricos}} : 64$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Consiste en formar una P.G, para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión geométrica:

$$\leftrightarrow a : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" Medios geométricos}} : b$$

Por fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1}$

Reemplazando: $b = a \cdot q^{m+1}$

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Determinar x en cada caso:

A) $\div 2.x.10$

B) $\div 7.2x+3.13$

C) $\div -3.4.x+2$

D) $\div x+7.2.5$

E) $\div x.2x.x^2$

2. Determina los términos que se indican en cada progresión aritmética:

A) $\div 2.4.6.$ ..... $¿T_{24}?$

B) $\div -2.1.4.$ ..... $¿T_{17}?$

C) $\div 2.6.10.$ ..... $¿T_{40}?$

D) $\div -1.5.11.$ ..... $¿T_{29}?$

E) $\div 3.8.13.$ ..... $¿T_{32}?$

3. Efectuar en cada caso:

A) $1+4+7+10+$ ..... 30 términos

B) $-1+3+7+11+$ ..... 40 términos

C) $-7-2+3+8+$ ..... 35 términos

D) $-7+1+9+17+$ ..... 45 términos

E) $-3+1+5+9+$ ..... 50 términos

4. Determine x en cada caso:

A) $\div\div x:3:9$

B) $\div\div 4:2:x$

C) $\div\div 5:25:x-1$

D) $\div\div 3:x+2:1$

E) $\div\div 12:\sqrt{x-2}:16$

5. Determina los términos que se indican en cada progresión geométrica:

A) $\div\div$ 5:10:20: ..... $¿T_{14}?$

B) $\div\div$ 6:12:24: ..... $¿T_{10}?$

C) $\div\div$ x:8:16: ..... $¿T_8?$

D) $\div\div \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:$ ..... $¿T_{11}?$

E) $\div\div (x+1):3:12$ ..... $¿T_6?$

6. Efectuar:

A) $64+32+16+8+....$

B) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$

C) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+....$

D) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^7}+....$

E) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{7^7}+.....$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Determine el valor de "x" en la siguiente progresión aritmética:

$$\div\ 5\ .\ 2x-1\ .\ 10\ .\ ...$$

Resolución: Por la razón tenemos: $(2x-1)-5=10-(2x-1)$

Efectuando tenemos:

$$2x-1-5=10-2x+1$$

$$2x-6=11-2x$$

$$4x=17$$

$$\therefore\quad x=\frac{17}{4}$$

PROBLEMA 2 Determine la razón de la siguiente progresión geométrica creciente:

$$\div\div\ 2:x+1:18:...$$

Resolución: Por ser una progresión geométrica creciente, fácilmente podemos notar que $(x+1)$ es positivo; ahora por la propiedad de la razón:

$$q=\frac{x+1}{2}=\frac{18}{x+1}$$

$$(x+1)^2=36$$

$$x+1=6$$

$$x=5$$

Finalmente tenemos: $q=\frac{6}{2}$

$$\therefore\ q=3$$

PROBLEMA 3 ¿Para qué valor de "x", los números: $\frac{2}{3};\ x+2;\ \frac{5}{2}$, en ese orden forman una progresión armónica?

Resolución: De acuerdo con la definición, los recíprocos de los números mostrados formarán una progresión aritmética.

$$\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{x+2}\ ;\ \frac{2}{5}$$

Por término central: $\frac{1}{x+2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}{2}$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{19}{20} \quad \Leftrightarrow \quad x+2=\frac{20}{19}$$

$$x=\frac{20}{19}-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{20-38}{19}$$

$$\therefore \quad x=-\frac{18}{19}$$

PROBLEMA 4 Determine el vigésimo primer término de la siguiente progresión aritmética:

$$+\ -2\ .\ 5\ .\ 12\ .\ ...$$

Resolución: Por término n – ésimo: $a_n = a_1 + (n-1)r$ ..... (1)

En nuestro caso tenemos: $a_1 = -2;\ n = 21;\ r = 7$ .....(2)

Reemplazando (2) en (1): $a_{21} = -2 + (20)(7)$

$$a_{21} = -2 + 140$$

$$\therefore \quad a_{21} = 138$$

PROBLEMA 5 De una progresión aritmética se conoce:

$$a_3 + a_6 = 57 \quad ..... (1)$$

$$a_5 + a_{10} = 99 \quad ..... (2)$$

Determinar la razón.

Resolución: Teniendo en cuenta a la fórmula del término de lugar n (a_n)

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

En (1): $a_1 + 2r + a_1 + 5r = 57$

$$2a_1 + 7r = 57 \quad ..... (1)$$

En (2): $a_1 + 4r + a_1 + 9r = 99$

$$2a_1 + 13r = 99 \quad ..... (2)$$

Restando (2) – (1): $6r = 42$

$$\therefore \quad r = 7$$

PROBLEMA 6 Determine la razón de una progresión aritmética si la suma de sus "n" primeros términos es $S_n = n(5n-3)$.

team CALAPENSHKO

Resolución: Teniendo en cuenta a la fórmula dada para la suma de los "n" primeros términos tenemos:

$$S_n = n(5n-3)$$

Para n = 1: $a_1 = 2$

Para n = 2: $a_1 + a_2 = 14$

$$2 + a_2 = 14 \Rightarrow a_2 = 12$$

Si "r" es la razón, según la definición se verifica:

$$r = a_2 - a_1 = 12 - 2$$

$$\therefore\ r = 10$$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 7 Dada la siguiente progresión aritmética:

$$+5\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ 47\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ 159$$

Se sabe que el número de términos que hay entre 47 y 159 es el triple del número de términos que hay entre 5 y 47. Determine la razón de esta progresión.

Resolución: Según el enunciado tenemos:

$$+5\ ;\ \underbrace{\ldots\ldots}_{x\ \text{términos}}\ ;\ 47\ ;\ \underbrace{\ldots\ldots}_{3x\ \text{términos}}\ ;\ 159$$

Observar que en la P.A. la razón entre 5 y 47 es la misma que entre 47 y 159, luego:

$$r = \frac{42}{x+1} = \frac{112}{3x+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$x = 5$$

$$r = \frac{42}{5+1} = \frac{42}{6}$$

$$\therefore\ r = 7$$

PROBLEMA 8 Se han interpolado "m" medios aritméticos entre 3 y 57 y (m – 2) entre 5 y 19. Si la razón de la primera es el triple de la segunda. Determine el número de términos de cada progresión:

Resolución: Del enunciado las progresiones son:

$$+3\ ;\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(m)\ \text{términos}}\ ;\ 57$$

$$\text{Razón} = r = \frac{57-3}{m+1} = \frac{54}{m+1}$$

$$+5\ ;\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(m-2)\ \text{términos}}\ ;\ 19$$

$$\text{Razón} = r_1 = \frac{19-5}{m-1} = \frac{14}{m-1}$$

team CALAPENSHKO

Por condición: $r = 3r_1$

$$\frac{54}{m+1} = 3.\ \frac{14}{m-1}$$

$$\frac{9}{m+1} = \frac{7}{m-1}$$

$$9m - 9 = 7m + 7$$

$$2m = 16 \Rightarrow m = 8$$

$\therefore$ La primera P.A. tien e 10 términos
La segunda P.A. tiene 8 términos

PROBLEMA 9 De una progresión geométrica de "n" términos se conoce:

$$t_1 = \frac{1}{2},\ t_3 = 1 \text{ y } t_n = 256$$

¿Cuál es el valor de "n"?

Resolución: Teniendo en cuenta a la fórmula del término de lugar n (t_n)

$$\boxed{t_n = t_1\, q^{n-1}}$$

$$256 = \frac{1}{2} \cdot q^{n-1}$$

$$512 = q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se sabe que: $t_3 = t_1\, q^2$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot q^2$$

$$2 = q^2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

Reemplazando en (1):

$$512 = \sqrt{2}^{\,n-1}$$

$$2^9 = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$9 = \frac{n-1}{2}$$

$$18 = n - 1 \qquad \therefore n = 19$$

PROBLEMA 10 La suma de 6 términos de una progresión geométrica es igual a 9 veces la suma de los 3 primeros términos. Determine la razón.

Resolución: Por condición del problema:

$$S_6 = 9 \cdot S_3$$

$$t_1 \cdot \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1}\right) = 9 \cdot t_1 \cdot \left(\frac{q^3 - 1}{q - 1}\right)$$

$$q^6 - 1 = 9 \cdot (q^3 - 1)$$
$$(q^3 + 1)(q^3 - 1) = 9 \cdot (q^3 - 1)$$
$$q^3 + 1 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = 8$$
$$\therefore \ q = 2$$

PROBLEMA 11 Calcular:

$$k = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots$$

Resolución:

La expresión dada es: $k = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$

Multiplicando por dos: $2k = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \ldots$

Restando "k" de "2k": $2k - k = 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}\right) + \left(\frac{7}{2^3} - \frac{5}{2^3}\right) + \ldots$

$$k = 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \ldots$$

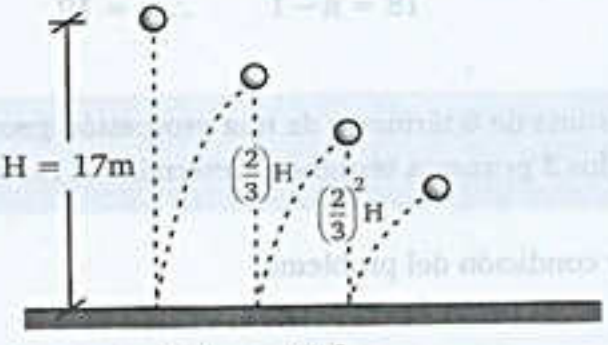
Simplificando tenemos: $k = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$

$$k = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \qquad \therefore \ k = 3$$

PROBLEMA 12 Se deja caer una pelota desde una altura de 17m; en cada rebote la pelota se eleva los $\frac{2}{3}$ de altura desde la cual cayó la última vez ¿Qué distancia recorrió la pelota hasta quedar teóricamente en reposo?

Resolución:

Observar que las distancias que recorre la pelota en cada una de sus caídas forman una P.G. ilimitada de primer término 17 y razón $\frac{2}{3}$, veamos un esquema:



$$S_c = H + \left(\frac{2}{3}\right)H + \left(\frac{2}{3}\right)^2 H + \ldots\ldots$$

team CALAPENSHKO

$$S_c = \frac{H}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3H}{1} = 3H = 3(17)$$

$$S_c = 51$$

Observar que en forma análoga la distancia que recorre la pelota en cada una de sus subidas forman una P.G. ilimitada de primer término $\frac{2}{3}H$ y razón $\frac{2}{3}$.

Donde H = 17m

$$S_s = \frac{2}{3}H + \left(\frac{2}{3}\right)^2 H + \left(\frac{2}{3}\right)^3 H + ...$$

$$S_s = \frac{\frac{2}{3}H}{1-\frac{2}{3}}$$

$$S_s = 2H$$

$$S_s = 2(17)$$

$$S_s = 34$$

Notar que la distancia total (S_{Tot}) que recorre la pelota es:

$$S_{Tot} = S_c + S_s = 51 + 34$$

$$\therefore\ S_{Tot} = 85\ m$$

PROBLEMA 13 En una progresión aritmética el primer término es 12, el número de términos 9 y la suma es 252. En otra progresión aritmética el primer término es 2 y la razón es 6. Dos términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales ¿Cuál es su valor?

Resolución: Analizando cada progresión:

1° P.A: $S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] . n$

$$252 = \left[\frac{2(12) + 8r}{2}\right] . 9$$

$$56 = 24 + 8r \Rightarrow r = 4$$

Para un término de lugar x ahora se tendrá:

$$a_x = 12 + (x-1)4 \quad ..... (1)$$

2° P.A: $b_n = b_1 + (n-1)r$

$$b_x = 2 + (x-1)6 \quad ..... (2)$$

Por condición: $12 + (x-1)4 = 2 + (x-1)6$

$$10 = 2(x-1)$$

$$5 = x - 1 \Rightarrow x = 6$$

team CALAPENSHKO

Finalmente en (1):

$$a_6 = 12 + (5)4 = 12 + 20$$

$$\therefore\ a_6 = 32$$

PROBLEMA 14 Reducir:

$$E = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{26}{3^6} + \frac{242}{3^{10}} + ...$$

Resolución: Transformando convenientemente los numeradores se tendrá:

$$E = 1 + \frac{3-1}{3^2} + \frac{3^3-1}{3^6} + \frac{3^5-1}{3^{10}} + ...$$

$$E = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^{10}} + ...$$

$$E = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + ...\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + ...\right)$$

$$E = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} - \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{81}}$$

$$E = 1 + \frac{3}{8} - \frac{9}{80} = \frac{11}{8} - \frac{9}{80}$$

$$\therefore\ E = \frac{101}{80}$$

PROBLEMA 15 Encontrar el mayor de cuatro números en progresión aritmética tales que si se les aumenta: 5; 6; 9 y 15 respectivamente los resultados están en progresión geométrica.

Resolución: De acuerdo con el enunciado:

$$+\ a-r\ .\ a\ .\ a+r\ .\ a+2r$$

$$+\!+\ a-r+5 : a+6 : a+r+9 : a+2r+15$$

Donde: $\dfrac{a+6}{a-r+5} = \dfrac{a+r+9}{a+6}$

$$(a+6)^2 = (a-r+5)(a+r+9)$$

$$(a+6)^2 = [(a+6)-(r+1)][(a+6)+(r+3)]$$

$$(a+6)^2 = (a+6)^2 + 2(a+6) - (r^2+4r+3)$$

$$r^2 + 4r + 3 = 2(a+6) \quad ..... (1)$$

En toda progresión geométrica el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos equidistantes, luego:

$$(a-r+5)(a+2r+15) = (a+6)(a+r+9)$$

team CALAPENSHKO

$$[(a+6)-(r+1)][(a+6)+(2r+9)]=(a+6)[(a+6)+(r+3)]$$
$$(a+6)^2+(r+8)(a+6)-(2r^2+11r+9)=(a+6)^2+(r+3)(a+6)$$
$$2r^2+11r+9=5(a+6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2) tenemos:

$$\frac{r^2+4r+3}{2r^2+11r+9}=\frac{2}{5}$$
$$5r^2+20r+15=4r^2+22r+18$$
$$r^2-2r-3=0$$
$$r \quad -3 \Rightarrow r=3$$
$$r \quad 1 \Rightarrow r=-1$$

Si r = 3 en (1) tenemos: a = 6, siendo los cuatro números iniciales: 3; 6; 9 y 12.
Si r=–1 en (1) tenemos: a=–6, siendo los cuatro números iniciales: –5; –6; –7 y –8

$\therefore$ Número mayor es 12

PROBLEMA 16 La suma de los "n" primeros términos de una P.A. viene dado por:

$$S_n = 4n^2 + n,$$

la razón es:

Resolución:

Sea la P.A.: $a_1 . a_2 . a_3 . \ldots\ldots . a_n$

Por teoría: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n \quad \ldots\ldots(1)$

Por condición: $S_n = 4n^2 + n$

Notar que: $S_1 = 4(1)^2 + 1 \rightarrow S_1 = 5$

De (1): $S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 5$

También: $S_2 = 4(2)^2 + 2 \rightarrow s_2 = 18$

De (1): $S_2 = a_1 + a_2$

Es decir: $18 = 5 + a_2 \rightarrow a_2 = 13$

Finalmente podemos observar que la razón "r" viene dada por:

$$r = a_2 - a_1 \rightarrow r = 13 - 5$$

$\therefore \quad r = 8$

PROBLEMA 17 El equivalente de:

$$5 + 9 + 13 + 17 + \ldots\ldots + (4n + 1) \text{ es:}$$

Resolución: Mediante una inspección minuciosa de la serie dada podemos notar que estamos frente a la suma de términos de una P.A. donde:

primer término = $a_1 = 5$

último término = $a_n = 4n + 1$

número de términos = n

Luego de acuerdo con lo expuesto en la teoría podemos utilizar la siguiente relación:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$$

Es decir:

$$S_n = \left[\frac{5 + (4n+1)}{2}\right]n = \left(\frac{4n+6}{2}\right)n$$

$$S_n = (2n+3)n$$

$$\therefore \quad S_n = 2n^2 + 3n$$

PROBLEMA 18 En una sucesión aritmética: 24, 10 y 105 son el último término, el número de términos y su suma respectivamente. ¿Cuál es el producto del primer término por la razón de dicha sucesión?

Resolución:

De acuerdo con el enunciado se pide: $a_1 . r$ .....(1)

Por dato: $a_{10} = 24; \ n = 10 \ \wedge \ S_{10} = 105$

Se sabe que: $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\rightarrow \quad a_{10} = a_1 + (10-1)r$

$\rightarrow \quad 24 = a_1 + 9r$ .....(2)

También: $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$

$$S_{10} = \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right).10$$

$$105 = (a_1 + 24).5$$

$$21 = a_1 + 24 \quad \rightarrow a_1 = -3 \ .....(3)$$

Reemplazando (3) en (2) conseguimos:

$$24 = -3 + 9r \quad \rightarrow r = 3$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$a_1 . r = (-3).(3)$$

$$\therefore \quad a_1 . r = -9$$

PROBLEMA 19 La siguiente P. G. consta de 7 términos:

$$\leftrightarrow 3: \ ..... : 192$$

Determinar su suma.

team CALAPENSHKO

Resolución: Podemos notar que: $t_1 = 3 \quad \wedge \quad t_7 = 192$ .....(1)

Sabemos que: $t_n = t_1 q^{n-1}$

Sea: $n = 7 \qquad t_7 = t_1 q^6$

Utilizando (1): $192 = 3q^6$

$64 = q^6 \quad \rightarrow \quad q = 2$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría, la suma de los "n" primeros términos de una P. G. viene dada por:

$$S_n = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Con lo cual tenemos:

$$S_n = 3\left(\frac{2^7 - 1}{2 - 1}\right) = 3(127)$$

$\therefore \quad S_7 = 381$

PROBLEMA 20 En un juego de azar una persona apuesta la 1^{era} vez un sol y se propone triplicar la apuesta anterior cada vez que el éxito no le favorezca. Cuando obtiene éxito gana una cantidad igual a su apuesta. En su novena apuesta obtiene por primera vez un éxito y luego se retira. Si ingresó con S/. 10000. ¿Con cuánto dinero se retira?

Resolución: De acuerdo con el enunciado la persona pierde los ocho primeros juegos, luego el dinero perdido viene expresado por:

$$P = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots\ldots + 3^7 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Notar que en el octavo juego apostó: 3^7 como perdió dicho juego, en el noveno apostará: $3 \cdot 3^7 = 3^8$

Por condición la persona gana el noveno juego, es decir gana:

$$3^8 = 6561 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Sea "D" el dinero con lo cual se retira la persona, luego se cumple:

$$D = \underbrace{10000}_{\text{capital}} + \underbrace{6561}_{(2)} - \underbrace{P}_{(1)} = 16561 - \frac{3^8 - 1}{3 - 1}$$

$D = 16561 - 3280$

$\therefore \quad D = S/.\ 13281$

PROBLEMA 21 Determina el término de lugar 57 en la siguiente progresión aritmética:

$$+ (x - 1) \cdot 3x \cdot 31 \cdot \ldots\ldots$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Por propiedad de la razón:

$$r = \underline{3x-(x-1)} = \underline{31-3x}$$

$$2x+1 = 31-3x$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Ahora podemos notar que:

$$r = 31-3(6) = 31-18$$

$$r = 13$$

Por el término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Finalmente calculamos a_{57}:

$$a_{57} = (x-1) + 56(13)$$

$$a_{57} = 5 + 728$$

$$\therefore\ a_{57} = 733$$

PROBLEMA 22 Determina la razón de aquella progresión aritmética cuya suma de sus "n" primeros términos viene dada por $S_n = 2n^2 + 3n$.

Resolución: Se sabe que: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$$2n^2 + 3n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Haciendo n = 1: $2(1)^2 + 3(1) = a_1$

$$5 = a_1$$

Haciendo n = 2: $2(2)^2 + 3(2) = a_1 + a_2$

$$8 + 6 = 5 + a_2$$

$$9 = a_2$$

Por propiedad: $r = a_2 - a_1 = 9-5$

$$\therefore\ r = 4$$

PROBLEMA 23 De una progresión aritmética se sabe que:

$$S_n = 80;\ a_1 = 3,\ r = 2$$

Determine "n".

Resolución: Por propiedad: $S_n = \left[\dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] \cdot n$

team CALAPENSHKO

Reemplazando: $80 = \left[\frac{2(3)+(n-1)\cdot 2}{2}\right]\cdot n$

Simplificando: $80 = (n+2)\cdot n$

$0 = n^2 + 2n - 80$

Factorizando: $0 = (n-8)(n+10)$

De donde tenemos: $n = 8$ o $n = -10$

Como $n \in \mathbb{Z}^+$ $\therefore\ n = 8$

PROBLEMA 24 Determina el valor de m, de modo que los números 7; 2m – 1 y 15 formen en ese orden una progresión aritmética, para luego calcular la suma de los "5m + 4" primeros términos de la progresión:

$$+1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot .....$$

Resolución:

Por condición: $+7 \cdot 2m-1 \cdot 15$

Por la razón: $2m-1-7 = 15-(2m-1)$

$2m-8 = 16-2m$

$4m = 24$

$\rightarrow m = 6$

Finalmente se plantea:

$$+\underbrace{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot .....}_{34\ \text{términos}}$$

$$S_{34} = \left[\frac{2(1)+33(5)}{2}\right]34$$

$$S_{34} = [167]\cdot 17$$

$$\therefore\ S_{34} = 2839$$

PROBLEMA 25 En cierta progresión aritmética, el número de términos comprendidos entre 23 y 59 es el doble de los comprendidos entre 23 y 3. Determine el número de términos de dicha progresión.

Resolución:

De acuerdo con el enunciado podemos plantear:

$$+3 \cdot \underbrace{.....}_{x\ \text{términos}} \cdot 23 \cdot \underbrace{.....}_{2x\ \text{términos}} \cdot 59$$

Por término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

Despejando la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Para el primer tramo:

$$r = \frac{23-3}{x+2-1} = \frac{20}{x+1}$$

Para el segundo tramo:

$$r = \frac{59-23}{2x+2-1} = \frac{36}{2x+1}$$

Ahora se debe cumplir:

$$\frac{20}{x+1} = \frac{36}{2x+1}$$

Simplificando y efectuando:

$$5(2x+1) = 9(x+1)$$

$$10x + 5 = 9x + 9$$

$$x = 4$$

Finalmente si "m" es el número de términos de la progresión, tenemos:

$$m = 3x + 3 = 3(4) + 3$$

$$\therefore\ m = 15$$

PROBLEMA 26 Determine el valor que asume x para que los números (en ese orden) 3; 10 y (2x + 1) formen una progresión geométrica

Resolución: Por la propiedad de la razón "q" podemos plantear lo siguiente:

$$q = \frac{10}{3} = \frac{2x+1}{10}$$

$$100 = 6x + 3 \leftrightarrow 6x + 3 = 100$$

$$6x = 97$$

$$\therefore\ x = \frac{97}{6}$$

PROBLEMA 27 En cierta progresión geométrica se cumple que:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 = 1;\ T_3 = 2T_2$$

Calcula T_1

team CALAPENSHKO

Resolución: La progresión es:

$$\leftrightarrow T_1 : T_2 : T_3$$

Con la razón q:

$$\leftrightarrow T_1 : T_1 q : T_1 q^2$$

Por condición:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 = 1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$T_1 \cdot T_1 q \cdot T_1 q^2 = 1$$

$$(T_1 q)^3 = 1 \qquad \rightarrow \qquad T_1 q = 1$$

Como:

$$T_2 = T_1 q : T_2 = 1$$

Asimismo tenemos:

$$T_3 = 2T_2 \qquad \rightarrow \qquad T_3 = 2$$

Finalmente en (1):

$$T_1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \qquad 2T_1 = 1$$

$$\therefore \ T_1 = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 28 Determina la razón de interpolación de cuatro medios geométricos entre 9 y 2187.

Resolución: Según el enunciado podemos plantear:

$$\leftrightarrow \ 9 : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{4 términos}} : 2187$$

Por término general:

$$T_n = T_1 q^{n-1} \leftrightarrow 2187 = 9.q^5$$

$$243 = q^5 \leftrightarrow \sqrt[5]{243} = q$$

$$\therefore \ q = 3$$

PROBLEMA 29 La suma de los primeros términos de una progresión geométrica es igual a 33 veces la suma de los 5 primeros términos. Determina la razón de la progresión.

Resolución: Por condición tenemos:

$$S_{10} = 33S_5$$

team CALAPENSHKO

Por la fórmula de la suma:

$$T_1\left(\frac{q^{10}-1}{q-1}\right) = 33T_1\left(\frac{q^5-1}{q-1}\right)$$

Simplificando tenemos:

$$q^{10}-1 = 33(q^5-1)$$

$$(q^5+1)(q^5-1) = 33(q^5-1)$$

$$q^5+1 = 33 \quad \leftrightarrow \quad q^5 = 32$$

$$\therefore\ q = 2$$

PROBLEMA 30 Si la sucesión {7, – 21, 63, ...} es una progresión geométrica determine su razón y su relación funcional correspondiente.

Resolución: Recordemos que si $q \neq 0$, el rango de la función:

$$\{(x;y) \mid y = f(x) = a_0 q^x;\ x = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Es una progresión geométrica de razón q.

En nuestro caso notamos que:

$$f(0) = 7;\ f(1) = -21;\ f(2) = 63$$

El primer término es:

$$a_0 = f(0) = 7$$

La razón q es:

$$q = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{-21}{7}$$

$$q = -3$$

Finalmente la relación funcional es:

$$\therefore\ \{(x;y) \mid y = f(x) = 7\cdot(-3)^x;\ x = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la P.A:

$$+(y-7), 5, (y+3)$$

Calcular "y"

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 4

2. En la P.A:

$$+ -9, -3, \ldots\ldots\ldots$$
$$+ 5, 10, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dos términos correspondientes tienen el mismo valor. ¿Cuál es el lugar que ocupan?

A) 13avo B) 15avo C) 30avo
D) 42avo E) 20avo

3. Determinar el décimo quinto término de una P.A. si la suma de "n" términos está determinada por:

$$S_n = n(n+8)$$

A) 33 B) 35 C) 37
D) 39 E) 30

4. Si se interpolan 5 medios geométricos entre : 8 y 5832 el quinto término de la progresión total es:

A) 1944 B) 648 C) 729
D) 2916 E) 1544

5. Calcular:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

A) 1 B) 2 C) 3/2
D) 5/2 E) 7/2

6. Calcular:

$$E = 4 + 2 + 1 + 1/2 + \ldots\ldots\ldots$$

A) 8 B) 16 C) 32
D) 40 E) 13

7. Calcular la suma de los infinitos términos dados:

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots\ldots$$

A) 1/8 B) 1/16 C) 3/32
D) 1/32 E) 3/16

8. El quinto término de una P.A. es igual a 19 y el décimo es 39. ¿Cuántos términos hay que tomar para que su suma sea 465?

A) 12 B) 15 C) 19
D) 32 E) 22

9. Dada la progresión:

$$: a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots . a_{n-3}$$

Calcular el cociente que resulta de dividir la sumatoria de todos los términos entre el término medio.

A) $\frac{n-3}{2}$ B) $n-6$ C) $\frac{n+9}{2}$
D) $n-3$ E) $\frac{3}{2}(n-3)$

10. Hallar el número de medios aritméticos que es necesario interpolar entre 1 y 19 para que el segundo medio esté con el último en la relación 1/6.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

team CALAPENSHKO

11. La suma de 3 números positivos en P.A. es : 18 si a estos números se les suman 2, 4 y 11 respectivamente los nuevos números forman una P.G. ¿Cuál es el mayor de los números primitivos?

A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) 5

12. Panchito vende su caballo con la condición de que por el primer clavo de la herradura le dan un sol por el segundo clavo dos soles por el tercero cuatro soles ... etc, si cada herradura tiene cinco clavos ¿Cuánto vale el caballo de Panchito?

A) S/.1 048 575
B) S/.1 046 576
C) S/.1 032 725
D) S/.1 032 346
E) S/.1 042 345

13. Hallar la razón de un P.A. cuyo primer término sea la unidad y tal que los términos de lugares: 2, 10 y 34 formen una P.G.

A) 2/5 B) 1/3 C) 3/4
D) 5/7 E) 2/3

14. La diferencia del tercer término menos el sexto de una P.G. es : 26 y el cociente es 27. Calcular el primer término.

A) 245 B) 234 C) 243
D) 1/9 E) 5/9

15. Determinar el término central de una progresión aritmética de 7 términos, sabiendo que la suma de los términos de lugar impar es 77 y los de lugar par 56.

A) 21 B) 15 C) 25
D) 19 E) 18

16. ¿En qué tipo de triángulo sus lados forman una P.A. y P.G. si se sabe que el producto de sus lados es 27?

A) Isósceles
B) Equilátero
C) Escaleno
D) Mistilíneo
E) No existe dicho triángulo

17. Una pelota de hule cae desde una altura de 128cm y rebota los 15/16 de la altura base el cual cae. Si los rebotes continúan en esta forma. ¿Cuál será la distancia recorrida hasta quedar en reposo?

A) 4226 cm B) 4182 cm C) 3978 cm
D) 3968 cm E) N.A.

18. Se deja caer una pelota desde una altura de 990 m en cada rebote la pelota se eleva 1/3 de la altura de la cuál cayó la última vez ¿Qué distancia recorre la pelota hasta quedar en reposo?

A) 120 m B) 180 m C) 90 m
D) 150 m E) 150 m

19. En la P.A:

$+10, \ldots\ldots 76 \ldots\ldots 100$

el número de términos comprendidos entre 10 y 76 es el triple de los términos entre 76 y 100. Calcular la suma de los términos.

A) 1031 B) 1412 C) 1705
D) 1836 E) 1505

20. Dividir 40 en cuatro partes que estén en P.A. de modo que el producto de los términos extremos sea al producto de los medios como 2 es a 3. Indicar el producto del segundo y cuarto término.

A) 48 B) 60 C) 85
D) 100 E) 130

team CALAPENSHKO

20. Si: S_1 y S_2 son dos sumas finitas definidas por:

$S_1 = 10 + 12 + 14 + 16 + ... + (2n + 8)$

$S_2 = 1 + 4 + 7 + 10 + ... + (3n - 2)$

Además: S_1 y S_2 tienen el mismo valor e igual número de términos. Entonces, el número de términos es:

A) 20 B) 20 C) 24
D) 30 E) 42

22. Tres números reales distintos de cero forman una P.A. y los cuadrados se estos números tomados en la misma sucesión conforman una progresión geométrica. Hallar la razón de esta última progresión.

A) $3+\sqrt{2}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $4+\sqrt{3}$
D) $5+\sqrt{3}$ E) $5-\sqrt{3}$

23. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153m uno del otro se mueven al encuentro mutuo, el primero recorre 10m/s y el segundo recorrió 3m el primer segundo; en cada segundo siguiente recorre 5m más que el segundo anterior ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran?

A) 2s B) 4s C) 6s
D) 10s E) 3s

24. Calcular el número de términos de una progresión geométrica de razón : 2 siendo 189 la suma de ellos y la suma de sus cuadrados 12285.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

25. A lo largo de un camino había un número impar de piedras a 10m una de otra. Se quiso juntar éstas en el lugar donde se encontraba la piedra central. El hombre encargado podía llevar una sola piedra empezó por uno de los extremos y las trasladaba sucesivamente, al recoger todas las piedras el hombre caminó 3 Km. ¿Cuántas piedras había en el camino?

A) 17 B) 41 C) 29
D) 13 E) 25

26. En la PA:

$\div\div a : b : c$

Calcular:

$$E = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

A) $a + b + c$ B) $a^2 + b^2 + c^2$
C) $a^3 + b^3 + c^3$
D) $a^4 + b^4 + c^4$ E) $a - b + c$

27. Si se tiene: $:: a : b : c : d$

Calcular:

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$$

A) abcd B) $(a-d)^2$ C) $(a-c)^2$
D) 0 E) bc

28. En una progresión aritmética, el término de lugar A es B y el término de lugar B es A. Calcular el valor de (A + B), sabiendo que el segundo término de la progresión es el doble de su sexto término.

A) 11
B) 10
C) 2
D) 3
E) No se puede determinar

team CALAPENSHKO

29. Calcular el límite de la suma:

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \ldots$$

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{7}{2}$
D) 6 E) 4

30. De una progresión aritmética, se sabe que:

$$S_n - T_n = (n+3)(n-1)$$

Donde:

S_n : Suma de los "n" primeros términos

T_n : Término general

Si : "n" es impar, indicar el término central.

A) n + 1 B) n + 2 C) n + 3
D) n + 4 E) n + 5

31. Si: $a^2; b^2; c^2$; están en progresión armónica, entonces, las cantidades mostradas (en ese orden)

$$\frac{2a^2 - b^2}{2}; \frac{b^2}{2}; \frac{2c^2 - b^2}{2}$$

A) Están en P.A
B) Están en P.G
C) Están en progresión armónica
D) Son iguales
E) No se puede afirmar nada

32. Hallar la razón de una sucesión geométrica decreciente cuyo primer término sea la unidad y tal que los términos de lugares 2°, 4° y 5° formen una sucesión armónica.

A) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-2)$ B) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$
C) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$
D) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

33. Una progresión geométrica de razón 2 es tal que admite 5n términos siendo la suma de los "n" primeros 8^{40} y la suma de los últimos "n" igual a 16^{40}. Calcular el número de términos.

A) 80 B) 75 C) 60
D) 50 E) 40

34. El número de la suma de un número infinito de términos de una P.G. es: $\frac{a}{1-r}$, donde "a" es el primer término, $-1 < r < 1$, es la razón. Calcular el límite de la suma de sus cuadrados.

A) $\frac{a^2}{1-r^2}$ B) $\frac{a}{1-r^2}$ C) $\frac{a^2}{1+r^2}$
D) $\frac{a^2}{1-r}$ E) $\frac{a}{1+r^4}$

35. La medida de los lados de un triángulo están en P.G. de razón "q", entonces el intervalo de oscilación de esta razón será:

A) $q > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
B) $-1 < q < \frac{1}{q}\ ;\ q \neq 0$
C) $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < q \ / \ q \neq 0$
D) $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < q < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
E) $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ q \neq 0$

36. Hallar la suma de "n" términos de la serie:

$$S = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 11 + 11 \cdot 14 + \ldots$$

A) $n^2(3n+1)$
B) $n(3n^2+6n+1)$
C) $n(n+1)(n+2)$
D) $n(3n+4)$
E) $n^2(3n-1)$

team CALAPENSHKO

37. Si: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p$; son las sumas de series geométricas infinitas cuyos primeros términos son; 1; 2; 3; .... ; p y cuyas razones son; $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{p+1}$ respectivamente. Determine el valor de:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_p$$

A) 1 B) p C) $\frac{p}{2}(p+1)$

D) $\frac{p}{2}(p+3)$ E) p^2+1

38. Determine la suma de "n" términos de la serie:

$$S = \frac{1}{(1+x)(1+yx)} + \frac{y}{(1+yx)(1+y^2x)} + \frac{y^2}{(1+y^2x)(1+y^3x)}$$

A) $\frac{1}{1-y}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^n}{1+y^nx}\right)$

B) $\frac{1}{1-y}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{y^n}{1+y^nx}\right)$

C) $\frac{1}{1+y}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{y^n}{1+y^nx}\right)$

D) $\frac{1}{1+y}\left(\frac{2}{x} - \frac{y^n}{1+yx}\right)$

E) $\frac{1}{1-y}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{y^{n+1}}{y^n+1}\right)$

39. Calcular:

$$K = S_1\left(\frac{x_2-x_3}{x_1}\right) + S_2\left(\frac{x_3-x_1}{x_2}\right) + S_3\left(\frac{x_1-x_2}{x_3}\right)$$

Si se representan las sumas de los x_1 primeros, x_2 primeros, x_3 primeros términos de una P.A. mediante S_1, S_2 y S_3 respectivamente.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

40. Se da una progresión geométrica de razón $r \neq 0$ y con el primer término distinto de cero. También se da una progresión aritmética con el primer término igual a cero. Se suman los términos correspondientes de estas dos progresiones, obteniendose una tercera progresión donde los tres primeros términos son 1, 1 y 2. Calcular la suma de los 10 primeros términos de esta nueva progresión.

A) 977 B) 978 C) 979
D) 980 E) 981

41. En una PG, el primer término es "a", la razón "q"; S4 la suma de las cuartas potencias de los "n" términos de la progresión. Señale el equivalente de:

$$\left\{\frac{S_4(q^4-1)}{a^2(q^{4n}-1)}\right\}$$

A) 1 B) Primer término
C) n
D) Segundo término E) Término central

42. El primer término de una sucesión geométrica es igual a x - 2, el tercer término es igual a x + 6, y la media aritmética de los términos primero y tercero es al segundo término de la sucesión como 5 es a 3. Hallar el sexto término de la sucesión y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 6 B) 9 C) 18
D) 24 E) 23

43. Determinar una progresión aritmética y una progresión geométrica, si se sabe que los primeros términos son iguales a 2, tienen el mismo tercer término, y el onceavo término de la progresión aritmética es igual al quinto término de la progresión geométrica. Dar la suma de las razones de ambas progresiones.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 6

44. Dadas las relaciones:

$$\div \log_a x \,.\, \log_b y \,.\, \log_c z$$

$$\div\!\div x : y : z$$

Calcular el valor que debe tomar el logaritmo de "Z" en base "x".

A) $\log_a c$ B) $\dfrac{\log\left(\frac{a}{b}\right)}{\log\left(\frac{b}{c}\right)}$

C) $\dfrac{\log_a\left(\frac{a}{b}\right)}{\log_c\left(\frac{c}{b}\right)}$

D) $\dfrac{\log_a b}{1-\log_a}$ E) $\dfrac{1-\log_a b}{\log_c b-1}$

45. Dada la progresión aritmética creciente:

$$\div a_1 .\ a_2 .\ a_3 \ldots\ a_n$$

Sabiendo, que la suma de sus términos es "S" y que la suma de sus cuadrados es S_1^2, su razón "r", será:

A) $\sqrt{\dfrac{nS_1^2-S^2}{n^2(n^2-1)}}$ B) $\sqrt{\dfrac{12(nS_1^2-S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

C) $\sqrt{\dfrac{2(nS_1^2-S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

D) $\sqrt{\dfrac{24(nS_1^2-S^2)}{n^2(n^2-1)}}$ E) $\sqrt{\dfrac{6(nS_1^2-S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

46. Una progresión geométrica consta de un número par de términos, la suma de todos ellos es igual al triple de la suma de los términos impares, halle la razón de la P.G.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 16

47. Indicar las raíces de la ecuación:

$$x^3 + px + q = 0$$

si están en progresión aritmética ($p \neq 0$)

A) $-q;\ 0;\ q$
B) $-\sqrt{q};\ 0;\ \sqrt{q}$
C) $-\sqrt{-p};\ 0;\ \sqrt{-p}$
D) $\sqrt{p}-\sqrt{q};\ \sqrt{p};\ \sqrt{p}+\sqrt{q}$
E) $-\sqrt{p};\ 0;\ \sqrt{p}$

48. La suma de "n" términos de una P.A aumenta 2 490, si se consideran 15 términos más. Si el término de lugar (n + 10) es 180, hallar el término de lugar (n - 10)

A) 30 B) 20 C) 35
D) 40 E) 10

49. El producto de los términos de lugar impar de una P.G. de número de términos impares positivos es : 65536 y el producto; de los de lugar par es : 4096. Calcular el término central de la P.G. más el número de términos de dicha P.G.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

50. En un círculo de radio "R" se inscribe un triángulo equilátero; en este se inscribe un círculo y en este segundo círculo se inscribe un triángulo equilátero y así sucesivamente. Calcular la suma límite de las áreas de todas las figuras así formadas.

A) $\dfrac{R^2}{2}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)u^2$ B) $\dfrac{R^2}{2}\left(\pi+\sqrt{3}\right)u^2$

C) $\dfrac{R^2}{2}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)u^2$

D) $\dfrac{R^2}{3}\left(\pi+\sqrt{3}\right)u^2$ E) $\dfrac{R^2}{2}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)u^2$

team CALAPENSHKO

Capítulo 23

Matrices y Determinantes

CAPACIDADES:

- Reconocer matrices y determinantes.
- Efectuar operaciones con matrices.
- Calcular determinantes y determinar matrices inversas.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ARTHUR CARLEY

La experiencia indica que quienes leen por primera vez temas, artículos o libros referentes a matrices confunden el concepto de "matriz" con el de "determinante". Esta confusión es indeseable y debe evitarse desde el comienzo.

Las matrices y los determinantes corresponden a dos categorías matemáticas (y lógicas) distintas: el determinante es un número, mientras que la matriz es un conjunto ordenado de números.

Una matriz es simplemente una disposición ordenada se elementos numéricos, esto es, una tabla de doble entrada que organiza cierto información cuantitativa o cualitativa. Esto debe interpretarse en el sentido de que entre los elementos de una matriz dad, no debe efectuarse ninguna operación algebraica.

La introducción de las matrices al conocimiento matemático es un mérito que comparten tres ilustres pensadores europeos: William R. Hamilton, irlandés (1 805 – 1 865), James J. Silvester, inglés (1 814 – 1 897) y Arthur Carley, inglés (1 821 – 1 895). El término "matriz" fue utilizado por primera vez por Silvester, en 1 850 para designar un arreglo rectngular de números, a partir del cual se pueden formar determinantes.

Hoy en día las matrices se pueden aplicar a la física (Mecánica cuántica), ingeniería (teoría de las vibraciones), economía (modelos de insumo – producto y de cuentas nacionales), etc.

Es sin lugar a duda la literatura sobre matrices una de las más extensas de la matemática a pesar de su relativa juventud.

team CALAPENSHKO

MATRICES

DEFINICIÓN

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas (horizontales) y columnas (verticales). Para representar a una matriz se utilizan letras mayúsculas, veamos algunos ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

FILA ↔

COLUMNA ↕

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ORDEN DE UNA MATRIZ

Viene dada por la representación $m \times n$, donde "m" es el número de filas y "n" el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente tenemos:

- A es una matriz de orden 2×3
- B es una matriz de orden 3×3

FORMA GENERAL DE UNA MATRIZ DE "m" FILAS Y "n" COLUMNAS

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Donde a_{ij} es el elemento genérico ubicado en a fila i, columna j.

En forma abreviada se tendrá:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ m = \overline{1; m}$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ n = \overline{1; n}$$

team CALAPENSHKO

MATRICES ESPECIALES

1. **MATRIZ FILA:** Es aquella matriz que tiene una sola fila.

$$A = [1 \quad 5 \quad 7 \quad 10]$$

2. **MATRIZ COLUMNA:** Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. **MATRIZ RECTANGULAR:** Es aquella matriz donde el número de filas y el número de columna son diferentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. **MATRIZ CUADRADA:** Es aquella matriz donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

5. **MATRIZ NULA:** Es aquella matriz donde todos sus elementos son iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Dadas las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

Si estas son iguales, es decir A = B se verifican simultáneamente las condiciones:

I. A y B son de igual orden: $m \times n$

II. Los elementos correspondientes son iguales: $a_{ij} = b_{ij}$

OPERACIONES CON MATRICES

1. **ADICIÓN:** Dadas las matrices de igual orden

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

Se define:

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

team CALAPENSHKO

- Hallemos la matriz A + B, a partir de:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}(2+1) & (1+2) & (3+5)\\ (0-1) & (-1+4) & (2+3)\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 8\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

2. MULTIPLICACIÓN

2.1 Multiplicación de un escalar por una matriz:

Sean: $A=[a_{ij}]_{m\times n} \wedge k\in\mathbb{R}$

Se define: $$\boxed{k\,.\,A=k[a_{ij}]_{m\times n}=[k\,.\,a_{ij}]_{m\times n}}$$

- Multipliquemos por 2 a la matriz

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\,.\,A=2\,.\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 8\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

2.2 Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean: $$A=[a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad \ldots\quad a_{1n}] \wedge B=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\\ \\ b_{n1}\end{bmatrix}$$

Se define: $$\boxed{A\,.\,B=[a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}+\ldots+a_{1n}.b_{n1}]}$$

- Multipliquemos A por B, donde:

$$A=[2\quad 1\quad 3] \wedge B=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

$$A\,.\,B=[2\quad 1\quad 3]\,.\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

$$A\,.\,B=[(2)\,.\,(2)+(1)\,.\,(4)+(3)\,.\,(6)]=[4+4+18]$$

$$\therefore A\,.\,B=[26]$$

team CALAPENSHKO

2.3 Multiplicación de dos matrices:

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A . B si se verifica lo siguiente:

Nº de columnas A = Nº de filas de B

Luego: $A_{m\times\textcircled{p}} \cdot B_{\textcircled{p}\times n} = C_{m\times n}$ (p: iguales)

- Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix} \quad \wedge \quad B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 5\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

¿Existe A . B? Veamos:

A tiene orden $2\times 2 \rightarrow$ Nº de col $= 2$
B tiene orden $2\times 3 \rightarrow$ Nº de fil $= 2$

Como: Nº col de A = Nº fil de B se afirma que sí existe A . B cuyo orden es 2×3

$$A\,.\,B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -2 & 5\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica de forma similar que en el caso (2.2)

$$A.B=\begin{bmatrix}(2)(2)+(-1)(1) & (2)(-2)+(-1)(2) & (2)(5)+(-1)(-3)\\ (3)(2)+(1)(1) & (3)(-2)+(1)(2) & (3)(5)+(1)(-3)\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}4-1 & -4-2 & 10+3\\ 6+1 & -6+2 & 15-3\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}3 & -6 & 13\\ 7 & -4 & 12\end{bmatrix}$$

¿Existe B . A? Veamos:

Nº col de B = 3 y Nº fil de A = 2

Como: Nº col de B ≠ Nº fil de A, se podrá afirmar que B . A no existe.

En general: El producto matricial no es conmutativo.

Teoremas:

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además el escalar k

1) $k\,.\,(A+B)=k\,.\,A+k\,.\,B$
2) $A+B=B+A$
3) $A\,.\,B\,.\,C=(A\,.\,B)\,.\,C=A\,.\,(B\,.\,C)$
4) $A\,.\,(B+C)=A\,.\,B+A\,.\,C$
5) $A\,.\,B=0$ no implica $A=0 \vee B=0$
6) $A\,.\,B=A\,.\,C$ no implica $B=C$

Propiedades:

Sean las matrices A y B de modo que existen $A.B$ y $B.A$

1) Si: $A.B = B.A$ se dice que A y B son matrices conmutables.

2) Si: $A.B = -B.A$ se dice que A y B son matrices anticonmutables.

3. POTENCIACIÓN: Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define:

$$A^n = \begin{cases} A & ; \ n = 1 \\ \underbrace{A.A.A.....A}_{\text{"n" veces}} & ; \ n \geq 2 \end{cases}$$

- Hallemos A^2 si: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2)(2)+(-1)(3) & (2)(-1)+(-1)(1) \\ (3)(2)+(1)(3) & (3)(-1)+(1)(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar las filas de A en columnas.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

- Veamos un ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar k

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(k.A)^T = k.A^T$

3) $(A^T)^T = A$

4) $(A.B)^T = B^T.A^T$

team CALAPENSHKO

ESTUDIO DE LAS MATRICES CUADRADAS

Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DS (diagonal secundaria) DP (diagonal principal)

Donde: DP = Diagonal principal
DS = Diagonal secundaria

OBSERVACIÓN

Toda matriz cuadrada de "n" filas y "n" columnas es de orden n.

TRAZA DE A (Traz(A))

Se denomina así a la suma de todos los elementos de la diagonal principal

$$\text{Traz}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

- Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

DP

$\text{Traz}(A) = (2) + (8) + (-4)$
$\text{Traz}(A) = 6$

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar k.

1) $\text{Traz}(A + B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$
2) $\text{Traz}(k \cdot A) = k \cdot \text{Traz}(A)$
3) $\text{Traz}(A \cdot B) = \text{Traz}(B \cdot A)$

MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

1. **MATRIZ DIAGONAL:** Es aquella matriz no nula donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros, veamos algunos ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **MATRIZ ESCALAR:** Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a un número $k \neq 0$, veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

team CALAPENSHKO

3. **MATRIZ IDENTIDAD (I):** Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, veamos un ejemplo:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4. **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:** Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros, veamos un ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

5. **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:** Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros, veamos un ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 8\end{bmatrix}$$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS MATRICES CUADRADAS

1. **MATRIZ SIMÉTRICA:** Si A es una matriz simétrica, verifica

$$\boxed{A^T = A}$$

2. **MATRIZ ANTISIMÉTRICA:** Llamada también matriz Hemisimétrica. Si A es una matriz antisimétrica, verifica:

$$\boxed{A^T = -A}$$

3. **MATRIZ IDEMPOTENTE:** Si A es una matriz idempotente, verifica:

$$\boxed{A^2 = A}$$

4. **MATRIZ INVOLUTIVA:** Si A es una matriz involutiva, verifica:

$$\boxed{A^2 = I\ ;\ \text{(matriz identidad)}}$$

5. **MATRIZ NILPOTENTE:** Si A es una matriz nilpotente, verifica:

$$\boxed{A^P = 0\ ;\ \text{(matriz nula)}}$$

Donde $P \in \mathbb{N} / P \geq 2$

team CALAPENSHKO

DETERMINANTES

DEFINICIÓN

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real). Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así: det(A) ó $|A|$

DETERMINANTE DE ORDEN UNO

$$A=[a] \rightarrow |A|=a$$

DETERMINANTE DE ORDEN DOS

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = a\,.\,d - b\,.\,c$$

DETERMINANTE DE ORDEN TRES

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Según la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \oplus \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ a\,.\,e\,.\,i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ d\,.\,h\,.\,c \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} c\,.\,e\,.\,g \\ f\,.\,h\,.\,a \\ i\,.\,b\,.\,d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} g\,.\,b\,.\,f \end{matrix}$$

$$\oplus = N \qquad \oplus = M$$

$$|A| = M - N$$

MENOR COMPLEMENTARIO DE UNA COMPONENTE

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz dada.

- Para: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

El menor complementario de $a_{12}=4$ es:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5)\,.\,(3) - (1)\,.\,(2) = 15 - 2$$

$$\therefore\ M_{12} = 13$$

COFACTOR DE UNA COMPONENTE

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por C_{ij} se define de la manera siguiente:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

- Para: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor de la componente a_{13} es:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (1) \cdot [(1) \cdot (3) - (2) \cdot (-1)] = 3 + 2$$

$$\therefore \quad C_{13} = 5$$

Teorema:

El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

- Para: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Con los elementos de la primera fila:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2) \cdot (9) - (1) \cdot (7) + (-3) \ (-13)$$

$$|A| = 18 - 7 + 39$$

$$\therefore \quad |A| = 50$$

OBSERVACIÓN

Para aplicar al teorema anterior se recomienda escoger la fila (o columna) que presente más ceros.

Propiedades: Dadas las matrices cuadradas A y B y el escalar k:

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
2) $|A^T| = |A|$
3) $|k \cdot A| = k^n |A|$; "n" orden de A
4) Si dos filas (o columnas) son proporcionales el determinante será igual a cero.
5) Si todos los elementos de una fila (o columnas) son ceros el determinante será igual a cero.
6) Si se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.
7) El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se le aumenta un múltiplo de otra fila.
8) El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

team CALAPENSHKO

DETERMINANTE DE VANDERMONDE

1) DE ORDEN DOS

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

twitter.com/calapenshko

2) DE ORDEN TRES

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3) DE ORDEN CUATRO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

DEFINICIÓN

Una matriz cuadrada A es no singular, también llamada regular, si $|A| \neq 0$, así mismo si $|A| = 0$, la matriz A será singular.

MATRIZ INVERSA

DEFINICIÓN

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I$ (matriz identidad), entonces definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}.

Teorema:
Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo sí es una matriz no singular, en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades:
Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar k:

1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3) $(A^{-1})^{-1} = A$
4) $(k \cdot A)^{-1}) = k^{-1} \cdot A^{-1}$
5) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

OBTENCIÓN DE MATRICES INVERSAS

1) DE ORDEN UNO

$$A = [a] \quad \rightarrow A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right] ; \ a \neq 0$$

- Para $A = [-2]$, la inversa será:

$$A^{-1} = \left[-\frac{1}{2}\right]$$

2) DE ORDEN DOS

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Para : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = (3).(2) - (2).(1) = 6 - 2 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss – Jordan, que consiste en construir una matriz ampliada $(A \vdots I)$ de donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada $(I \vdots B)$ con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A, es decir: $B = A^{-1}$.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Efectuar las operaciones indicadas:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

C) $2.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

2. Determina la matriz transpuesta en cada caso:

A) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T =$

B) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T =$

C) $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C^T =$

3. Efectuar las operaciones indicadas:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

B) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina la traza de cada una de las siguientes matrices:

A) A^2

B) A^3

C) $A^2 - 2A^3$

5. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices

A) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ B) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

C) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ E) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

D) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ F) $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

6. Determine la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

A) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ F) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Si A es una matriz cuadrada de orden **n**; I es la matriz identidad de orden **n**. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si: $A^2 = A + I$, entonces $|A| = 0$

II) Si: $|A - kI| = 0$, entonces $|A^T - kI| = 0$; $k \in \mathbb{R}$

III) Si: $M = |A| \cdot A^{2n}$, entonces $|M| = |A|^{3n}$

Resolución: De acuerdo con la teoría procedemos al análisis de cada proposición:

I) $A^2 = A + I \Leftrightarrow A^2 - A = I \Leftrightarrow A \cdot (A - I) = I$

Tomando determinante: $|A \cdot (A - I)| = |I|$

$|A| \cdot |A - I| = 1$

De donde es evidente que $|A| \neq 0$

$\therefore$ Es falsa

II) $|A - kI| = |(A - kI)^T| = |A^T - (kI)^T| = |A^T - kI^T|$

Como: $I^T = I$, entonces: $|A - kI| = |A^T - kI|$

Observar que cuando $|A - kI| = 0$

Entonces $|A^T - kI| = 0$

$\therefore$ Es verdadera

III) $M = |A| \cdot A^{2n} \Rightarrow |M| = ||A| \cdot A^{2n}| = |A|^n \cdot |A^{2n}| = |A|^n \cdot |A|^{2n}$

$|M| = |A|^{3n}$

$\therefore$ Es verdadera

PROBLEMA 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular:

$$K = \frac{|A - B| - |2B|}{|A + B|^{-1}}$$

Resolución: Por dato tenemos: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

team CALAPENSHKO

Ahora podemos notar:

$$A-B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix} \text{ y } A+B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

Hallemos determinantes:

$$|A-B|=(3)(1)-(5)(-3)=3+15=18$$
$$|A+B|=(3)(3)-(1)(3)=9-3=6$$
$$|2B|=2^2|B|=4|B|=4[(0)(1)-(-1)(2)]=4[2]=8$$

Finalmente tenemos:

$$K=\frac{18-8}{6^{-1}}=\frac{10}{\frac{1}{6}}=10\,.\,6$$

$$\therefore\ K=60$$

PROBLEMA 3 Si A y B son dos matrices definidas por:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3} \text{ tal que } a_{ij}=\begin{cases}i+j\ ;\ i=j\\ i-j\ ;\ i\neq j\end{cases}$$

$$B=\left[b_{ij}\right]_{3\times3} \text{ tal que } b_{ij}+b_{ji}=0;\ b_{ij}=0\ \forall i=j \text{ y } b_{ij}=1\ \forall i<j$$

Calcular: $\det(A+B)$

Resolución: Formando cada una de las matrices tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a calcular el determinante en función de los cofactores de la primera fila:

$$\det(A+B)=2\,.\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}+(-1)\,.\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2(24)-(1)(-4)$$

$$\det(A+B)=48+4$$

$$\therefore\ \det(A+B)=52$$

PROBLEMA 4 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ s & t & n \end{vmatrix} = -2$$

Calcular:

$$K = \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ s & n & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & p & s \\ c & r & n \\ b & q & t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & r & n \\ a & p & s \\ b & q & t \end{vmatrix}$$

Resolución: Analicemos cuidadosamente cada determinante que conforma K

$\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ s & n & t \end{vmatrix}$ Se obtuvo al permutar la segunda y tercera columna del dato, por tanto su valor es: 2

$\begin{vmatrix} a & p & s \\ c & r & n \\ b & q & t \end{vmatrix}$ Se obtuvo al permutar la segunda y tercera fila de la transpuesta del dato, por tanto su valor es:2

$\begin{vmatrix} c & r & n \\ a & p & s \\ b & q & t \end{vmatrix}$ Al permutar la primera y la segunda fila, luego permutar la segunda y tercera fila se obtiene la transpuesta del dato, por tanto su valor es : -2

Finalmente : $K = 2 + 2 - (-2) = 4 + 2$

$\therefore \; K = 6$

PROBLEMA 5 Si:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcular: $|A|$

Resolución: El determinante pedido es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Permutando columna 1 y 2:

$$-|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

team CALAPENSHKO

Efectuando $F_4 + F_3$: $-|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

Permutando columna 3 y 4:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Finalmente en la triangular:

$$|A| = (1)(2)(3)(9)$$

$$\therefore \ |A| = 54$$

PROBLEMA 6 Si:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 1 & 49 \\ 8 & 27 & 1 & 343 \end{bmatrix}$$

Calcular: det(M)

Resolución: Estamos frente a un determinante de Vandermonde, veamos:

$$|M| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 & 7^2 \\ 2^3 & 3^3 & 1^3 & 7^3 \end{bmatrix}$$

$$|M| = (7-1)(7-3)(7-2)(1-3)(1-2)(3-2)$$

$$|M| = (6)(4)(5)(-2)(-1)(1)$$

$$\therefore \ |M| = 240$$

PROBLEMA 7 Si: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & a \quad b \\ b & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \quad a \end{bmatrix}$$

Calcular: $|A|$

team CALAPENSHKO

Resolución: Teniendo en cuenta a los cofactores de la primera columna tenemos:

$$|A| = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

Podemos observar que cada determinante le corresponde a una matriz triangular, luego tenemos:

$$|A| = a \cdot (a^{n-1}) + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (b^{n-1})$$

$$\therefore \ |A| = a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n$$

PROBLEMA 8 Determinar la traza de la matriz: $(A-17I)^{-1}$, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ t & -p & q \\ 0 & 0 & 82 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A^2 - 13A - 69I = 0$$

Resolución: De la ecuación matricial:

$$A^2 - 13A - 69I = 0$$

$$A^2 - 13A - 68I = I$$

$$(A-17I)(A+4I) = I$$

$$\underbrace{(A-17I)^{-1}(A-17I)}(A+4I) = (A-17I)^{-1} \cdot I$$

$$I \cdot (A+4I) = (A-17I)^{-1} \cdot I$$

$$A + 4I = (A-17I)^{-1}$$

Tomando traza tenemos:

$$\text{Traz}(A+4I) = \text{Traz}(A-17I)^{-1}$$

$$\text{Traz}(A) + 4\text{Traz}(I) = \text{Traz}(A-17I)^{-1}$$

Finalmente conseguimos:

$$82 + 4(3) = \text{Traz}(A-17I)^{-1}$$

$$82 + 12 = \text{Traz}(A-17I)^{-1}$$

$$\therefore \ \text{Traz}(A-17I)^{-1} = 94$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 9 Si D es una matriz inversible, tal que: $D = A^{-1} . B . A$. Determine usted la matriz $D^n ; n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2011$.

Resolución: Por condición tenemos:

$$D = A^{-1} . B . A$$

Ahora podemos plantear:

$$D^n = \underbrace{D . D . D . \ldots . D}_{\text{"n"veces}}$$

$$D^n = (A^{-1}.B.A).(A^{-1}.B.A).(A^{-1}.B.A). \ldots .(A^{-1}.B.A).(A^{-1}.B.A)$$

Como $A . A^{-1} = I$, tenemos :

$$D^n = A^{-1} . B . I . B . I . B . I . \ldots . I . B . I . B . A$$

$$D^n = A^{-1} . \underbrace{B . B . B . \ldots . B . B}_{\text{"n" veces}} . A$$

$$\therefore \; D^n = A^{-1} . B^n . A$$

PROBLEMA 10 Si A, B y X son matrices cuadradas tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & y+z & 0 \\ -2 & 5 & z \\ y & z & 3 \end{pmatrix} \text{ es simétrica}$$

$$B = \left[b_{ij}\right]_{3\times 3} \; / \; b_{ij} = 2j - i \; ; \; i < j \text{ es antisimétrica}$$

$$2A - A^T + B + B^T = X + 3A$$

¿Cuál es la traza de X?

Resolución: Observar que: $\text{Traz}(A) = 9$

Como A es simétrica: $A^T = A$

Como B es antisimétrica: $B^T = -B$

Por condición : $2A - A^T + B + B^T = X + 3A$

$$2A - A + B - B = X + 3A$$

$$A = x + 3A \;\Leftrightarrow\; X = -2A$$

Tomando traza : $\text{Traz}(X) = -2\,\text{Traz}(A) = -2 . (9)$

$$\therefore \; \text{Traz}(X) = -18$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 11 Si A es una matriz de orden dos que satisface:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{16}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{15}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{15}$$

Calcular: $a_{12}+a_{21}$

Resolución: Supongamos que $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Ahora buscaremos M^{16}

$$M^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^1 & 2^1\\ 2^1 & 2^1\end{pmatrix}$$

$$M^3=M^2\,.\,M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 2^2\\ 2^2 & 2^2\end{pmatrix}$$

$$M^4=M^2\,.\,M^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3 & 2^3\\ 2^3 & 2^3\end{pmatrix}$$

Por formación: $M^{16}=\begin{pmatrix}2^{15} & 2^{15}\\ 2^{15} & 2^{15}\end{pmatrix}$

Supongamos que $N=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Ahora buscaremos N^{15}

$$N^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4I$$

$$N^3=N^2\,.\,N=4I\,.\,N=4N$$

$$N^4=N^3\,.\,N=4N\,.\,N=4N^2=4(4I)=16I=2^4I$$

$$N^5=N^4\,.\,N=2^4I.\,N=2^4N$$

$$(N^5)^3=(2^4N)^3 \Leftrightarrow N^{15}=2^{12}N^3$$

$$N^{15}=2^{12}\,.\,4N$$

$$N^{15}=2^{14}N=2^{14}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$N^{15}=\begin{pmatrix}0 & 2^{15}\\ 2^{15} & 0\end{pmatrix}$$

Supongamos que $P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, es decir $P=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I$

$$P^{15}=(2I)^{15} \Leftrightarrow P^{15}=2^{15}I^{15}$$

$$P^{15}=2^{15}I=2^{15}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{15}=\begin{pmatrix}2^{15} & 0\\ 0 & 2^{15}\end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$A = M^{16} - N^{15} - P^{15}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2^{15} & 2^{15} \\ 2^{15} & 2^{15} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2^{15} \\ 2^{15} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A_{12} + a_{21} = 0$$

PROBLEMA 12 Para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ se define:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{\lfloor 2} + \frac{A^3}{\lfloor 3} + \frac{A^4}{\lfloor 4} + \ldots$$

Si: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces la suma de los elementos de la matriz e^A es:

Resolución:

$$A^2 = A \,.\, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \,.\, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Observar que para la matriz dada, la ecuación propuesta se reduce a:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{\lfloor 2}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum \text{elementos de } e^A = 1 + 1 + \frac{3}{2} + 1 + 1 + 1$$

$$\therefore \quad \sum \text{elementosdee}^{\,A} = \frac{13}{2}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 13 Si A es una matriz definida por $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ que satisface la ecuación matricial $X^2+3X+2I=0$ (I: matriz identidad) y si B y C son matrices de elementos enteros que satisfacen $A=B^3+C^3$. Determine la matriz $B-C$

Resolución: Como A satisface la ecuación:

$$X^2+3X+2I=0$$
$$A^2+3A+2I=0$$

Multiplicando por la matriz A:

$$A^3+3A^2+2A=0$$

Formando un binomio al cubo:

$$A^3+3A^2+3A+I=A+I$$
$$(A+I)^3=A+I$$

Recuerda que $I=I^3$: $(A+I)^3=A+I^3$

$$(A+I)^3-I^3=A$$
$$(A+I)^3+(-I)^3=A$$

Por condición : $B^3+C^3=A$, luego podemos plantear lo siguiente:

$$B=A+I \ \wedge \ C=-I \quad \Rightarrow B-C=A+2I$$

O también : $B=-I \quad \wedge \ C=A+I \Rightarrow B-C=-A-2I$

$$\therefore \ B-C=A+2I \ \text{ó} \ -A-2I$$

PROBLEMA 14 Determine la inversa de la siguiente matriz.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Resolución: De acuerdo con el método de Gauss – Jordan procedemos así. Formando la matriz ampliada (A : I)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

Efectuando $F_2 - 3F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Efectuando $F_1 - F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicando a la segunda fila por $\frac{1}{2}$ conseguimos

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Observar que a partir de $(A : I)$ mediante operaciones elementales hemos conseguido$(I : B)$, luego podemos afirmar que B es la inversa de A $(B = A^{-1})$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 15 Si X es una matriz que satisface la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la traza de la inversa de X

Resolución: Supongamos que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Observar que : $|A| = 1$ y $|B| = 1$

Luego A y B son inversibles, la ecuaciones:

$$A \cdot X^T \cdot B = C$$

Hallando las inversas de A y B según la regla práctica se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la ecuación : $A \cdot X^T \cdot B = C$

Multiplicando por A^{-1} :

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X^T \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$I \cdot X^T \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$X^T \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

team CALAPENSHKO

Multiplicando por B^{-1} :

$$X^T . \underbrace{B . B^{-1}} = (A^{-1} . C) . B^{-1}$$

$$X^T . I = (A^{-1} . C) . B^{-1}$$

$$X^T = (A^{-1} . C) . B^{-1} \quad \ldots\ldots (1)$$

Hallemos $A^{-1} . C$:

$$A^{-1} . C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} . C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallemos $(A^{-1} . C) . B^{-1}$:

$$(A^{-1} . C) . B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} . C) . B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente en (1): $X^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (X^T)^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^T$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad X^{-1} = \frac{1}{-3} . \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traz}(X^{-1}) = \left(-\frac{1}{3}\right)(-2-1)$$

$$\therefore \quad \text{Traz}(X^{-1}) = 1$$

PROBLEMA 16 Sea el polinomio: $F(x) = x^2 - 2x - 1$;
y la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

Calcular la suma de los elementos de F(A):

Resolución: Se pide la suma de los elementos de la expresión matricial: F(A); la cuál se define así: $F(A) = A^2 - 2A - I$ .....(*)

Primero hallaremos A^2: $A^2 = A . A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Luego, en (*) se tendrá: $F(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación por 2:

$$F(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

team CALAPENSHKO

Restando las dos primeras matrices:

$$F(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Finalmente diremos que:

$$\therefore\ \Sigma \text{ elementos de } F(A)=0$$

PROBLEMA 17 El equivalente de: $\sqrt{\begin{vmatrix}(a-b-c) & 2a & 2a\\ 2b & (b-c-a) & 2b\\ 2c & 2c & (c-a-b)\end{vmatrix}}$ es :

Resolución: Sea T el equivalente pedido, entonces nuestra estrategia para encontrar dicho equivalente consistirá en calcular el determinante mostrado como radicando, empleando para ello las propiedades expuestas:

$$\begin{vmatrix}(a-b-c) & 2a & 2a\\ 2b & (b-c-a) & 2b\\ 2c & 2c & (c-a-b)\end{vmatrix}$$

Sumando la 2da y 3^{era} fila a la 1^{era} :

$$\begin{vmatrix}(a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c)\\ 2b & (b-c-a) & 2b\\ 2c & 2c & (c-a-b)\end{vmatrix}$$

Extrayendo de la 1^{era} fila el factor $(a+b+c)$:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2b & (b-c-a) & 2b\\ 2c & 2c & (c-a-b)\end{vmatrix}$$

Restando la 1^{era} columna de las otras dos:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2b & -a-b-c & 0\\ 2c & 2c & -a-b-c\end{vmatrix}$$

Aquí encontramos el determinante según el criterio de los cofactores:

$$(a+b+c)\left\{(-a-b-c)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2b & -a-b-c\end{vmatrix}\right\}$$

Desarrollando, nos queda:

$$(a+b+c)\{(-a-b-c)(-a-b-c)\}=(a+b+c)^3$$

Finalmente el equivalente será:

$$T=\sqrt[3]{(a+b+c)^3}$$

$$\therefore\ T=a+b+c$$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 18 Sea la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

cuando "n" es un número entero positivo muy grande. ¿A qué valor se aproxima la suma de los elementos de la diagonal principal de A^n?

Resolución: La matriz dada se podrá escribir así:

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{.....(I)}$$

Ahora, analizando cuidadosamente algunas potencias de la matriz A se tendrá:

$$A^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad \text{.....(II)}$$

Ahora encontramos: $A^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3^3}\begin{bmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{bmatrix}$ .....(III)

Asimismo determinamos: $A^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\begin{bmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3^4}\begin{bmatrix}41 & 40\\ 40 & 41\end{bmatrix}$ .....(IV)

De(I): $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 3^0\\ 3^0 & 2\end{bmatrix}$

De (II): $A^2=\frac{1}{3^2}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{bmatrix}3^1+2 & 3^1+3^0\\ 3^1+3^0 & 3^1+2\end{bmatrix}$

De (III): $A^3=\frac{1}{3^3}\begin{bmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{bmatrix}=\frac{1}{3^3}\begin{bmatrix}3^2+3^1+2 & 3^2+3^1+3^0\\ 3^2+3^1+3^0 & 3^2+3^1+2\end{bmatrix}$

De (IV): $A^4=\frac{1}{3^4}\begin{bmatrix}41 & 40\\ 40 & 41\end{bmatrix}=\frac{1}{3^4}\begin{bmatrix}3^3+3^2+3^1+2 & 3^3+3^2+3^1+3^0\\ 3^3+3^2+3^1+3^0 & 3^3+3^2+3^1+2\end{bmatrix}$

Por inducción: $A^n=\frac{1}{3^n}\begin{bmatrix}3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+2 & 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+3^0\\ 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+3^0 & 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+2\end{bmatrix}$

Donde la suma de los elementos de su diagonal principal está dada así:

$$\Sigma=\frac{2}{3^n}\left(3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}.....+3^1+2\right)$$

Introduciendo el denominador:

$$\Sigma=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right)$$

Como "n" es muy grande, la suma pedida será:

$$\Sigma=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.....\right)$$

team CALAPENSHKO

Debemos recordar la siguiente suma notable:

$$x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x}\quad ;\ 0<x<1$$

Finalmente; la suma pedida es: $\therefore\quad \Sigma=2\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

PROBLEMA 19 Dada la matriz:

$$\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & k\end{bmatrix}\ \text{y}\ |A|=-4$$

Hallar el valor de "k"

Resolución: De acuerdo con la definición de matriz inversa se sabe que:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\text{Adj}(A)$$

Tomando determinante a ambos miembros:

$$|A^{-1}|=\left|\frac{1}{|A|}.\text{Adj}(A)\right|$$

Despejando, encontramos que: $|\text{Adj}(A)| = |A|^2$

Reemplazando datos, deducimos que: $|\text{Adj}(A)| = (-4)^2 = 16$ .....(*)

Sustituyendo el dato de la matriz para Adj(A) en (*):

$$\begin{vmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & k\end{vmatrix}=16$$

Efectuando: $C_1 - C_3$, se consigue:

$$\begin{vmatrix}0 & -8 & 4\\ -2 & 9 & -5\\ (-6-k) & 10 & k\end{vmatrix}=16$$

Desarrollando el determinante según el criterio de los cofactores, la igualdad será:

$$-(-8)\begin{vmatrix}-2 & -5\\ (-6-k) & k\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-2 & 9\\ (-6-k) & 10\end{vmatrix}=16$$

Finalmente efectuando operaciones, se obtiene:

$$8(-2k-30-5k)+4(-20+54+9k)=16$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

$$2(-7k-30)+9k+34=4$$

Finalmente al reducir nos queda:

$$\therefore\quad k=-6$$

PROBLEMA 20 Luego de resolver la ecuación:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-x) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (2-x) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (3-x) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \{(n-1)-x\} \end{vmatrix} = 0$$

Indicar por respuesta la suma de sus raíces.

Resolución: Por tratarse de una matriz de un orden mayor que 3, procederemos tal como se hizo en el ejercicio anterior. En este caso restaremos la 1^{era} fila a la 2da, 3^{era}, 4ta, y así sucesivamente ....., de este modo el determinante mostrado en el 1er miembro de la igualdad dada, se transforma en:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & (1-x) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-x) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \{(n-2)-x\} \end{vmatrix}$$

Luego por ser un determinante para una matriz triangular superior, su valor se determinará así:

$$(1)(-x)(1-x)(x-2).....\{(n-2)-x\}$$

Por condición se sabe que:

$$(1)(-x)(1-x)(x-2).....\{(n-2)-x\}=0$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

$$x(x-1)(x-2).....\{x-(n-2)\}=0$$

En consecuencia; las raíces de la ecuación son:

$$x_1=0; x_2=1; x_3=2; ..... x_{n-1}=n-2$$

Finalmente:

$$\Sigma \text{ de raíces} = 0+1+2+.....+(n-2)$$

$$\therefore \quad \Sigma \text{ de raíces} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 21 Calcular:

$$L=\begin{vmatrix} x & \pi & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ \pi & x & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ \pi & \pi & x & \cdots\cdots & \pi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi & \pi & \pi & \cdots\cdots & x \end{vmatrix}$$

Resolución: Considerando un determinante de orden "n" procedemos a sumar todas las columnas a la primera.

$$L=\begin{vmatrix} x+(n-1)\pi & \pi & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ x+(n-1)\pi & x & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ x+(n-1)\pi & \pi & x & \cdots\cdots & \pi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)\pi & \pi & \pi & \cdots\cdots & x \end{vmatrix}$$

Extrayendo el factor común de la primera columna:

$$L=\{x+(n-1)\pi\}\begin{vmatrix} 1 & \pi & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ 1 & x & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ 1 & \pi & x & \cdots\cdots & \pi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \pi & \pi & \cdots\cdots & x \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila de todas las demás conseguimos:

$$L=\{x+(n-1)\pi\}\begin{vmatrix} 1 & \pi & \pi & \cdots\cdots & \pi \\ 0 & (x-\pi) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & (x-\pi) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & (x-\pi) \end{vmatrix}$$

Estamos frente a una triangular superior luego:

$$L=\{x+(n-1)\pi\}.(1)\underbrace{(x-\pi)(x-\pi)\cdots\cdots\cdots(x-\pi)}_{(n-1)\text{ factores.}}$$

$$\therefore\ L=[x+(n-1)\pi]\,(x-\pi)^{n-1}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 22 Encuentre la suma de raíces del siguiente polinomio:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & ab & a^2b^2 & a^3b^3 \\ 1 & ac & a^2c^2 & a^3c^3 \end{vmatrix}$$

Resolución: Teniendo en cuenta que: $|A| = |A^T|$, el polinomio dado es:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & (ab) & (ac) \\ x^2 & a^2 & (ab)^2 & (ac)^2 \\ x^3 & a^3 & (ab)^3 & (ac)^3 \end{vmatrix}$$

Estamos frente a una Vandermondiana, luego:

$$P(x) = (a - x)(ab - a)(ab - x)(ac - ab)(ac - a)(ac - x)$$

Las raíces del polinomio P(x) se consiguen de:

$a - x = 0$; $ab - x = 0$; $ac - x = 0$. En consecuencia:

$x = a$; $x = ab$; $x = ac$

Suma de raíces:

$$\Sigma = a + ab + ac$$

$$\therefore \Sigma = a(1 + b + c)$$

PROBLEMA 23 Mostrar el conjunto solución (C S) de la ecuación:

$$4x^2 + \begin{vmatrix} 1 & -x & x & 1 \\ 2 & 0 & x & -x \\ x & -x & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolución: Aplicando cofactores con respecto a la última fila:

$$4x^2 - 2\begin{vmatrix} -x & x & 1 \\ 0 & x & -x \\ -x & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Restando a la primera fila la tercera $(F_1 - F_3)$

$$4x^2 - 2\begin{vmatrix} 0 & (x-2) & 1 \\ 0 & x & -x \\ -x & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando cofactores con respecto a la primera columna

$$4x^2 + 2x\begin{vmatrix} (x-2) & 1 \\ x & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$4x^2 + 2x[(x-2)(-x) - x] = 0$$

$$4x^2 + 2x[-x^2 + x] = 0 \leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 = 0$$

$$2x^3 - 6x^2 = 0 \leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0 \leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 3 = 0$$

De donde: $x_1 = 0$; $x_2 = 0 \vee x_3 = 3$

$\therefore$ CS= {0;3}

PROBLEMA 24 Dada una matriz cuadrada A se denominan valores propios de la matriz A a los valores "m" que satisfacen la ecuación: $|A - mI| = 0$
Hallar los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución: Tenemos:

$$A - mI = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$A - mI = \begin{bmatrix} (2-m) & -2 & -2 \\ -1 & -m & -2 \\ -1 & -1 & (1-m) \end{bmatrix}$$

Por condición:

$$\begin{vmatrix} (2-m) & -2 & -2 \\ -1 & -m & -2 \\ -1 & -1 & (1-m) \end{vmatrix} = 0$$

Restando $C_1 - C_2$, tenemos:

$$\begin{vmatrix}(4-m) & -2 & -2\\ (m-1) & -m & -2\\ 0 & -1 & (1-m)\end{vmatrix}=0$$

$$(4-m)\begin{vmatrix}-m & -2\\ -1 & (1-m)\end{vmatrix}-(m-1)\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & (1-m)\end{vmatrix}=0$$

$$(4-m)(m^2-m-2)-(m-1)(2m-4)=0$$

$$(4-m)(m-2)(m+1)-2(m-1)(m-2)=0$$

$$(m-2)[(4-m)(m+1)-2(m-1)]=0$$

$$(m-2)(4+3m-m^2-2m+2)=0$$

$$(m-2)(-m^2+m+6)=0 \rightarrow (m-2)(m^2-m-6)=0$$

$$(m-2)(m-3)(m+2)=0 \rightarrow m=2;\ m=3;\ m=-2$$

$\therefore$ Los valores propios de A son: 2; 3 y -2

PROBLEMA 25 Encuentre la traza de la matriz A sabiendo que cumple:

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}.A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

Resolución: De acuerdo con la ecuación matricial tenemos: B . A = C. Donde:

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix} \wedge C=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 10\end{bmatrix} \wedge B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación matricial tenemos:

$$\underbrace{B^{-1}.B}_{I}.A=B^{-1}.C \rightarrow IA=B^{-1}C$$

Es decir:

$$A=B^{-1}.C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -14\\ 6 & 20\end{bmatrix}$$

$\therefore$ Traz(A) = 16

PROBLEMA 26 Si X es la solución de: A . X = B, calcular: Traz (X^T . B). Donde:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

Resolución: Teniendo en cuenta la resolución del problema anterior, la solución de la ecuación matricial será: $X = A^{-1} . B$

Hallemos la inversa de la matriz A:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

Ahora en la ecuación

$$X=A^{-1}.B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow x=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

Notar que:

$$X^T=\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}$$

Luego:

$$X^T.B=\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=[1]$$

$$\therefore \text{Traz}(X^T . B) = 1$$

PROBLEMA 27 Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix}u & v & w\\ 0 & x & y\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}$$

Encontrar el valor de: u + v + w + x + y + z, si se cumple que: A . B = I

Resolución: De la ecuación:

$$A.B = I \rightarrow B = A^{-1} \qquad \text{.....(1)}$$

Hallemos la inversa de la matriz A según el método de Gauss – Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{matrix}\xrightarrow{2F_2}\\ \xrightarrow{4F_3}\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\end{array}\right]$$

Sumando a la fila 1, las filas 2 y 3 tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Sumando a la fila 2 el doble de la fila 3 conseguimos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Finalmente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Por condición:

$$\begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$u+v+w+x+y+z = 1+2+4+2+8+4$$

$$\therefore\ u+v+w+x+y+z = 21$$

PROBLEMA 28 Si A es una matriz simétrica, calcular la traza de la matriz "$A + A^T$"

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2}{bc} & a & \sqrt[3]{3}-1 \\ 1+\sqrt{2} & \dfrac{b^2}{ac} & c \\ b & \sqrt[3]{3}-\sqrt{2} & \dfrac{c^2}{ab} \end{bmatrix}$$

Resolución: Como A es una matriz simétrica verifica: $A = A^T$, luego:

$$A + A^T = 2A \ \rightarrow\ \text{Traz}(A + A^T) = \text{Traz}(2A)$$

Por propiedad:

$$\text{Traz}(2A) = 2\,\text{Traz}(A) \qquad \text{.....(1)}$$

De la matriz A:

$$\text{Traz}\,(A) = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

team CALAPENSHKO

Es decir:

$$\text{Traz}(A) = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \qquad \text{.....(2)}$$

Como: $A = A^T$ se cumple:

$$a = 1 + \sqrt{2};\ b = \sqrt[3]{3} - 1 \wedge c = -\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$$

Sumando:

$$a + b + c = 0 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{.....(3)}$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\text{Traz}(A) = 3$$

Finalmente en (1):

$$\text{Traz}(2A) = 2\,\text{Traz}(A) = 2.3$$

$$\therefore \text{Traz}(2A) = 6$$

PROBLEMA 29 Si A y B son matrices involutivas tales que:

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ encontrar } (A + B)^2$$

Resolución: Se pide:

$$(A + B)^2 = (A + B).(A + B) = A^2 + B.A + A.B + B^2$$

Como A es involutiva $\rightarrow$ $A^2 = I$

Como B es involutiva $\rightarrow$ $B^2 = I$

Luego:

$$(A + B)^2 = I + B.A + A.B + I = B.A + A.B + 2I$$

Finalmente la matriz $(A + B)^2$ será:

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Si: $A=\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}$

Calcular la suma de los elementos: $A^{4n}+A^{4n+1}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Resolución: Con la finalidad de usar un método inductivo en la resolución de este problema es necesario hallar la matriz A^4, veamos:

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{bmatrix}$$

twitter.com/calapenshko

$$A^4=A^2.A^2=\begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^4 & 0\\ 0 & a^4\end{bmatrix}$$

Notar que:

$$A^4=a^4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow A^4=a^4.I$$

Ahora elevamos al exponente "n" a ambos miembros:

$$(A^4)^n=(a^4.I)^n=a^{4n}.I^n\rightarrow A^{4n}=a^{4n}.I$$

Multiplicando por A:

$$A^{4n}.A=a^{4n}.\underbrace{I.A}$$

$$A^{4n+1}=a^{4n}.A$$

Observar que:

$$A^{4n}=a^{4n}.I=a^{4n}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow A^{4n}=\begin{bmatrix}a^{4n} & 0\\ 0 & a^{4n}\end{bmatrix}$$

$$A^{4n+1}=a^{4n}.A=a^{4n}\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}\rightarrow A^{4n+1}=\begin{bmatrix}0 & -a^{4n+1}\\ a^{4n+1} & 0\end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$A^{4n}+A^{4n+1}=\begin{bmatrix}a^{4n} & -a^{4n+1}\\ a^{4n+1} & a^{4n}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ Σ de elementos de "$A^{4n}+A^{4n+1}$" $=2.a^{4n}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si:

$$\begin{bmatrix} x-1 & 4 \\ 5 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ z-1 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar que:

A) $x + y < z$ B) $x + z = 5y$ C) $xy = z$
D) $xz < y^3$ E) $yz = 2x$

2. Los elementos de la diagonal secundaria de: A . B, suman:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Si se cumple que: $A + B = I$, donde:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular: $a + b + 2c$

A) -1 B) $-1/2$ C) 0
D) $1/2$ E) 1

5. Sea la matriz:

$$H = \begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

tal que: $x > 0$ y $\det(H) = 4$.

Luego H^2 es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix}$$

Conmutables respecto a la multiplicación. ¿Cuál es el valor de "m + n"?

A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 3

6. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular: Traz(A . B)

A) 1 B) -1 C) 0
D) 2 E) 3

7. Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el valor de M^{1003} es:

A) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ E) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Si:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$$

Hallar el valor de:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b \\ 2+c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

team CALAPENSHKO

9. Dada la matriz:

$$B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Determine la suma de todos los elementos de P(B), donde:

$$P(X)\equiv X^{34}-2X^{9}+1$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. ¿Para qué valor de "m" la matriz:

$$\begin{bmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{bmatrix}$$

es idempotente.

A) −1/2 B) 1/2 C) 1/4
D) −1/4 E) Ninguno

11. Dada la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Hallar la suma de los elementos de: A^{40}

A) 6^{12} B) 6^{13} C) 6^{14}
D) 6^{15} E) 6^{11}

12. Calcular Traz(A . B + B . A)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\wedge B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

A) 22 B) 12 C) 0
D) −12 E) −22

13. Calcular la parte real menos el cuadrado de la parte imaginaria de:

$$Z=\begin{vmatrix}1 & 1+i & i\\ i & 1-i & -i\\ -1 & 2i & 1\end{vmatrix};\ i^2=-1$$

A) 1 B) −4 C) 3
D) −6 E) −32

14. Calcular la suma de soluciones x, si:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & x-2 & 2\\ 1 & 0 & x-4\end{vmatrix}=7$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 2 E) −4

15. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix}x & 3 & 4\\ 4 & 6 & 2x+3\\ x-3 & 2 & 5\end{vmatrix}=7$$

A) $\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$ B) {1; −1} C) $\left\{2;\frac{5}{2}\right\}$
D) $\left\{\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$ E) $\left\{1;\frac{5}{2}\right\}$

16. Dada la matriz:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

Calcular la suma de los parámetros "m" y "n" de modo que:

$$A^2+mA+nI=0$$

Siendo I la matriz identidad.

A) 10 B) −11 C) 12
D) −13 E) −15

17. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & b & c\\ a+b & b^2 & c^2\end{bmatrix}$$

Entonces podemos afirmar:

A) $|A|=|B|$ B) $|A|=ab|B|$
C) $|A|=\frac{a}{b}|B|$
D) $|A|=(a-b)|B|$ E) N.A.

18. Cuál es un factor de:

$$F(x;y)=\begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$$

A) y B) x C) x^2+y^2
D) $x+y$ E) $x-y^{-1}$

19. Determine la expresión equivalente a:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

A) $a^3+b^3+c^3$ B) $a+b+c$
C) $6abc$
D) $a^2+b^2+c^2$ E) $(ab+bc+ac)$

20. Calcular la suma del mayor elemento con el menor elemento de la matriz A de orden 3×2; cuyo elemento genérico es:

$$a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 \; ; \; i<j \\ j+2 \; ; \; i\geq j \end{cases}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

21. Calcular: Traz (X), donde "X" es la matriz que satisface:

$$A \,.\, X = B$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

22. Siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular: $\text{Traz}(A^{-4})$

A) 32 B) 30 C) 34
D) 28 E) 36

23. Se tienen las 6 matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \; ; \; B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} \; ; \; D=ABC$$

$$M=A^2B^3C^4 \; ; \; Q=AB^{-1}$$

El valor de "x" para que tres de las seis matrices no sean inversibles es:

A) 0 B) 3 C) 4
D) -14 E) 1

24. Sean: a y b números enteros positivos pares; con estos números se forma la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} a & -b & -a \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}; \text{ si : } \det(A+I)=12$$

(I matriz identidad) Hallar el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & 2a \\ b^2 & b \end{bmatrix}$$

A) -10 B) 10 C) 16
D) -12 E) 12

25. Determinar para qué valor de "a" es invertible la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

A) $a\in\mathbb{R}-\{0;2\}$ B) $a\in\mathbb{R}-\{0;2\}$
C) $a\in\mathbb{R}-\{0\}$
D) $a\in\mathbb{R}-\{1;2\}$ E) $a\in\mathbb{R}$

26. Si: $E=|A|\,A^2$. Determine el valor de:

$$M=|E\,.\,E^t\,|E||$$

Sabiendo que $|A|=4$ y A es de orden 4×4

A) 4^{24} B) 4^{32} C) 4^{36}
D) 4^{42} E) 4^{64}

team CALAPENSHKO

27. Sea: $M = \{A/\det(A) \neq 0\}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 72 & Z \\ 105 & 108 & Z+3 \\ 140 & 144 & Z-3 \end{bmatrix}$$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto "M"?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

28. Si: $|A_{2\times2}| = 2$; $|B_{2\times2}| = 2^2$; $C = AB^T$
Calcular:

$$\frac{||AC|B|}{|A|\,|B|}$$

A) 2 B) 2^4 C) 2^5
D) 2^6 E) 2^7

29. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

con: $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz B tal que: $AB = BA = I$ es:

A) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -a/c & 1/c \\ 1/c & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/c & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -a/b & 1/c \\ 1/c & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ 1/b & -a/bc \end{bmatrix}$

30. Calcular: $\text{Traz}(A) + \text{Traz}(A^{-1})$; siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A) 41/6 B) 43/6 C) 47/6
D) 53/6 E) 59/6

31. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\text{Traz}(A^{4n}) = 128$
Calcular:

$$\frac{2n+1}{n-2}$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 4

32. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proporcionar el valor de verdad de:
I. A^2 es involutiva
II. A^2 es idempotente
III. A^3 es nilpotente

A) FVV B) FVF C) VVF
D) VFV E) FFF

33. Determine la traza de A si se cumple que:

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } (A-I)^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ADMISIÓN UNI 2017 - I

A) 1 B) $\frac{5}{4}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) 4

34. Considerando la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Marcar (V) o (F):

I. $A^n = I \leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par

II. $A^n = A \leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es impar

III. $A \cdot B = B \cdot A \leftrightarrow A = B$, donde B es de orden 2.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) VFV E) FVF

team CALAPENSHKO

35. Determine los valores reales de x para que la matriz: $A=\begin{bmatrix}\sqrt{x+3} & 1\\ 3 & \sqrt{x-5}\end{bmatrix}$ sea inversible.

A) $x\le 5$ B) $x\ge 0$ C) $x\ge 5$
D) $x\ge -3$ E) $x\ge 5 \wedge x\neq 6$

36. Sea: $A=[a_{ij}]$ una matriz triangular superior de orden 4, tal que: $a_{ij}=1$, si: $i\le j$, además: $B=[b_{ij}]=A^n$; $n\in\mathbb{N}/n\ge 2$. Hallar: b_{14}

A) n B) $\frac{n(n+1)}{2}$
C) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
D) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ E) N.A.

37. Determine el valor del siguiente determinante:

A) 0
B) 24
C) 32
D) 210
E) 312

$$\begin{vmatrix}10 & 5 & 1 & 32\\ 4 & 6 & 5 & 30\\ 9 & 5 & 6 & 40\\ 8 & 3 & 9 & 40\end{vmatrix}$$

38. Calcular el siguiente determinante:

A) 54
B) 24
C) –54
D) 0
E) 1

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 6 & -2\\ 4 & 5 & 6 & 0\\ 1 & -1 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

39. Calcular $|A|$, si: $A=3B^2$, y:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

A) 16 B) 216 C) 324
D) 512 E) 1 024

40. Al resolver, calcular "x":

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & a & a & 0\\ x & 0 & b & 0\\ x & 0 & 0 & c\end{vmatrix}=0$$

A) $\frac{ac}{a+c}$ B) $\frac{a+b}{bc}$ C) $\frac{bc}{a+b}$
D) $\frac{ab}{b+c}$ E) $\frac{b+c}{a+b}$

twitter.com/calapenshko

41. Calcular el siguiente determinante:

$$A=\begin{vmatrix}a+2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & a+3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & a+4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & a+5\end{vmatrix}$$

A) $a+14$ B) a^4+14
C) a^4-14
D) $a^3(a-14)$ E) $a^3(a+14)$

42. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}$$

A) $(a+b)(b+c)(a+c)$
B) $(1+a)(1+b)(1+c)$
C) $-abc$
D) abc
E) 1

43. Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

A) 1 B) 0 C) 24
D) 120 E) 720

44. Dos jóvenes acuerdan enviarse mensajes no detectables, cada letra en el mensaje es reemplazada por el número de su posición en el alfabeto (excluidas de "LL" y "Ñ") y ese número es una entrada de la matriz M. Por ejemplo: EDAD es representada por la matriz:

$$M=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Para mayor seguridad, cada mensaje con cuatro letras es enviado con codificación MT, donde:

$$T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Si uno de los jóvenes recibe la matriz

$$\begin{pmatrix}51 & -3\\ 27 & -12\end{pmatrix}$$

Entonces, el mensaje es:

A) AMOR B) ROMA C) COMA
D) ROSA E) AROS

45. Dado el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ a & b & c & d\\ x & 4 & -1 & z\\ b & c & x & y\end{vmatrix}=10$$

Calcular:

$$\begin{vmatrix}8 & 4 & 6 & 2\\ c & a & b & d\\ -1 & x & 4 & z\\ x & b & c & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ c & b & a & d\\ -1 & 4 & x & z\\ x & c & b & y\end{vmatrix}$$

A) 0 B) 10 C) 20
D) –10 E) 30

46. Dada la matriz singular A, determine todos los valores de x.

$$A=\begin{bmatrix}2x-6 & x & -1\\ x & x & -1\\ 4 & 4 & x-4\end{bmatrix}$$

Indicar como respuesta la suma de los valores hallados.

A) 6 B) 8 C) 10
D) –3 E) 16

47. Calcular el período de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

48. Hallar $|A^{-1}|^2$, conociendo

$$ADJ(A)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{81}$
D) $\frac{1}{243}$ E) $\frac{1}{4}$

49. Calcular det (A), si:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3\\ 1 & 2^5 & 3^5 & \cdots & n^5\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & & n^{2n-1}\end{bmatrix}$$

A) n! B) 1!.3!.5!...(2n–1)!
C) (2n – 1)!
D) $(n^n)!$ E) $(n^2)!$

50. Calcular:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & C_1^2 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & \cdots & 0\\ 1 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & C_1^n & C_2^n & C_3^n & \cdots & C_{n-1}^n\end{vmatrix}$$

A) $2^n C_n^{2n}$ B) C_n^{2n} C) $\left[C_n^{2n}\right]^2$
D) 2^n E) 1

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Capítulo 24

Sistema de Ecuaciones

CAPACIDADES:

- Reconocer sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.
- Aplicar determinantes en la resolución de un sistema.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & .....(1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & .....(2) \end{cases}$$

EPITAFIO DE DIOFANTO

SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ÉPOCA DE ARQUÍMEDES, Arquímedes desafiando a los matemáticos de Alejandría les propuso el siguiente problema: "El Sol tenía una ganadería de diferentes colores: blancos, zainos, manchados y castaños. El número de toros manchados era inferior al número de toros blancos en 1/2 + 1/3 de veces el número de toros zainos, e inferior al número de toros zainos en 1/4 + 1/5 de veces el número de toros castaños, e inferior al número de toros castaños en 1/6 + 1/7 de veces el número de toros blancos.

Por otra parte el número de vacas blancas era 1/3 + 1/4 de veces el número toral de ganado zaino (vacas + toros), mientras el número de vacas zainas era 1/4 + 1/5 de veces el número de ganado castaño: el número de vacas castañas era 1/5 + 1/6 de veces el número de ganado manchado, y el número de vacas manchadas era 1/6 + 1/7 de veces el número de ganado blanco. ¿Cuántos toros y vacas había de cada color?

En nuestros tiempos resolveríamos el problema mediante un sistema de ecuaciones de primer grado, lo cual no era conocido en esa época.

La solución de Arquímedes fue la siguiente:

GANADO	TOROS	VACAS
manchado	331 950 960	435 137 040
blanco	829 318 560	576 508 800
zainos	596 841 120	391 459 680
castaños	588 644 800	281 265 600

Es difícil creer que Arquímedes pudiera haber manejado estos números valiéndose del rudimentario sistema de numeración de esa época. Por lo tanto, debió obtener sus resultados mediante un sistema privado similar al actual.

SISTEMAS DE ECUACIONES

DEFINICIÓN

Es un conjunto formado por dos o más ecuaciones que se verifican simultáneamente para un mismo conjunto de valores atribuidos a sus letras o incógnitas, veamos algunos ejemplos:

- $\begin{cases} 2x + y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$ Se verifica cuando: $x = 3 \wedge y = 1$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$ Se verifica cuando: $x = 5 \wedge y = 2$; $x = 2 \wedge y = 5$; $x = -2 \wedge y = -5$; $x = -5 \wedge y = -2$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Son los valores que asumen las incógnitas del sistema, éstas se dan en forma de pares ordenados, ternas ordenadas, etc.

- Si el sistema presenta dos incógnitas cada solución será de la forma (x; y)
- Si el sistema presenta tres incógnitas, cada solución será de la forma (x; y; z)

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Es el conjunto cuyos elementos son todas las soluciones que presenta el sistema en caso no tenga solución diremos que su conjunto solución es el conjunto vacío. Veamos un ejemplo:

- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$ $C.S = \{(3;2),(2;3),(-3;-2),(-2;-3)\}$

PROPIEDAD

El número de soluciones que tiene un sistema se obtiene al multiplicar entre sí, todos los grados de las ecuaciones que forman el sistema.

- Por ejemplo, para el sistema anterior: Nº de sol. = (2)(2) = 4

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN SU POSIBILIDAD DE SOLUCIÓN

SISTEMAS COMPATIBLES:

Son aquellos sistemas que admiten solución, se subdividen en:

1) **Determinadas:** Si presentan una cantidad limitada de soluciones.
2) **Indeterminadas:** Si presentan infinitas soluciones.

SISTEMAS INCOMPATIBLES:

Son aquellos sistemas que no admiten solución.

team CALAPENSHKO

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN EL GRADO DE LAS ECUACIONES

SISTEMAS LINEALES:

Son aquellos sistemas donde todas las ecuaciones son de primer grado, veamos algunos ejemplos:

- $\begin{cases} x + 5y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - y = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$; $\begin{cases} x - y + z = 4 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y + z = 5 \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ 2x - y - z = 1 \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$

SISTEMAS NO LINEALES:

Son aquellos sistemas donde al menos una ecuación no es de primer grado, veamos algunos ejemplos:

- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y = 10 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$; $\begin{cases} x + y - xy = 10 \ \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 4 \ \ \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

SISTEMAS LINEALES

FORMA GENERAL

Consideremos un sistema lineal de "m" ecuaciones con "n" incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde: $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots\ldots\ldots \wedge x_n$ son las Incógnitas

Siendo el conjunto solución de la forma:

$$C.S = \{(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots\ldots; x_n)\}$$

OBSERVACIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales existen diversos métodos:

- Método de Sustitución
- Método de Reducción
- Método de Igualación
- Método Matricial
- Método de Cramer (Determinantes)
- Método gráfico

SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

Es aquel sistema donde todos los términos independientes son nulos (ceros), veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x + y + z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x - 3y - 2z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible donde una de sus soluciones es la solución trivial (cada incógnita es igual a cero). Para el ejemplo: Solución trivial = (0; 0; 0)

Asimismo el sistema lineal homogéneo en el caso que sea compatible puede tener otras soluciones, las llamadas no triviales.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL SEGÚN EL MÉTODO DE CRAMER

Dado un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos:

1) Determinante del sistema (Δ_s)

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Determinante de una incógnita (Δ_i)

Se obtiene a partir del determinante anterior reemplazando los elementos de la columna de coeficientes de la incógnita en referencia por los términos independientes.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cada incógnita del sistema se obtendrá según la relación

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s} \; ; \; \forall\, i = \overline{1; n}$$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x - 2y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

Resolución Observar que:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (3)(5) = -4 - 15 = -19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (7)(-2) - (3)(5) = -14 - 15 = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (3)(7) = 6 - 21 = -15$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \rightarrow x = \frac{29}{19} \; ; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \rightarrow y = \frac{15}{19}$$

$$\therefore CS = \left\{\left(\frac{29}{19}; \frac{15}{19}\right)\right\}$$

TEOREMA

Dado el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Si este admite soluciones a parte de la trivial, el determinante del sistema deberá ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

CASO PARTICULAR

Si el sistema: $\begin{cases} a_1x + a_2y = m \\ b_1x + b_2y = n \\ c_1x + c_2y = p \end{cases}$

Es compatible, entonces: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & m \\ b_1 & b_2 & n \\ c_1 & c_2 & p \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo: Si el sistema: $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$

Es compatible, entonces:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se tiene:

$$m^2 + m = 0$$
$$m(m+1) = 0$$
$$m = 0 \vee m = -1$$

Sugerencia: Verifique que efectivamente los valores hallados cumplen la condición.

ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{11}x + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donde la solución se obtiene a partir de: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_s}$, luego:

1) El sistema tiene solución única si y sólo si: $\Delta_s \neq 0$

2) El sistema tiene infinitas soluciones si y sólo si: $\Delta_i = 0 \wedge \Delta_s = 0$

3) El sistema no tiene solución si siendo $\Delta_s = 0$ existe algún $\Delta_i \neq 0$

PROPIEDAD

Un caso particular de lo visto anteriormente se presenta en el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \quad \ldots\ldots (1) \\ a_1x + b_1y = c_1 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

team CALAPENSHKO

1) El sistema será compatible determinado, es decir tendrá solución única si se verifica:

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

2) El sistema será compatible indeterminado, es decir tendrá infinitas soluciones si se verifica:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

3) El sistema será incompatible, es decir no tendrá solución si se verifica:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

SISTEMAS NO LINEALES

CRITERIOS DE RESOLUCIÓN

1) Si el sistema está conformado por ecuaciones de diferentes grados se deberá encontrar una nueva ecuación en función de una sola incógnita, para a partir de esta determinar las soluciones del sistema, veamos un ejemplo:

Resolver: $\begin{cases} x + y = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ xy = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

de la ecuación (1): $x = 7 - y$

reemplazando en (2): $(7 - y)y = 10$

efectuando tenemos: $y^2 - 7y + 10 = 0$

$$(y - 5)(y - 2) = 0$$

de donde obtenemos $y = 5 \vee y = 2$

Si $y = 5$ en (2): $x = 2 \Rightarrow$ sol = $(2; 5)$

Si $y = 2$ en (2) : $x = 5 \Rightarrow$ sol = $(5; 2)$

$\therefore$ CS = $\{(2; 5), (5; 2)\}$

2) Si el sistema está conformado por ecuaciones cuya parte literal es homogéneo (de igual grado), se recomienda realizar la siguiente sustitución; $y = kx$, donde el parámetro "k" se determinará por eliminación de las incógnitas $x \wedge y$.

team CALAPENSHKO

Una vez encontrado el valor de "k" fácilmente se obtendrá el valor de cada incógnita del sistema, veamos un ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 3y^2 = 21 \ldots\ldots (1) \\ x^2 + xy + 3y^2 = 15 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Hagamos: $x = ky$

Reemplazando en (1): $y^2(k^2 + 3k + 3) = 21$

Reemplazando en (2): $y^2(k^2 + k + 3) = 15$

Dividiendo m . a . m: $\dfrac{k^2 + 3k + 3}{k^2 + k + 3} = \dfrac{7}{5}$

De donde obtenemos $k^2 - 4k + 3 = 0$

$k = 3 \vee k = 1$

Como: $x = ky \rightarrow x = 3y \vee x = y$

En (1) con $x = 3y$: $9y^2 + 9y^2 + 3y^2 = 21$

$21y^2 = 21$

$y^2 = 1$

$y = 1 \vee y = -1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x = 3 \vee x = -3$

Soluciones: $(3; 1)$ y $(-3; -1)$

En (1) con $x = y$: $y^2 + 3y^2 + 3y^2 = 21$

$7y^2 = 21$

$y^2 = 3$

$y = \sqrt{3} \vee y = -\sqrt{3}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Soluciones: $\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ y $\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$

$$\therefore CS = \left\{(3; 1), (-3; -1), \left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)\right\}$$

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En cada recuadro coloca el número de soluciones que presenta el sistema adjunto.

A) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$ ☐

B) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=10 \\ x+y=2 \end{cases}$ ☐

C) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$ ☐

2. Determine el valor de x en cada sistema:

A) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 3x+2y \\ 2x-3y \end{cases}$

3. Determine el valor de y en cada sistema:

A) $\begin{cases} 7x+5y=8 \\ 5x-3y=5 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 3x+5y=6 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$

4. Resolver cada sistema:

A) $\begin{cases} 7x+5y=8 \\ 5x-3y=5 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-y-z=3 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x^2-y^2=24 \\ xy=5 \end{cases}$

5. Determina el valor de "m" de modo que las ecuaciones:

$$x+y=4$$
$$x-y=2$$
$$2x+3y=m-1$$

Formen un sistema.

6. Coloca en cada paréntesis S. C. (Sistema compatible) o S. I. (Sistema incompatible) según corresponda.

A) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}$ ( )

B) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ ( )

C) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$ ( )

D) $\begin{cases} x+y=2 \\ 5x+5y=10 \end{cases}$ ( )

E) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ ( )

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 2y = -10 & .....(1) \\ 5x + 8y = -60 & .....(2) \end{cases}$$

Resolución: El sistema se resolverá mediante el método de reducción, veamos:

Restando (2) – (1):

$$5x + 8y - 5x + 2y = -60 + 10$$

$$5y = -25 \leftrightarrow y = -5 \quad ..... (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$5x - 2(-5) = -10 \leftrightarrow 5x + 10 = -10$$

$$5x = -20 \leftrightarrow x = -4$$

$$\therefore CS = \{(x; y)\} = \{(-4; -5)\}$$

PROBLEMA 2 Resolver:

$$\begin{cases} 7x + 9y = 42 & .....(1) \\ 12x + 10y = -4 & .....(2) \end{cases}$$

Resolución: El sistema se resolverá mediante el método de sustitución, veamos:

* De la ecuación (1) despejamos "x":

$$7x + 9y = 42 \rightarrow x = \frac{42 - 9y}{7} \quad .....(3)$$

* Reemplazando (3) en (2):

$$12\left(\frac{42 - 9y}{7}\right) + 10y = -4$$

$$\frac{504 - 108y + 70y}{7} = -4$$

$$504 - 38y = -28$$

$$532 = 38y \rightarrow y = 14 \quad .....(4)$$

* Reemplazando (4) en (3):

$$x = \frac{42 - 9(14)}{7}$$

$$x = -\frac{84}{7} \rightarrow x = -12$$

$$\therefore CS = \{(x; y)\} = \{(-12; 14)\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 3 Resolver:

$$\begin{cases} 4y + 3x = 8 & .....(1) \\ 8x - 9y = -77 & .....(2) \end{cases}$$

Resolución: El sistema se resolverá mediante el método de Igualación, veamos:

* De la ecuación (1) despejamos x:

$$x = \frac{8 - 4y}{3} \qquad .....(3)$$

* De la ecuación (2) despejamos x:

$$x = \frac{9y - 77}{8} \qquad .....(4)$$

* De (3) y (4) tenemos:

$$\frac{8 - 4y}{3} = \frac{9y - 77}{8} \rightarrow 64 - 32y = 27y - 231$$

$$295 = 59y \rightarrow y = 5 \qquad .....(5)$$

* Reemplazando (5) en (3):

$$x = \frac{8 - 4(5)}{3} \rightarrow x = -4$$

$$\therefore CS = \{(x;y)\} = \{(-4; 5)\}$$

PROBLEMA 4 Calcular "x – y" del sistema:

$$\begin{cases} 3(x + 2) = 2y & .....(1) \\ 2(y + 5) = 7x & .....(2) \end{cases}$$

Resolución: De la ecuación (2) conseguimos:

$$2y + 10 = 7x \rightarrow y = \frac{7x - 10}{2} \qquad .....(3)$$

* Reemplazando (3) en (1):

$$3x + 6 = 2\left(\frac{7x - 10}{2}\right)$$

$$3x + 6 = 7x - 10 \rightarrow x = 4 \qquad .....(4)$$

* Reemplazando (4) en (3):

$$y = \frac{7(4) - 10}{2} \rightarrow y = 9$$

Finalmente tenemos:

$$\therefore x - y = -5$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 5 Calcular : $\frac{y^2}{x}$ del sistema:

$$\begin{cases} 2(x+5) = 4(y-4x) \ldots\ldots(1) \\ 10(y-x) = 11y - 2x \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Resolución:

* De la ecuación (1) despejamos x:

$$2x + 10 = 4y - 16x$$

$$18x = 4y - 10 \rightarrow x = \frac{4y-10}{18} \quad \ldots\ldots(3)$$

* De la ecuación (2) despejamos x:

$$10y - 10x = 11y - 2x$$

$$-8x = y \rightarrow x = -\frac{y}{8} \quad \ldots\ldots(4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$-\frac{y}{8} = \frac{4y-10}{18} \leftrightarrow -18y = 32y - 80$$

$$80 = 50y \rightarrow y = \frac{8}{5} \quad \ldots\ldots(5)$$

Reemplazando (5) en (4):

$$x = -\frac{\left(\frac{8}{5}\right)}{8} \rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

Finalmente: $\therefore \frac{y^2}{x} = \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{64}{25}}{-\frac{1}{5}} = -\frac{64}{5}$

PROBLEMA 6 Resolver:

$$\begin{cases} x(y-2) - y(x-3) = -14 \quad \ldots\ldots(1) \\ y(x-6) - x(y+9) = 54 \quad \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Resolución:

* De la ecuación (1) despejamos "x":

$$xy - 2x - xy + 3y = -14$$

$$-2x + 3y = -14 \rightarrow x = \frac{3y+14}{2} \quad \ldots\ldots(3)$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

* De la ecuación (2) despejamos "x":

$$xy - 6y - xy - 9x = 54$$

$$-6y - 9x = 54$$

$$-2y - 3x = 18 \rightarrow x = -\frac{2y+18}{3} \quad \text{.....(4)}$$

De (3) y (4) conseguimos:

$$\frac{3y+14}{2} = -\frac{2y+18}{3}$$

$$9y + 42 = -4y - 36$$

$$13y = -78 \rightarrow y = -6 \quad \text{.....(5)}$$

* Reemplazando (5) en (3):

$$x = \frac{3(-6)+14}{2} \rightarrow x = -2$$

$$\therefore CS = \{(x; y)\} = \{(-2; -6)\}$$

PROBLEMA 7 Resolver:

$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 14 & \text{.....(1)} \\ \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

Resolución: Multiplicamos la ecuación (1) por 5:

$$\frac{20}{x} - \frac{15}{y} = 70 \quad \text{.....(3)}$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 3:

$$\frac{18}{x} + \frac{15}{y} = 6 \quad \text{.....(4)}$$

Sumando (3) y (4): $\frac{38}{x} = 76 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ .....(5)

Reemplazando (5) en (2):

$$\frac{6}{\frac{1}{2}} + \frac{5}{y} = 2 \rightarrow 12 + \frac{5}{y} = 2$$

$$\frac{5}{y} = -10 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore CS = \{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 8 Calcule x del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4 & .....(1) \\ 2x - 3y = 2 & .....(2) \end{cases}$$

Resolución: Para determimar el valor de "x" utilizaremos el método de igualación, para lo cual es necesario despejar de cada ecuación dada la incógnita y.

De (1): $3x + 5y = 4 \rightarrow 5y = 4 - 3x$

$$y = \frac{4 - 3x}{5} \quad .....(3)$$

De (2): $2x - 3y = 2 \rightarrow -3y = 2 - 2x$

$$y = -\frac{2 - 2x}{3} \quad .....(4)$$

(3) = (4): $\frac{4 - 3x}{5} = -\frac{2 - 2x}{3} \leftrightarrow 3 . (4 - 3x) = -5 . (2 - 2x)$

$12 - 9x = -10 + 10x \leftrightarrow -9x - 10x = -10 - 12$

$-19x = -22$

$\therefore \quad x = \frac{22}{19}$

PROBLEMA 9 La suma de dos números es igual a 18, si al triple del mayor se le resta el doble del menor se obtiene 14 ¿cuál es el producto de los números iniciales?

Resolución: Supongamos que: x es el número mayor; y el número menor

Del enunciado: $x + y = 18$ .....(1)

$3x - 2y = 14$ .....(2)

De (1) tenemos: $x = 18 - y$ .....(3)

Reemplazando (3) en (2):

$3(18 - y) - 2y = 14$

$54 - 3y - 2y = 14$

$54 - 5y = 14$

$-5y = -40 \rightarrow y = 8$

Finalmente en (3): $x = 18 - 8 \rightarrow x = 10$

$\therefore \quad x . y = 80$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 10 Resolver: $\begin{cases} \sqrt{2x+\sqrt{y-2}}=1 & .....(1) \\ \sqrt{3x-\sqrt{y-2}}=\frac{1}{2} & .....(2) \end{cases}$

Resolución:

* De la ecuación (1): $2x+\sqrt{y-2}=1$ .....(3)

* De la ecuación (2): $3x-\sqrt{y-2}=\frac{1}{4}$ .....(4)

* Sumando (3) y (4): $5x=\frac{5}{4} \rightarrow x=\frac{1}{4}$ .....(5)

* Reemplazando (5) en (3):

$$2\left(\frac{1}{4}\right)+\sqrt{y-2}=1$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{y-2}=1 \rightarrow \sqrt{y-2}=\frac{1}{2}$$

$$y-2=\frac{1}{4} \rightarrow y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore CS=\{(x;y)\}=\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)\right\}$$

PROBLEMA 11 Resolver: $\begin{cases} 2x+3y+z=1 & .....(1) \\ 6x-2y-z=-14 & .....(2) \\ 3x+y-z=1 & .....(3) \end{cases}$

Resolución:

* Sumando (1) y (2):

$$8x+y=-13 \quad .....(4)$$

* Sumando (1) y (3):

$$5x+4y=2 \quad .....(5)$$

* Multiplicando (4) por -4:

$$-32x-4y=52 \quad .....(6)$$

* Sumando (5) y (6):

$$-27x=54 \rightarrow x=-2 \quad .....(7)$$

* Reemplazando (7) en (4):

$$8(-2)+y=-13 \rightarrow y=3 \quad .....(8)$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

* Reemplazando (7) y (8) en (3):

$$3(-2)+3-z=1 \rightarrow z=-4$$

$$\therefore CS=\{(x;y;z)\}=\{(-2;3;-4)\}$$

PROBLEMA 12 Resolver: $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} & .....(I)\\ mx+ny+pz=3 & .....(II)\end{cases}$

Para luego indicar el valor de: y

Resolución: La presentación de las ecuaciones nos permite reconocer fácilmente que se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas. Ahora dadas las características de estas ecuaciones, procederemos a su resolución utilizando para ello un parámetro k, veamos:

De (I), tendremos que: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$

Despejando, tendremos: $x=ak \wedge y=bk \wedge z=ck$ .....(III)

Reemplazando (III) en (II) se consigue:

$$mak+nbk+pck=3$$

Factorizando k, tendremos: $(ma+nb+pc)\,k=3$

Despejando nos queda: $k=\frac{3}{ma+nb+pc}$

Finalmente reemplazando este resultado en (III):

$$\therefore \quad y=\frac{3b}{ma+nb+pc}$$

PROBLEMA 13 Despejar "x" del sistema:

$$\begin{cases}(a+b)x-(a-b)y=4ab & ..... (1)\\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2 & ..... (2)\end{cases}$$

Resolución: Teniendo en cuenta la regla de Cramer, "x" se obtiene de:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4ab & -(a-b)\\ 2a^2-2b^2 & (a+b)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(a+b) & -(a-b)\\ (a-b) & (a+b)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}4ab & -(a-b)\\ 2(a+b)(a-b) & (a+b)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(a+b) & -(a-b)\\ (a-b) & (a+b)\end{vmatrix}}$$

team CALAPENSHKO

$$x = \frac{(a+b)\cdot\begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2(a-b) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a+b) & -(a-b) \\ (a-b) & (a+b) \end{vmatrix}} = \frac{(a+b)\cdot(2a^2+2b^2)}{2(a^2+b^2)}$$

$$\therefore\ x = a + b$$

PROBLEMA 14 Calcular W del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=-2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y+z+w=8 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ z+w+x=7 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ w+x+y=2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

Resolución: Sumando miembro a miembro las ecuaciones dadas tenemos:

$$3x + 3y + 3z + 3w = 15$$

$$\underbrace{x+y+z}_{(1)} + w = 5$$

$$-2 + w = 5$$

$$\therefore\ w = 7$$

PROBLEMA 15 Determine el valor de "m" para el cual el sistema:

$$\begin{cases} (m+11)x+(m+16)y=31 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ (m+15)x+(m+19)y=91 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

es incompatible.

Resolución: Como el sistema lineal dado es incompatible, se cumple:

$$\frac{m+11}{m+15} = \frac{m+16}{m+19} \neq \frac{31}{91}$$

Aplicando propiedad de proporciones con las fracciones indicadas tenemos:

$$\frac{m+11}{m+15} = \frac{m+16-m-11}{m+19-m-15}$$

$$\frac{m+11}{m+15} = \frac{5}{4}$$

$$4m + 44 = 5m + 75$$

$$\therefore\ m = -31$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 16 ¿Para qué valores del parámetro "k" el sistema:

$$\begin{cases}(k+1)x+(k+3)y=k+12\\(k+17)x+30y=k+72\end{cases}$$

es indeterminado?

Resolución: El sistema dado es indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones si:

$$\frac{k+1}{k+17}=\frac{k+3}{30}=\frac{k+12}{k+72} \quad .....(\alpha)$$

Resolvamos: $\dfrac{k+1}{k+17}=\dfrac{k+3}{30}$

$$30(k+1)=(k+3)(k+17)$$
$$0=k^2-10k+21$$
$$0=(k-3)(k-7)$$
$$k=3 \vee k=7$$

En (α): $k=3: \dfrac{4}{20}=\dfrac{6}{30}=\dfrac{15}{75}$ .....(V)

$k=7: \dfrac{8}{24}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{19}{79}$ .....(F)

$\therefore$ El único valor de k que verifica la condición es 3

PROBLEMA 17 Determinar el valor de "k" para que en el sistema:

$$\begin{cases}3x+7y+2z=1 \quad ..... (1)\\2x+3y+7z=1 \quad ..... (2)\\kx+2y+3z=0 \quad ..... (3)\end{cases}$$

El valor de y sea igual al valor de z.

Resolución: Por condición y = z, luego se tendrá el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}3x+9y&=1 \quad ..... (1)\\2x+10y&=1 \quad ..... (2)\\kx+5y&=0 \quad ..... (3)\end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2) genera:

$$x=\frac{1}{12};\ y=\frac{1}{12}$$

Reemplazando en (3) tenemos:

$$\frac{k}{12}+\frac{5}{12}=0$$

$\therefore\ k=-5$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 18 Sean a, b, c $\in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b < c$ y $x_1 < x_2$. Siendo (x_1, y_1) y (x_2, y_2) soluciones del sistema de ecuaciones:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = cx^2 + bx + a$$

entonces podemos afirmar que: **ADMISIÓN UNI 2017 - I**

Resolución:

El sistema dado es: $y = ax^2 + bx + c$ .....(1)

$y = cx^2 + bx + a$ .....(2)

Efectuando (1) – (2): $(a-c)x^2 - (a-c) = 0$

$x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 1$

Por condición: $0 < a < b < c$

En (1) hacemos $x_1 = -1$: $y_1 = a - b + c = a + (c - b)$

De la condición: $c - b > 0$, con lo cual es evidente que $y_1 > 0$.

En (1) hacemos $x_2 = 1$: $y_2 = a + b + c$

De la condición: $a + b + c > 0$, con lo cual es evidente que $y_2 > 0$.

$\therefore \; x_1 < 0 \; ; \; x_2, y_1, y_2 > 0.$

PROBLEMA 19 Sean u, v, w números complejos no nulos que verifican

$$\begin{cases} uv + uw + vw = 1 \\ uv - uw - vw = -2 \\ uv + uw - vw = 0 \end{cases}$$

Halle: $u^2 + v^2 + w^2$ **ADMISIÓN UNMSM 2017 - II**

Resolución:

Datos: $uv + uw + vw = 1$ .....(1)

$uv - uw - vw = -2$ .....(2)

$uv + uw - vw = 0$ .....(3)

(1)+(2): $2uv = -1 \rightarrow uv = -\frac{1}{2}$ .....(4)

(1)–(3): $2vw = 1 \rightarrow vw = \frac{1}{2}$.....(5)

(3)–(2): $2uw = 2 \rightarrow uw = 1$.....(6)

(5)÷(6): $v = \frac{u}{2}$

En (4): $u.\frac{u}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow u^2 = -1 \rightarrow u = \pm i$

En (4): $v = \pm\frac{1}{2}i \rightarrow w = \pm i$

$\therefore \quad u^2 + v^2 + w^2 = -1 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$

PROBLEMA 20 ¿Para qué valor de "m" el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 & .....(1) \\ x - y + z = 0 & .....(2) \\ 3x + my + z = 0 & .....(3) \end{cases}$$

será indeterminado?

Resolución: De acuerdo con la teoría el sistema lineal homogéneo dado tendrá infinitas soluciones, si el determinante del sistema es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por la regla de Sarrus: $-2 + 3m - 15 - (-9 + 2m - 5) = 0$

$3m - 17 + 14 - 2m = 0$

$\therefore \quad m = 3$

PROBLEMA 21 ¿Para qué valor de "m" el sistema

$2x + 3y = 1$ .....(1)
$3x - y = m$ .....(2)
$4x + 7y = -1$ .....(3)

es compatible?

Resolución: En este caso particular debe verificarse:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & m \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante a partir de la primera fila tenemos:

$$2.\begin{vmatrix} -1 & m \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - (3).\begin{vmatrix} 3 & m \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (1).\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$2.(1 - 7m) - 3.(-3 - 4m) + (21 + 4) = 0$

$2 - 14m + 9 + 12m + 25 = 0$

$36 - 2m = 0$

$\therefore \quad m = 18$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 22 Un estudiante salió de vacaciones por "x" días y observó:

1° Que llovió 7 veces en la mañana o en la tarde

2° Cuando llovía en la tarde, estaba clara la mañana

3° Hubo 5 tardes claras y 6 mañanas claras.

¿Cuántos días estuvo de vacaciones el estudiante?

Resolución: De acuerdo con el enunciado podemos diseñar la siguiente tabla:

	mañana lluviosa	mañana no lluviosa
tarde lluviosa	a	b
tarde no lluviosa	c	d

Donde: $x = a + b + c + d$

Como no hubo mañana lluviosa y tarde lluviosa es evidente que $a = 0$

$$x = b + c + d$$

Por condición: $b + c = 7 \ \wedge \ c + d = 5 \ \wedge \ b + d = 6$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones:

$$2(b + c + d) = 18$$
$$2x = 18$$
$$x = 9$$

$\therefore$ El estudiante estuvo 9 días de vacaciones.

PROBLEMA 23 ¿Cuántas soluciones reales presenta el sistema adjunto?

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 272 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y = 6 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Resolución: Haciendo un cambio de variable conveniente:

$$x = m + n \ \wedge \ y = m - n$$

En (2) tenemos: $2m = 6 \Rightarrow m = 3$

En (1) tenemos: $(3 + n)^4 + (3 - n)^4 = 272$

Reduciendo tenemos: $n^4 + 54n^2 - 55 = 0$

$$(n^2 - 1)(n^2 + 55) = 0$$
$$n^2 = 1 \quad \text{ó} \quad n^2 = -55$$

Como se quiere solo valores reales se descarta $n^2 = -55$

$$n^2 = 1 \begin{cases} \nearrow n = 1 \\ \searrow n = -1 \end{cases}$$

$$x = m + n \Rightarrow x = 3 + 1 \text{ ó } x = 3 + (-1)$$
$$x = 4 \text{ ó } x = 2$$
$$y = m - n \Rightarrow y = 3 - 1 \text{ ó } y = 3 - (-1)$$
$$y = 2 \text{ ó } y = 4$$

Las soluciones reales son: (4; 2) y (2; 4)

$\therefore$ El sistema tiene 2 soluciones reales

PROBLEMA 24 Determine el valor de "m" para que el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2y = m & .....(1) \\ x - y = 2 & .....(2) \end{cases}$$

acepte solo una solución:

Resolución: Por condición el sistema tiene sólo una solución, lo cual involucra que esta es (x; y), donde x al igual que y asume un único valor.

De la ecuación (2): $x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$

En la ecuación (1): $x^2 + 2x + 2(x - 2) = m$

$$x^2 + 4x + (-4 - m) = 0$$

Como x asume un solo valor, en la ecuación cuadrática hallada se debera cumplir: $\Delta = 0$

$$(4)^2 - 4(1)(-4 - m) = 0$$
$$16 + 16 + 4m = 0$$
$$32 = -4m$$
$$\therefore \ m = -8$$

PROBLEMA 25 Calcular: x . y del sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8 & ..... (1) \\ x^2 - xy + 2y^2 = 7 & ..... (2 \end{cases}$$

Resolución: Observar que (1) y (2) forman un sistema homogéneo, luego es conveniente el siguiente cambio: x = ky

En (1) tenemos: $2k^2y^2 + ky^2 + y^2 = 8$

$$y^2(2k^2 + k + 1) = 8 \quad ..... (3)$$

En (2) tenemos: $k^2y^2 - ky^2 + 2y^2 = 7$

$$y^2(k^2 - k + 2) = 7 \quad ..... (4)$$

Dividiendo (3) ÷ (4): $\dfrac{2k^2 + k + 1}{k^2 - k + 2} = \dfrac{8}{7}$

$$14k^2 + 7k + 7 = 8k^2 - 8k + 16$$
$$6k^2 + 15k - 9 = 0$$

$$2k^2+5k-3=0$$

$$2k \times -1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

$$k \times 3 \Rightarrow k=-3$$

Si: $k=\frac{1}{2}$ entonces: $x=\frac{y}{2} \Rightarrow 2x=y$ ..... (5)

Reemplazando $k=\frac{1}{2}$ en (4) tenemos: $y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

En (5): $y=\pm 2$ $\nearrow$ $x=1 \wedge y=2$; $\searrow$ $x=-1 \wedge y=-2$

De donde tenemos: $x \cdot y=2$

Si: $k=-3$ entonces: $x=-3y$ ..... (6)

Reemplazando $k=-3$ en (4) tenemos: $y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

En (6): $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\nearrow$ $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2} \wedge y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\searrow$ $x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \wedge y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

De donde tenemos: $x \cdot y=-\frac{3}{2}$

$$\therefore\ x \cdot y=2 \ \text{ó}\ x \cdot y=-\frac{3}{2}$$

PROBLEMA 26 Calcular el valor de xyz, del sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \ldots\ldots(1) \\ 3x-4y+z=9 \ldots\ldots(2) \\ 5x+2y+3z=9 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

Resolución: Dada las características del sistema dado, aplicaremos la regla de Cramer, para ello hallaremos los determinantes:

$$A_s=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_s=-66 \qquad A_x=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 9 & -4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_x=-66$$

$$A_y=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_y=66 \qquad A_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow A_z=-132$$

Finalmente: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta_s} \Rightarrow x=1 \wedge y=\frac{\Delta_y}{\Delta_s} \Rightarrow y=-1 \wedge z=\frac{\Delta_z}{\Delta_s} \Rightarrow z=2$

El valor pedido es: $xyz=-2$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 27 Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+5\sqrt[3]{z}=39 \quad .....(1) \\ \sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=31 \quad .....(2) \\ 5\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=7 \quad .....(3) \end{cases};$$

Calcular el valor de: $xy + z$

Resolución:

Sumando todas las ecuaciones del sistema tenemos:

$$7\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)=77$$

Simplificando, se consigue establecer que:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=11 \qquad .....(4)$$

A continuación reacomodaremos cada ecuación del sistema con la finalidad de reemplazar en ellas la relación (4); observa:

Reacomodando la ecuación (I):

$$\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}_{11}+4\sqrt[3]{z}=39 \qquad .....(5)$$

Reemplazando (4) en (5), tendremos:

$$11+4\sqrt[3]{z}=39 \Rightarrow 4\sqrt[3]{z}=28$$

Simplificando y elevando al cubo:

$$z=7^3 \Rightarrow z=343$$

Reacomodando la ecuación (2):

$$\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}_{11}+4\sqrt[3]{y}=31 \qquad .....(6)$$

Reemplazando (4) en (6), tendremos:

$$11+4\sqrt[3]{y}=31 \Rightarrow 4\sqrt[3]{y}=20$$

Simplificando y elevando al cubo:

$$y=5^3 \Rightarrow y=125$$

Reacomodando la ecuación (3):

$$\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}_{11}+4\sqrt[3]{x}=7 \qquad .....(7)$$

Reemplazando (4) en (7), tendremos:

$$11+4\sqrt[3]{x}=7 \Rightarrow 4\sqrt[3]{x}=-4$$

Simplificando y elevando al cubo:

$$x=-1$$

Finalmente el valor pedido será:

$$xy+z=(-1)(125)+343$$

$$\therefore\ xy+z=218$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 28 Dado el sistema:

$$\begin{cases} x(x+2y+3z)=80 \quad .....(1) \\ 2y(x+2y+3z)=32 \quad .....(2) \\ 3z(x+2y+3z)=144 \quad .....(3) \end{cases}$$

Encontrar el valor positivo de z

Resolución: Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema y factorizando se consigue:

$$(x+2y+3z)[x+2y+3z]=80+32+144$$

Efectuando la multiplicación indicanda tendremos:

$$(x+2y+3z)^2=256$$

Extrayendo raíz cuadrada, se obtiene

$$x+2y+3z=16 \quad .....(4)$$

Finalmente reemplazando (4) en (3); obtendremos el valor de z:

$$3z(16)=144$$

De donde concluimos que:

$$48z=144$$

$$\therefore \quad z=3$$

PROBLEMA 29 Halle el valor de "x" en el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \quad .....(1) \\ ax+by+cz=0 \quad .....(2) \\ bcx+acy+abz=1 \quad .....(3) \end{cases}$$

Resolución: Para resolver este sistema aplicaremos el método de los determinantes conocido como "la regla de Cramer". Según este método se sabe que: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta_s}$ .....(4)

A continuación hallaremos los determinantes y estos se calcularán según Sarrus:

$$\Delta_s=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s=(a-b)(a-c)(c-b) \quad .....(5)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 1 & ac & ab \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x=(c-b) \quad .....(6)$$

Ahora reemplazamos (α) y (β) en (4):

$$x=\frac{c-b}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

Finalmente al simplificar, nos queda:

$$\therefore \quad x=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Calcular "a" y "b" si los sistemas:

$$\begin{cases} 3x + ay = 7 \\ 4x + by = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} ax + 3y = 8 \\ bx + 4y = 7 \end{cases}$$ son equivalentes.

Resolución: Debemos recordar que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

* Del primer sistema:

$$\begin{cases} 3x + ay = 7 \\ 4x + by = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7b - 2a}{3b - 4a} \; ; \; y = \frac{22}{4a - 3b} \quad \text{.....(1)}$$

* Del segundo sistema:

$$\begin{cases} ax + 3y = 8 \\ bx + 4y = 7 \end{cases} \rightarrow x = \frac{11}{4a - 3b} \; ; \; y = \frac{8b - 7a}{3b - 4a} \quad \text{.....(2)}$$

* De (1) y (2) con respecto a x tenemos:

$$\frac{7b - 2a}{3b - 4a} = \frac{11}{4a - 3b}$$

$$\frac{7b - 2a}{3b - 4a} = -\frac{11}{3b - 4a} \rightarrow 7b - 2a = -11$$

De donde: $b = \frac{2a - 11}{7}$ .....(3)

* De (1) y (2) con respecto a y tenemos:

$$\frac{22}{4a - 3b} = \frac{8b - 7a}{3b - 4a}$$

$$\frac{22}{4a - 3b} = -\frac{8b - 7a}{4a - 3b} \rightarrow 22 = -8b + 7a$$

De donde: $b = -\frac{22 - 7a}{8}$ .....(4)

* De (3) y (4): $\frac{2a - 11}{7} = \frac{7a - 22}{8}$

$$16a - 88 = 49a - 154$$

$$66 = 33a \rightarrow a = 2 \quad \text{.....(5)}$$

* Reemplazando (5) en (3):

$$b = \frac{2(2) - 11}{7} \rightarrow b = -1$$

Finalmente:

$$\therefore \; a = 2 \; \text{y} \; b = -1$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Qué valor debe tener "m" para que el sistema:

$$\begin{cases}(3-m)x+5y=4 & .....(1)\\ 2y-(2-m)x=6 & .....(2)\end{cases}$$

sea incompatible.

A) 2 B) 3 C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{16}{7}$ E) 0

2. Calcular el valor de "m" si el sistema:

$$\begin{cases}x+my=1 & ..... (1)\\ mx-3my=2m+3 & ..... (2)\end{cases}$$

No tiene solución:

A) 3 B) −3 C) 1

D) −1 E) 2

3. ¿Para qué valor de "k", el sistema:

$$\begin{cases}2x-5y=3 & .....(1)\\ kx+3y=7 & .....(2)\end{cases}$$

es incompatible?

A) $\frac{6}{5}$ B) $-\frac{6}{5}$ C) $\frac{5}{6}$

D) $-\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

4. El sistema lineal:

$$\begin{cases}x+y=a & .....(1)\\ a^2x+y=1 & .....(2)\end{cases}$$

es imposible si y sólo si:

a) $a\neq 1 \wedge a\neq -1$

B) $a\neq 1 \wedge a=-1$

C) $a=1$

D) $a\in\mathbb{R}$

E) $a=-1$

5. Calcular "C" en el sistema para que "x" exceda en 4 unidades a "y".

$$\begin{cases}7x-4y=C & ..... (1)\\ 3x+2y=C & ..... (2)\end{cases}$$

A) 40 B) 52 C) 30

D) 32 E) 20

6. Calcular "m", para que el valor de "x" exceda al de "y" en 3 unidades, en el sistema adjunto:

$$\begin{cases}3x-5y=m & .....(1)\\ 2x+3y=3m+1 & .....(2)\end{cases}$$

A) 11 B) 2 C) 7

D) 9 E) 5

7. Dado el sistema:

$$\begin{cases}x+2y=-3 & .....(1)\\ x-2z=7 & .....(2)\\ z+2x=11 & .....(3)\end{cases}$$

Calcular:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}$$

A) 0 B) 15 C) 12

D) $\frac{15}{12}$ E) $\frac{12}{15}$

9. Resolver y dar el valor a "y"

$$\begin{cases}\frac{x}{4a}-\frac{y}{9b}=\frac{1}{6} & .....(1)\\ \frac{x}{6a}+\frac{y}{5b}=\frac{14}{15} & .....(2)\end{cases}$$

A) 2a B) 3a C) 3b

D) 2b E) 6a

team CALAPENSHKO

9. Resolver y dar el valor de "y"

$$\begin{cases}(a+b)x+(a-b)y=2ab & \ldots\ldots (1)\\ (a+c)x+(a-c)y=2ac & \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

A) a B) −a C) b
D) −b E) c

10. Resolver:

$$\begin{cases}(x-y)^{-1}+(x+y)^{-1}=3/16 & \ldots\ldots (1)\\ (x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}=1/16 & \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

Indicar el valor de "x"

A) 3 B) 12 C) −12
D) −3 E) 5

11. ¿Cuál es el menor valor de "x", que satisface al siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 & \ldots\ldots (1)\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy & \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

12 Calcular "m" si el sistema es indeterminado:

$$\begin{cases}(m-1)x+(m+1)y=2(m^2-1) & \ldots\ldots (1)\\ (m^2-1)x+(m^2+1)y=2(m^3-1) & \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

A) 2 B) −2 C) 1
D) −1 E) 3

13. Resolver el sistema y dar el valor de "x":

$$\begin{cases}5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19 & \ldots\ldots (1)\\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y} & \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

A) 2 B) 4 C) 1
D) −1 E) −4

14. Tres obreros trabajando juntos pueden concluir una obra en 10 días; Si trabajan sólo los dos primeros la acabarán en 15 días, pero si laboran los 2 últimos culminan en 20 días. ¿Qué tiempo tardan el 1ro y el 3ro juntos?

A) 12 días B) 14 días C) 10 días
D) 13 días E) 16 días

15. Resolver y dar el valor d e "z"

$$\begin{cases}ax+y+z=1 & \ldots\ldots (1)\\ x+ay+z=a & \ldots\ldots (2)\\ x+y+az=a^2 & \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

A) $\frac{a+1}{a+2}$ B) $\frac{(a-1)^2}{a+2}$ C) $(a+1)^2$
D) $-(a+2)$ E) $\frac{(a+1)^2}{a+2}$

16. Calcular el valor de "z" después de resolver:

$$\begin{cases}(x+y)-(a+b)=(a+b)(x-a)(y-b)\ldots\ldots (1)\\ (x+z)-(a+c)=(a+c)(x-a)(z-c)\ldots\ldots (2)\\ (z+y)-(b+c)=(b+c)(z-c)(y-b)\ldots\ldots (3)\end{cases}$$

A) $b+\frac{1}{a}$ B) $b+\frac{1}{b}$ C) $c+\frac{1}{c}$
D) $a+\frac{1}{b}$ E) $b+\frac{1}{c}$

17. Resolver y dar e l valor de: "x"

$$\begin{cases}a^3x+a^2y+az+1=0 & \ldots\ldots (1)\\ b^3x+b^2y+bz+1=0 & \ldots\ldots (2)\\ c^3x+c^2y+cz+1=0 & \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

A) abc B) −abc C) $\frac{1}{abc}$
D) $-\frac{1}{abc}$ E) a

team CALAPENSHKO

18. Calcular "x" al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 & ....(1) \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 & ....(2) \\ bcx+acy+abz=1 & ....(3) \end{cases}$$

A) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$

B) $\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

C) $\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}$

D) $\dfrac{3}{(a-b)(a-c)}$

E) $\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}$

19. Resolver y dar el valor de "y"

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4 & ..... (1) \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2 & ..... (2) \end{cases}$$

A) −4 B) 6 C) 4
D) −6 E) 8

20. Resolver:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 & .....(1) \\ x+xy+y=2 & .....(2) \end{cases}$$

Indicar el valor de "x"

A) 2 B) 2 C) 4
D) −4 E) 6

21. De la siguiente condición:

$$2x^2+5y^2-6xy-6x+8y+5=0$$

Calcular:

$$N=\frac{x+y}{x-y}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

22. Resolver y dar el valor de "z"

$$\begin{cases} \dfrac{ax-ay}{a-b}+\dfrac{z}{c}=1+a & ..... (1) \\ \dfrac{by-bz}{b-c}+\dfrac{x}{a}=1+b & ..... (2) \\ \dfrac{cx-cz}{a-c}+\dfrac{y}{b}=1+c & ..... (3) \end{cases}$$

A) a B) b C) c
D) 1 E) a + b

23. Calcular el número de soluciones que presenta el sistema.

$$\begin{cases} 2x^3-4xy^2-y^3=7 & ..... (1) \\ 5x^2+xy+y^2=2 & ..... (2) \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

24. Resolver y dar el valor de "y"

$$\begin{cases} 4\sqrt{x}-\sqrt[4]{8-y}=16 & ..... (1) \\ y+(\sqrt{x+1})^4=8 & ..... (2) \end{cases}$$

A) 3 B) 9 C) 13
D) 248 E) −248

25. Resolver el sistema y dar el valor de "z"

$$\begin{cases} x+y+z=14 & ..... (1) \\ y^2+z^2-x^2=46 & ..... (2) \\ yz=9 & ..... (3) \end{cases}$$

A) 4 B) 9 C) 1
D) 2 E) 3

26. Resolver el sistema y dar un valor de "x"

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+12y}+\sqrt{y^2+12x}=33 & ..... (1) \\ x+y=23 & ..... (2) \end{cases}$$

A) 8 B) 10 C) 4
D) 7 E) 6

team CALAPENSHKO

27. Resolver e indicar el valor de "z"

$$\begin{cases} x^2 - yz = -5 & \ldots\ldots (1) \\ y^2 - zx = 7 & \ldots\ldots (2) \\ z^2 - xy = 1 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

A) 2 B) −2 C) 3
D) −3 E) 1

28. Resolver y dar un valor de "y":

$$\begin{cases} x^2y + xy + x = 27 & \ldots\ldots (1) \\ xy^2 + xy + y = 5 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) 6 B) −6 C) 3
D) −3 E) $\frac{1}{2}$

29. Resolver el sistema y calcular "x":

$$\begin{cases} 2x + y = 2z & \ldots\ldots (1) \\ 9z - 7x = 6y & \ldots\ldots (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 216 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 2i

30. Calcular "x" al resolver el sistema:

$$\begin{cases} xy + ab = 2ax & \ldots\ldots (1) \\ x^2y^2 + a^2b^2 = ab^2y^2 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) a B) $\frac{b}{2a}$ C) $\frac{2a}{b}$
D) $\frac{1}{a}$ E) b

31. Resolver el sistema y calcular "x":

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 20 & \ldots\ldots (1) \\ \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 65 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) 25 B) 16 C) 64
D) 4 E) 9

32. Resolver el sistema y calcular "x"

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 & \ldots\ldots (1) \\ x - y = 2 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) 25 B) −1 C) −2
D) 5 E) 6

33. Calcular "y" después de resolver el sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & \ldots\ldots (1) \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 & \ldots\ldots (2) \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

A) $\frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)}$
B) $\frac{d(d-a)(a-b)}{c(c-a)(c-b)}$
C) $\frac{d(d-a)(d-c)}{b(b-a)(b-c)}$
D) $\frac{d(d-a)(d-b)}{a(c-a)(a-c)}$
E) $\frac{d(d-a)(d-b)}{b(c-a)(c-b)}$

34. Resolver el sistema y dar un valor de "x"

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{(x+2)(y+3)} = 34 & \ldots\ldots (1) \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 + (x+2)(y+3) = 741 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) −1 B) −3 C) 3
D) 4 E) 2

team CALAPENSHKO

35. Hace dos años tenía 6 veces tu edad. Dentro de 5 años tendré veinticinco veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás dentro de 11 años. ¿Qué edad tengo?

A) 20 años B) 17 años C) 30 años
D) 18 años E) 19 años

36. Un galgo persigue a una liebre que le lleva 77 saltos, se sabe que 12 saltos del galgo equivalen a 17 de la liebre, y que en el tiempo en que el galgo da un número de saltos igual a los que ha dado la liebre desde que el galgo comenzó la persecución, la liebre había dado 216 saltos más. Se pide el número de saltos que da la liebre hasta que es alcanzada por el galgo.

A) 600 B) 500 C) 658
D) 558 E) 588

37. Marlene le dijo a Ely: "yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes pero cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será de 63 años. ¿Cuántos años tiene Marlene?

A) 21 B) 14 C) 32
D) 28 E) 24

38. En el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy + yz = 2 & .....(1) \\ xy + y^2 + xz = 50 & .....(2) \\ yz + xz + z^2 = 12 & .....(3) \end{cases}$$

Calcular la suma de las componentes de su solución.

A) 64 B) 8 C) 56
D) 40 E) 50

39. A un alambre de 91 metros de longitud se le da tres cortes, de manera que la longitud de cada trozo es igual a la del inmediato anterior, aumentado en su mitad.
¿Cuál es la longitud del trozo más grande?

A) 43,10 B) 25,20 C) 37,80
D) 38,00 E) 40,30

40. Calcular: $E = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$

Después de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \\ z = ax + by \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) –1 E) –3

41. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 12 y el cociente de su división por su cifra de unidades es 21. ¿Cuánto vale la cifra de las decenas?

A) 7 B) 9 C) 8
D) 6 E) 5

42. Un restaurante tiene m mesas de 4 sillas, n mesas de 6 sillas y p mesas de 8 sillas. El día de la inauguración se llenaron todas las mesas con 152 comensales, al día siguiente se usaron $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{p}{2}$ mesas y el tercer día se usaron $\frac{m}{4} + \frac{n}{2} + \frac{p}{6}$ mesas. ¿Cuántas me-
¿Cuántas mesas tiene el restaurante si se sabe que el segundo y tercer día usaron 11 y 9 mesas, respectivamente, y no agregaron ninguna mesa desde la inauguración?

ADMISIÓN UNMSM 2017 - II

A) 26 B) 24 C) 28
D) 32 E) 30

43. En un parque, unas palomas vuelan sobre unos árboles: Si en cada árbol se posa una paloma, quedan "n" palomas volando; en cambio, si en cada árbol se posan "n" palomas quedan "n" árboles libres. ¿Cuántas palomas hay en el parque?

A) 7 B) 8
C) 9
D) 10 E) Hay 2 correctas

44. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2x-y}} - \dfrac{1}{3\sqrt{2x+y}} = \dfrac{1}{24} & .....(1) \\ 15\sqrt{2x+y} + 4\sqrt{2x-y} = 3\sqrt{4x^2-y^2} & ....(2) \end{cases}$$

Indicar: $x^2 + xy + yz$

A) 2 412 B) 1 532 C) 3 254
D) 6 341 E) 1 171

45. Luego de resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{(x-y)^3}}{x-y} - \dfrac{\sqrt[4]{(x+y)^3}}{x+y} = -\dfrac{2}{15} & .....(1) \\ \dfrac{\sqrt[4]{(x-y)^3}}{4(x-y)} + \dfrac{\sqrt[4]{(x+y)^3}}{4(x+y)} = \dfrac{2}{15} & .....(2) \end{cases}$$

Indicar: $x + 8$

A) 240 B) 315 C) 132
D) 361 E) 24

46. Determine "x" del sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+12y} + \sqrt{y^2+12x} = 33 & .....(1) \\ x + y = 23 & .....(2) \end{cases}$$

A) 10 B) 11
C) 12
D) 13 E) Hay 2 correctas

47. Encontrar el intervalo de "m" para que el sistema:

$$2x - 5y = 1; mx + 10y = 4$$

Se satisfaga $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+$

A) $m > -4$ B) $m < -4$
C) $-4 < m < 8$
D) $m > 8$ E) $m < 8$

48. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & .....(1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 27 & .....(2) \\ xy + xz + yz = 27 & .....(3) \end{cases}$$

Luego, calcular $(2x^2 - y)$

A) 4 B) 7 C) 9
D) 3 E) 10

49. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema:

$$\frac{x}{y^2-3} = \frac{y}{x^2-3} = \frac{-7}{x^3+y^3}?$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

50. Uno de los valores que asume x en el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{40}{3} & .....(1) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} + xy = \dfrac{33}{10} & ..... (2) \end{cases}$$

es:

A) 1 B) 2 C) 8
D) 4 E) 6

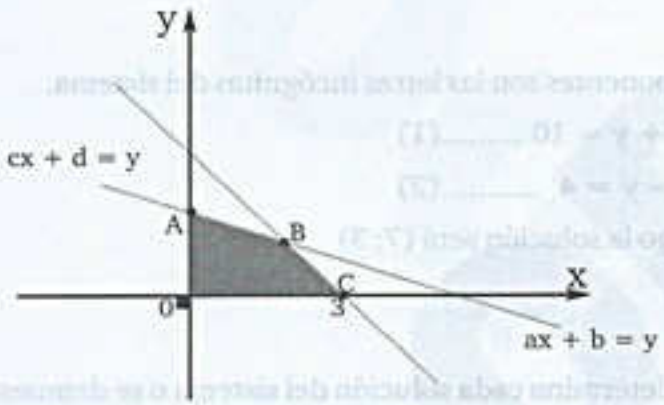
team CALAPENSHKO

Capítulo 25

Introducción a la Programación Lineal

CAPACIDADES:

- Reconocer sistemas lineales en $\mathbb{R}^2$
- Determinar regiones factibles en conjuntos convexos.
- Identificar y determinar valores óptimos.



LEONARD EULER

LEONHARD EULER (1 707 – 1 793), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Euler nació en Basilea y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En 1 727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1 730 y de matemáticas en 1 733. En 1 741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1 766, donde permaneció hasta su muerte. aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

En su *Introducción al análisis de los infinitos* (1 748), Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica. En esta obra trató el desarrollo de series de funciones y formuló la regla por la que sólo las series convergentes infinitas pueden ser evaluadas adecuadamente.

team CALAPENSHKO

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

1. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

1.A. DEFINICIÓN

Es un conjunto de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se verifican simultánea mente para ciertos valores asignados a sus letras incógnitas.

Algunos ejemplos son:

$$\begin{cases} x + y = 10 \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 4 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 7 \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 2y = 21 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

1.B. SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Es cada par ordenado, cuyas componentes son las letras incógnitas del sistema.

Para el sistema $\begin{cases} x + y = 10 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 4 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

Observamos que $x = 7, y = 3$; luego la solución será $(7; 3)$

1.C. RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

Es el proceso mediante el cual se determina cada solución del sistema o se demuestra que esta no existe.

1.D. PRINCIPALES MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1RO. MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consiste en despejar de cada una de las ecuaciones la misma letra incógnita para luego igualarlas y de este modo obtener una ecuación en función de una sola incógnita, la cual será fácil de calcular.

Ejemplo: Calcular x en el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - y = 7 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Resolución: De (1) despejamos y : $3x + 2y = 12 \Leftrightarrow 2y = 12 - 3x$

$$y = \frac{12 - 3x}{2}$$

De (2) despejamos y : $2x - y = 7 \Leftrightarrow -y = 7 - 2x$

$$y = -7 + 2x$$

team CALAPENSHKO

Ahora igualando tenemos : $\frac{12-3x}{2} = -7+2x$

$$12-3x = -14+4x \Leftrightarrow -7x = -26$$

$$\therefore\ x = \frac{26}{7}$$

2DO. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar, de una de las ecuaciones dadas, cierta incógnita para reemplazarla en la otra ecuación y de este modo obtener una nueva ecuación con una sola incógnita, la cuál será fácil de calcular.

Ejemplo: Calcular y del sistema

$$\begin{cases} 5x+3y=10 \ .....(1) \\ 2x-5y=9 \ .....(2) \end{cases}$$

Resolución: De (1) despejamos x : $5x+3y=10 \Leftrightarrow 5x=10-3y$

$$x = \frac{10-3y}{5}$$

Reemplazando en (2) : $2\left(\frac{10-3y}{5}\right)-5y=9 \Leftrightarrow \frac{20-6y}{5} = 9+5y$

$$20-6y = 45+25y \Leftrightarrow -31y = 25$$

$$\therefore\ y = -\frac{25}{31}$$

3RO. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Consiste en sumar o restar las ecuaciones dadas con la finalidad de eliminar a una de sus letras incógnitas, a veces antes de efectuar la operación entre las ecuaciones es necesario transformar al menos una de ellas.

Ejemplo: Resolver

$$\begin{cases} x+y=6 \ .....(1) \\ x-y=2 \ .....(2) \end{cases}$$

Resolución: Sumando (1) y (2) : $2x = 8 \Rightarrow x = 4$

Restando (1) y (2): $2y = 4 \Rightarrow y = 2$

Ahora tenemos : solución = $(x;y) = (4;2)$

$\therefore\ CS = \{(4;2)\}$

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Resolver:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \ \ldots\ldots(1) \\ 2x - \ y = 3 \ \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Resolución: Eliminando y:

$$\left.\begin{array}{l} \text{La (1) igual: } 3x + 2y = 5 \\ \text{La (2) por 2: } 4x - 2y = 6 \end{array}\right\} \text{sumando: } 7x = 11$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Eliminando x:

$$\left.\begin{array}{l} \text{La (1) por 2: } 6x + 4y = 10 \\ \text{La (2) por } -3\text{: } -6x + 3y = -9 \end{array}\right\} \text{sumando: } 7y = 1$$

$$y = \frac{1}{7}$$

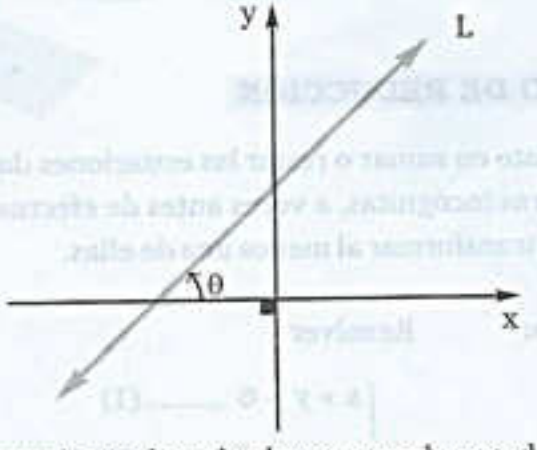
Finalmente tenemos: $\therefore CS = \left\{\left(\frac{11}{7}; \frac{1}{7}\right)\right\}$

2. RESOLUCIÓN GRÁFICA DEL SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

2.A. ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

$$\boxed{L: AX + BY + C = 0}$$

Donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ | A o B es distinto de cero.



La recta L es el lugar geométrico de todos los puntos de coordenadas (x; y) que verifican la ecuación $AX + BY + C = 0$

θ = Dirección de la recta L; m = Pendiente de la recta L

OBSERVACIÓN

La dirección y la pendiente se relacionan de la manera siguiente:

$$m = \tan(\theta) = -\frac{A}{B}$$

team CALAPENSHKO

2.B. TEOREMA

Sean: $L_1: A_1X + B_1Y + C_1 = 0$

$L_2: A_2X + B_2Y + C_2 = 0$

el sistema:

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (L_1) \\ A_2X + B_2Y + C_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (L_2) \end{cases}$$

Tiene solución siempre que las rectas L_1 y L_2 se intersequen, de no ser así se afirma que el sistema no tiene solución.

2.C. PROPIEDADES

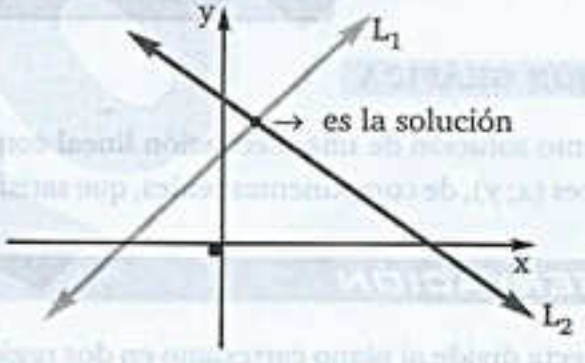
Dado el sistema:
$$\begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (L_1) \\ A_2X + B_2Y + C_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (L_2) \end{cases}$$

Se cumple que:

PRIMERO: El sistema es consistente determinado, es decir tiene solución única si verifica:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

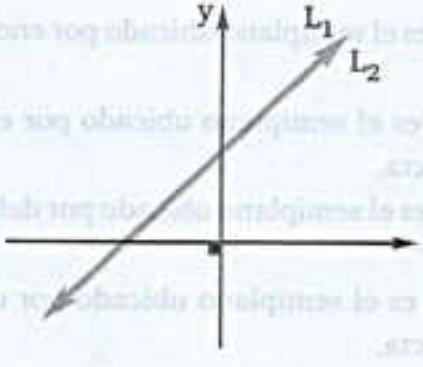
Gráficamente representa dos rectas secantes:



SEGUNDO: El sistema es consistente indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones si verifica:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Gráficamente representa dos rectas coincidentes:

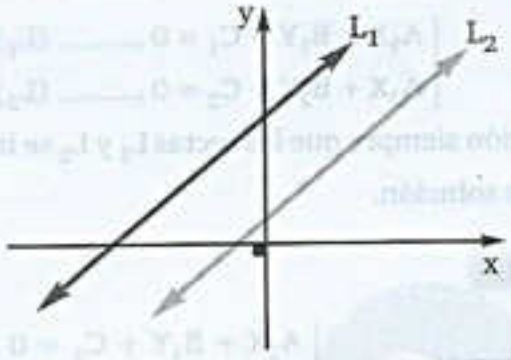


team CALAPENSHKO

TERCERO: El sistema es inconsistente, es decir no tiene solución, si verifica:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Gráficamente representa dos rectas coincidentes:



3. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

3.A. DEFINICIÓN

Son desigualdades que presentan dos letras incógnitas y asumen cualquiera de las siguientes formas:

$$ax + by > c \;;\; ax + by < c$$
$$ax + by \geq c \;;\; ax + by \leq c$$

3.B. RESOLUCIÓN GRÁFICA

El conjunto solución de una inecuación lineal con dos incógnitas está determinado por todos los pares (x; y), de componentes reales, que satisfacen la desigualdad propuesta.

OBSERVACIÓN

Toda recta divide al plano cartesiano en dos regiones, una a cada lado de la recta, y cada una de estas regiones recibe el nombre de semiplano.

3.C. REGLAS PRÁCTICAS PARA SOMBREAR SEMIPLANOS

Sea $y = f(x)$ una ecuación lineal; asimismo $y > f(x)$, $y \geq f(x)$, $y < f(x)$, $y \leq f(x)$ inecuaciones lineales.

PRIMERA: $y > f(x)$ es el semiplano ubicado por encima de la recta $y = f(x)$ sin incluir dicha recta.

SEGUNDA: $y \geq f(x)$ es el semiplano ubicado por encima de la recta $y = f(x)$ incluyendo dicha recta.

TERCERA: $y < f(x)$ es el semiplano ubicado por debajo de la recta $y = f(x)$ sin incluir dicha recta.

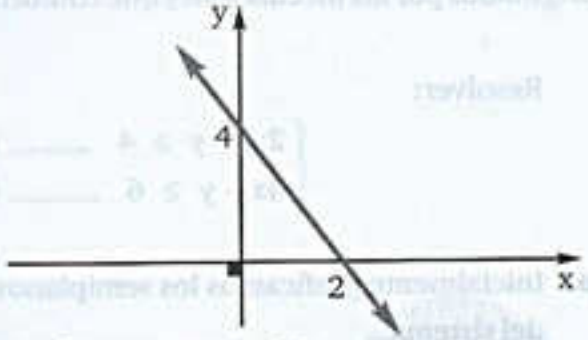
CUARTA: $y \leq f(x)$ es el semiplano ubicado por debajo de la recta $y = f(x)$ incluyendo dicha recta.

team CALAPENSHKO

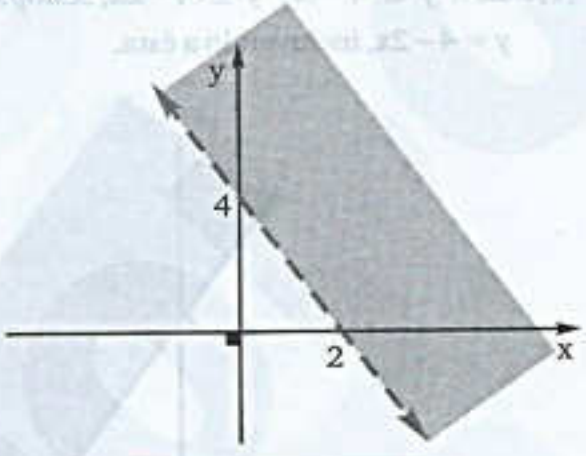
Ejemplo: Resolver: $2x + y > 4$

Resolución: La inecuación propuesta es $y > 4 - 2x$

Graficando la recta $y = 4 - 2x$.



Finalmente graficamos $y > 4 - 2x$.



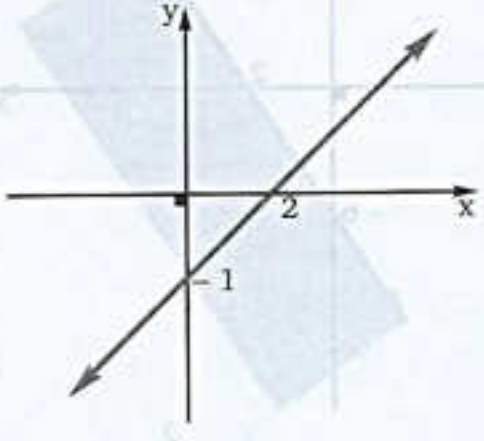
Ejemplo: Resolver: $x - 2y \geq 2$

Resolución: La inecuación dada es: $x - 2y \geq 2 \Leftrightarrow -x + 2y \leq -2$

$$2y \leq x - 2 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2}x - 1$$

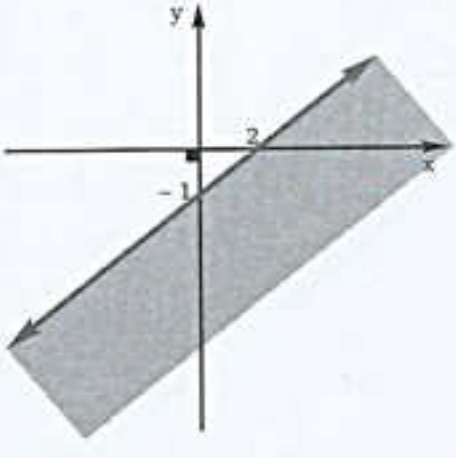
Graficando la recta:

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$



Finalmente graficamos:

$$y \leq \frac{1}{2}x - 1$$



team CALAPENSHKO

3.D. SOLUCIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES

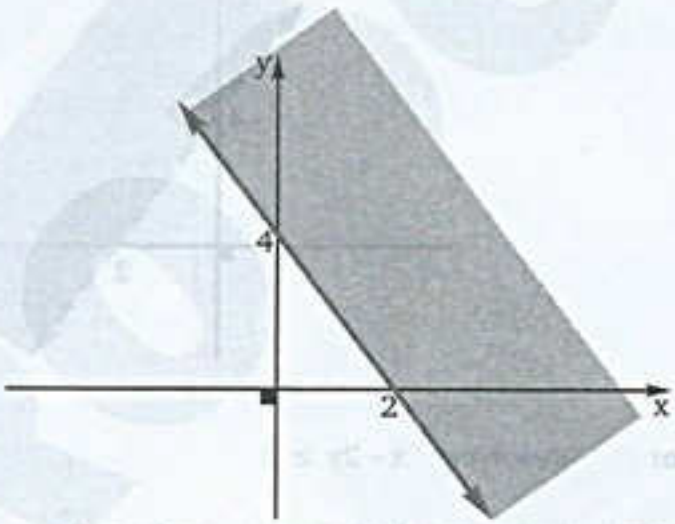
Dado un sistema de inecuaciones lineales conformado por dos o más inecuaciones, la solución gráfica de dicho sistema es la región que se determina al interceptar todos los semiplanos originados por las inecuaciones que conforman el sistema.

Ejemplo: Resolver:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x - y \geq 6 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

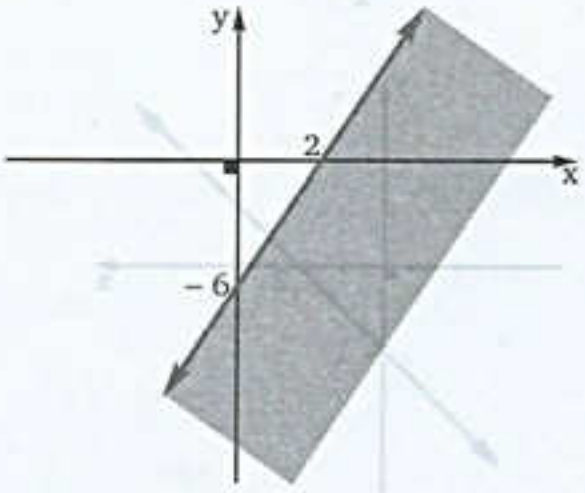
Resolución: Inicialmente graficamos los semiplanos que corresponden a cada inecuación del sistema.

(1): $2x + y \geq 4 \Leftrightarrow y \geq 4 - 2x$; semiplano ubicado por encima de la recta $y = 4 - 2x$, incluyendo a ésta.



(2): $3x - y \geq 6 \Leftrightarrow -3x + y \leq -6$

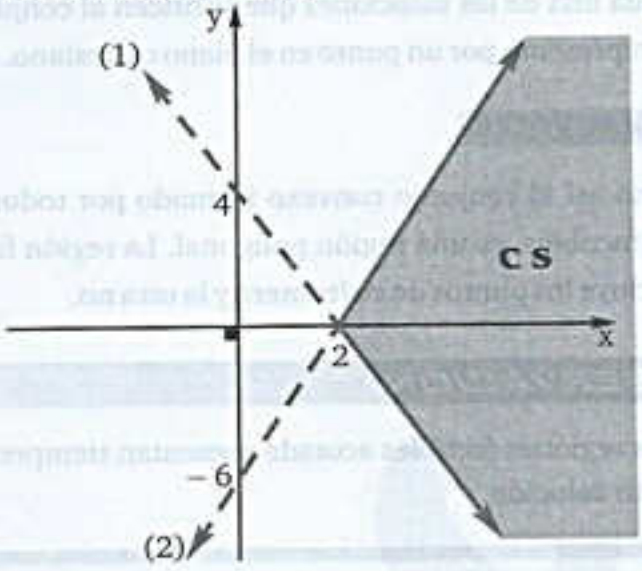
$y \leq 3x - 6$; semiplano ubicado por debajo de la recta $y = 3x - 6$, incluyendo a ésta.



twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO

Finalmente el conjunto solución del sistema viene dado por la intersección de los semiplanos hallados, veamos:



OBSERVACIÓN

De acuerdo con el teorema citado en el item 2B podemos asegurar que (2; 0) es la solución del sistema de ecuaciones conformado por las rectas (1) y (2).

4. PROGRAMACIÓN LINEAL

4.A. CONCEPTO

Es un modelo matemático mediante el cual se resuelve un problema determinado, formulado por ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

La programación lineal consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, que llamaremos función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

5. DEFINICIONES BÁSICAS

5.A. FUNCIÓN OBJETIVO

Es una función lineal en dos variables que debemos maximizar o minimizar, la función objetivo presenta la siguiente forma:

$$F(x; y) = ax + by + c$$

Donde a, b y c son constantes; x, y se llaman variables de decisión.

5.B. CONJUNTO DE RESTRICCIONES

Es el sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas que expresan un conjunto de limitaciones que presenta el problema propuesto. Aquí también se consideran a las variables de decisión como variables no negativas, es decir $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

team CALAPENSHKO

5.C. SOLUCIONES FACTIBLES

Son cada una de las soluciones que verifican al conjunto de restricciones, cada solución factible se representa por un punto en el plano cartesiano.

5.D. REGIÓN FACTIBLE

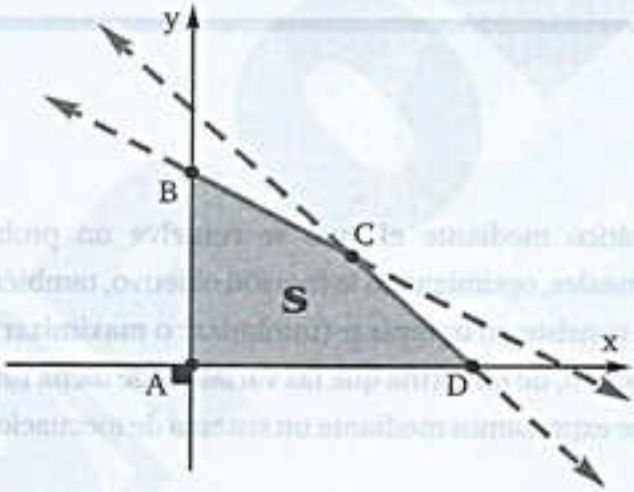
Se llama así al conjunto convexo formado por todos los puntos que representan a las soluciones factibles, es una región poligonal. La región factible puede, o no, ser acotada, la primera incluye los puntos de su frontera y la otra no.

OBSERVACIÓN

Sólo las regiones factibles acotada presentan siempre solución, en las otras puede o no existir solución.

5.E. SOLUCIÓN ÓPTIMA

Es el punto cuyas coordenadas hacen de la función objetivo un valor máximo o mínimo. La solución óptima, en caso de existir, se alcanza en un vértice de la región factible.



S = Región Factible

A, B, C y D son posibles puntos de optimización.

6. MÉTODO ANALÍTICO O MÉTODO DE LOS VÉRTICES

6.A. DESCRIPCIÓN

Se determina la región factible calculando las coordenadas de todos sus vértices, luego cada punto que corresponde a un vértice se reemplaza en la función objetivo esperando obtener con alguno de ellos un valor máximo o mínimo según corresponda a la optimización.

6.B. TEOREMA

Si la función objetivo asume el mismo valor óptimo en dos vértices consecutivos de una frontera de la región factible, también asume el mismo valor en los puntos del segmento limitado por dichos vértices.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Dadas las rectas:

L_1: $2x + 3y + 7 = 0$

L_2: $x - 4y - 5 = 0$

L_3: $3x + y - 10 = 0$

Determine el punto de intersección entre:

I. $L_1 \cap L_2$ .....

II. $L_1 \cap L_3$ .....

III. $L_2 \cap L_3$ .....

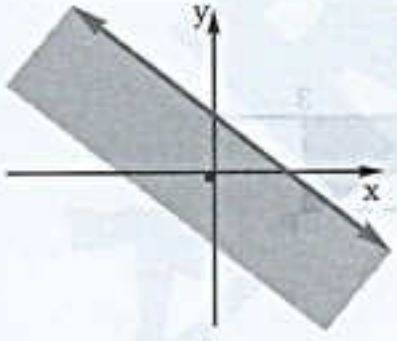
2. Dadas las inecuaciones:

I. $y < 3x + 4$

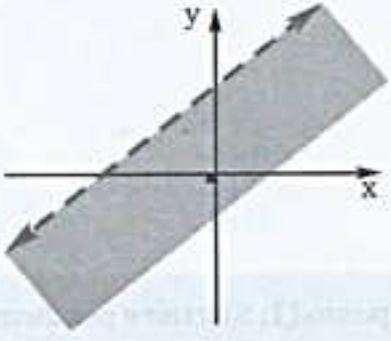
II. $y \leq -2x + 6$

III. $y \geq 2x$

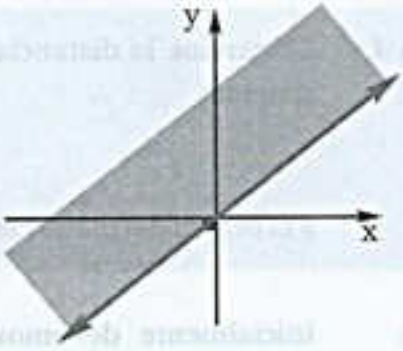
Escribe en cada recuadro la etiqueta que corresponde a la región sombreada



□



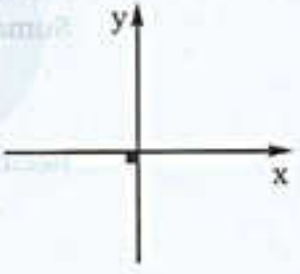
□



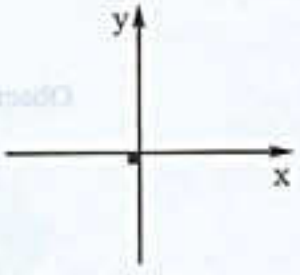
□

3. Resolver graficamente el sistema:

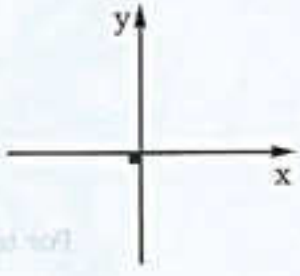
I. $\begin{cases} 2x + 1 \leq y \\ x + y \leq 4 \end{cases}$



II. $\begin{cases} x > y \\ x > 2y - 1 \end{cases}$



III. $\begin{cases} y \geq x \\ y < 4 \end{cases}$



4. Maximizar la función $F(x; y) = 2x + 8y$ sometida a las siguientes restricciones.

$$\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Determine la distancia entre el punto cuyas coordenadas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x - 4y = 15 \ \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

y el origen del plano cartesiano.

Resolución: Inicialmente debemos resolver el sistema y así determinar el punto cuyas coordenadas son (x; y).

La (1) por 2: $10x + 4y = 24$

La (2) igual: $3x - 4y = 15$

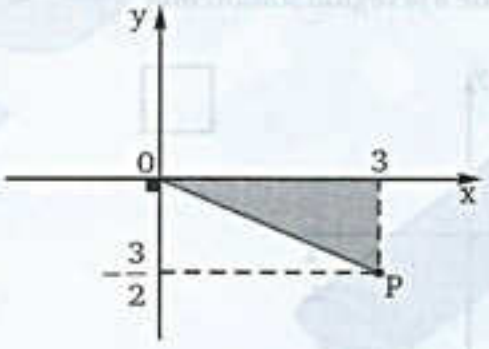
Sumando las nuevas ecuaciones:

$$13x = 39$$
$$x = 3$$

Reemplazando $x = 3$ en (1):

$$15 + 2y = 12$$
$$2y = -3$$
$$y = -\frac{3}{2}$$

Observa que $\left(3; -\frac{3}{2}\right)$ es la solución del sistema, luego en el plano cartesiano se tendrá



Por teorema de Pitágoras:

$$(OP)^2 = (3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(OP)^2 = \frac{45}{4} = \frac{9}{4}.5$$

$$\therefore\ OP = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

PROBLEMA 2 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 5) y tiene pendiente igual a dos.

team CALAPENSHKO

Resolución: Recordemos que si m es la pendiente de la recta L y $(x_0; y_0)$ es un punto de paso de la recta, podemos plantear que:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Ahora según los datos:

$$2 = \frac{y-5}{x-1} \Leftrightarrow 2x - 2 = y - 5$$

$$2x - 2 - y + 5 = 0$$

Finalmente tenemos la ecuación L: $2x - y + 3 = 0$

PROBLEMA 3 Si L_1 pasa por el punto (2; 1) y tiene pendiente 4, L_2 pasa por el punto (– 2; 3) y tiene pendiente – 3. ¿En qué punto se intersecan L_1 y L_2?

Resolución: Teniendo en cuenta la resolución del problema anterior procedemos a encontrar las ecuaciones de L_1 y L_2.

Para L_1 : $4 = \frac{y-1}{x-2} \Leftrightarrow 4x - 8 = y - 1$

$$4x - y = 7 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Para L_2 : $-3 = \frac{y-3}{x+2} \Leftrightarrow -3x - 6 = y - 3$

$$-3x - y = 3 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Para determinar el punto de intersección entre L_1 y L_2 es necesario resolver el sistema formado por sus ecuaciones, vemos:

$$\begin{cases} 4x - y = 7 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ -3x - y = 3 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Efectuando (1) – (2) tenemos:

$$7x = 4$$

$$x = \frac{4}{7}$$

Reemplazando en la ecuación (1):

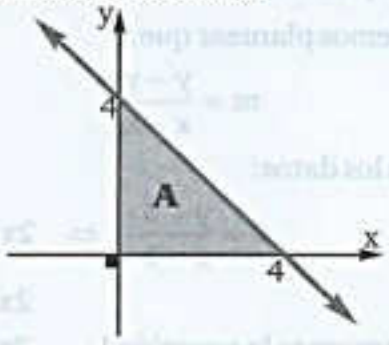
$$y = -\frac{33}{7}$$

$$\therefore \text{ Punto de intersección} = (x; y) = \left(\frac{4}{7}; -\frac{33}{7}\right)$$

PROBLEMA 4 Determine el área de la región triangular que se genera en el primer cuadrante del plano cartesiano cuando se gráfica la recta $x + y = 4$.

team CALAPENSHKO

Resolución: De acuerdo con el enunciado tenemos:



Finalmente tenemos: $A = \frac{4.4}{2} = \frac{16}{2}$

$$\therefore A = 8u^2$$

PROBLEMA 5 Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3; -1)$ y $(2; -6)$

Resolución: Hallamos la pendiente de la recta, según la relación vista en el ejercicio (3).

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-1-(-6)}{-3-(2)} = \frac{-1+6}{-3-2} = \frac{5}{-5}$$

$$m = -1$$

Nuevamente planteamos:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Considerando el punto $(2; -6)$

$$-1 = \frac{y+6}{x-2}$$

$$-x + 2 = y + 6$$

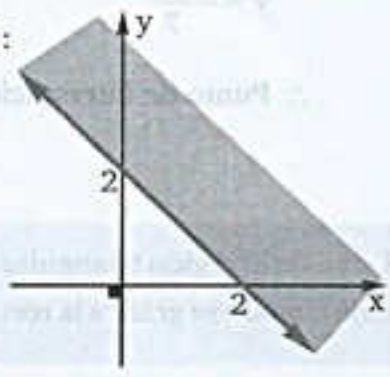
$$0 = y + 6 + x - 2$$

$$\therefore L: x + y + 4 = 0$$

PROBLEMA 6 Resolver gráficamente el sistema:

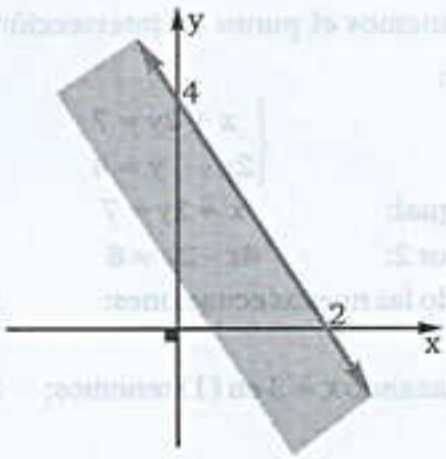
$$\begin{cases} x + y \geq 2 & \ldots\ldots (1) \\ 2x + y \leq 4 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Resolución: Graficando para (1):

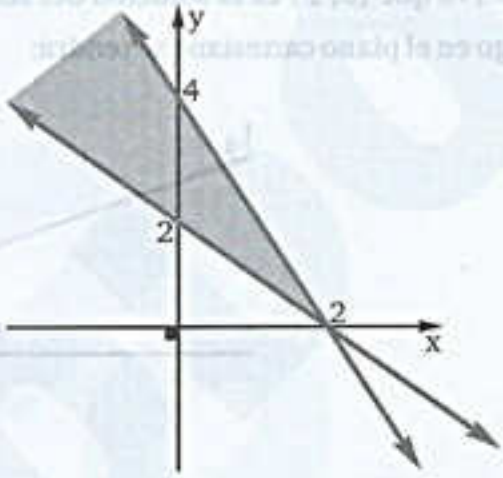


team CALAPENSHKO

Graficando para (2):



Finalmente graficamos la intersección:



PROBLEMA 7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (7; 8) y es paralela a la recta que pasa por (– 2; 2) y (3; – 4)

Resolución: Hallemos la pendiente de la recta que pasa por (– 2; 2) y (3; – 4) pues por ser una recta paralela a nuestra recta buscada tendrá la misma pendiente.

$$m = \frac{-4-2}{3+2} = \frac{-6}{5}$$

Para la recta buscada:

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Leftrightarrow -\frac{6}{5} = \frac{y-8}{x-7}$$

$$-6x + 42 = 5y - 40$$

$$-6x - 5y + 82 = 0$$

$\therefore$ La ecuación de la recta será: $6x + 5y - 82 = 0$

PROBLEMA 8 Determine el área de la región triangular que forman las recta L_1 y L_2 con el eje de abscisas en el plano cartesiano, siendo L_1: $x + 2y = 7$

L_2: $2x - y = 4$

Resolución: Determinemos el punto de intersección de L_1 y L_2, para lo cual resolveremos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - y = 4 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

La (1) igual: $x + 2y = 7$

La (2) por 2: $4x - 2y = 8$

Sumando las nuevas ecuaciones: $5x = 15$

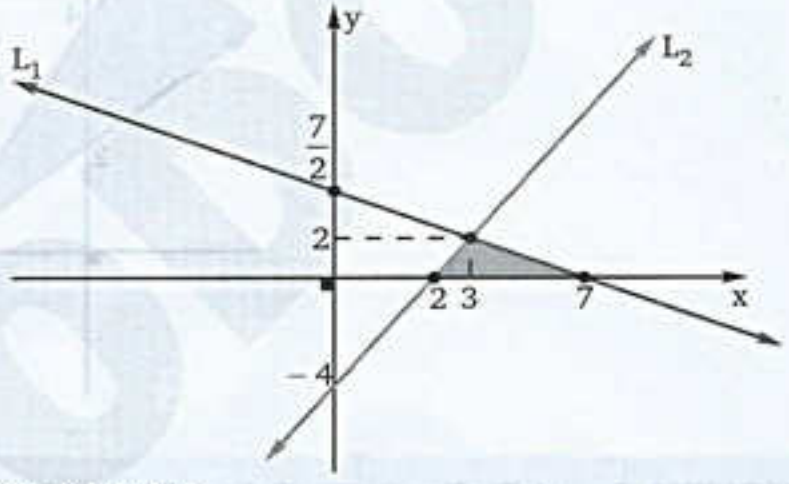
$x = 3$

Reemplazando $x = 3$ en (1) tenemos: $3 + 2y = 7$

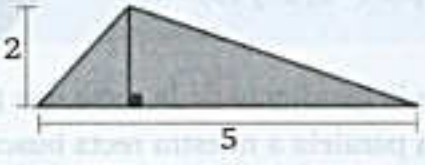
$2y = 4$

$y = 2$

Observa que (3; 2) es la solución del sistema, punto de intersección entre L_1 y L_2, luego en el plano cartesiano se tendrá:



Finalmente en la región triangular:



$$\text{Área} = A = \frac{(5)(2)}{2}\,u^2$$

$$\therefore\ A = 5u^2$$

PROBLEMA 9 Si el sistema: $\begin{cases} (m-2)x + 4y = m + 1 \\ 3x - 2y = m \end{cases}$

es consistente de solución única, ¿cuál es el valor de m?

Resolución: De acuerdo con la primera propiedad expuesta en el item 2.C. se debe cumplir que:

$$\frac{m-2}{3} \neq \frac{4}{-2}$$

$$\frac{m-2}{3} \neq -2 \Leftrightarrow m - 2 \neq -6$$

$$m \neq -4$$

$$\therefore\ m \in \mathbb{R} - \{-4\}$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 10 A continuación se muestran las ecuaciones de dos rectas paralelas:

$$L_1: (3-m)x + 5y = 4 \quad ; \quad L_2: (m-2)x + 2y = 6$$

¿Cuál es el valor del parámetro m?

Resolución: De acuerdo con la tercera propiedad expuesta en el item 2.C, el problema nos conduce a resolver el siguiente sistema inconsistente:

$$\begin{cases} (3-m)x + 5y = 4 \\ (m-2)x + 2y = 6 \end{cases}$$

Donde se cumple que:

$$\frac{3-m}{m-2} = \frac{5}{2} \neq \frac{4}{6}$$

$$6 - 2m = 5m - 10$$

$$16 = 7m$$

Por axioma de simetría: $7m = 16$

$$\therefore \ m = \frac{16}{7}$$

PROBLEMA 11 Calcule m. n, si el sistema:

$$\begin{cases} (2m-1)x + 4y = n + 1 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - 2y = m & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

admite infinitas soluciones.

Resolución: De acuerdo con la segunda propiedad expuesta en el item 2.C se debe cumplir lo siguiente: $\dfrac{2m-1}{2} = \dfrac{4}{-2} = \dfrac{n+1}{m}$

Iniciando con : $\dfrac{2m-1}{2} = \dfrac{4}{-2} \Leftrightarrow 2m - 1 = -4$

$$2m = -3$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

Ahora trabajemos con:

$$\frac{4}{-2} = \frac{n+1}{m} \Leftrightarrow -2 = \frac{n+1}{m}$$

$$-2m = n + 1 \Leftrightarrow -2\left(-\frac{3}{2}\right) = n + 1$$

$$3 = n + 1 \Leftrightarrow n + 1 = 3$$

$$n = 2$$

Finalmente tenemos:

$$m.n = \left(-\frac{3}{2}\right).(2)$$

$$\therefore \ m.n = -3$$

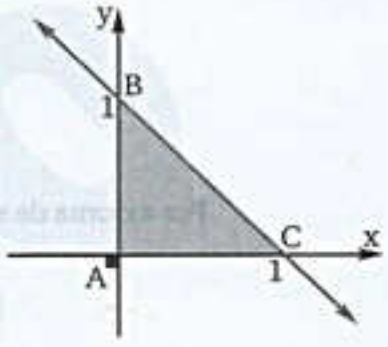
PROBLEMA 12 Maximizar: $z = F(x;y) = 3x + 2y$, sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x + y &\le 1 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Resolución: De acuerdo con lo expuesto en el item 6 procedemos a resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

En el plano cartesiano:



La función objetivo es:

$$F(x;y) = 3x + 2y$$

En el punto A tenemos:

$$F(0;0) = 0 + 0 = 0$$

En el punto B tenemos:

$$F(0;1) = 0 + 2 = 2$$

En el punto C tenemos:

$$F(1;0) = 3 + 0 = 3$$

Observa que la función F asume su máximo valor en el punto C.

$$\therefore\ z = F(x;y)_{máx} = 3$$

PROBLEMA 13 Maximizar: $z = F(x;y) = 4x + 6y$, sometida a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x + 3y &\le 6 \\ 3x + y &\le 8 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Resolución: Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y \le 6 \\ 3x + y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Hallemos las coordenadas del punto C, para lo cual es necesario resolver el sistema:

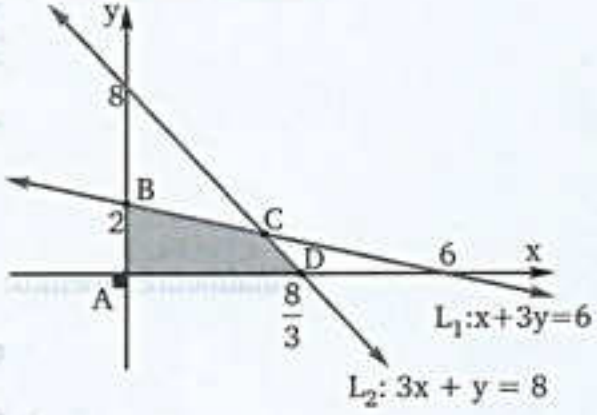
$$\begin{cases} 3x + y = 8 \ \ldots\ldots (1) \\ x + 3y = 6 \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

La (1) igual: $3x + y = 8$

La (2) por -3: $-3x - 9y = -18$

Sumando las nuevas ecuaciones:

$$-8y = -10$$



team CALAPENSHKO

$$y = \frac{5}{4}$$

Reemplazando en (1) obtenemos: $x = \frac{9}{4}$

Ahora las coordenadas de C ya están determinadas: $\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}\right)$

La función objetivo es: $F(x; y) = 4x + 6y$

En el punto A tenemos: $F(0; 0) = 0 + 0 = 0$

En el punto B tenemos: $F(0; 2) = 0 + 12 = 12$

En el punto C tenemos: $F\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}\right) = 4\left(\frac{9}{4}\right) + 6\left(\frac{5}{4}\right)$

$$F\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}\right) = 9 + \frac{15}{2} = \frac{33}{2}$$

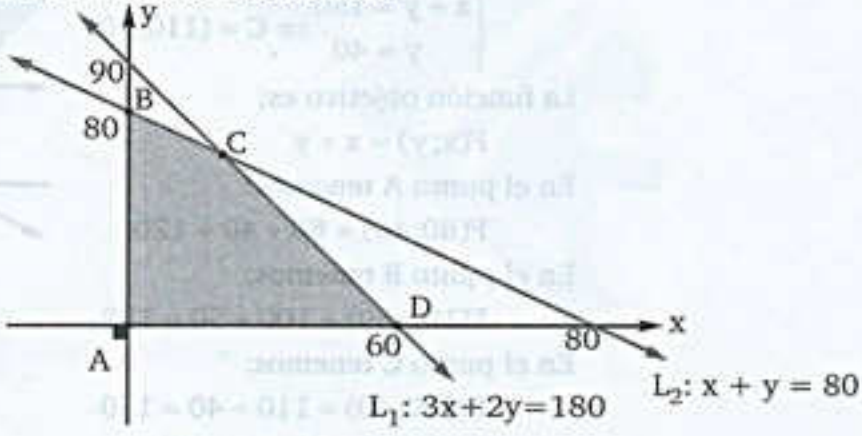
En el punto D tenemos: $F\left(\frac{8}{3}; 0\right) = 4\left(\frac{8}{3}\right) + 0 = \frac{32}{3}$

$$\therefore\ z = F(x; y)_{máx} = \frac{33}{2}$$

PROBLEMA 14 Maximizar la función $z = F(x; y) = 4x + 3y$, sujeta a las restricciones:

$$30x + 20y \leq 1800$$
$$x + y \leq 80$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolución: Resolviendo el sistema de inecuaciones tenemos:



Hallemos las coordenadas del punto C:

$$\begin{cases} x + y = 80 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x + 2y = 180 \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

La (1) por -2: $-2x - 2y = -160$

La (2) igual: $3x + 2y = 180$

Sumando las nuevas ecuaciones: $x = 20$

Reemplazando en (1) obtenemos: $y = 60$

$\Rightarrow C = (20; 60)$

La función objetivo es: $F(x;y) = 4x + 3y$
En el punto A tenemos: $F(0;0) = 0 + 0 = 0$
En el punto B tenemos: $F(0;80) = 0 + 240 = 240$
En el punto C tenemos: $F(20;60) = 80 + 180 = 260$
En el punto D tenemos: $F(60;0) = 240 + 0 = 240$
$\therefore\ z = F(x;y)_{máx} = 260$

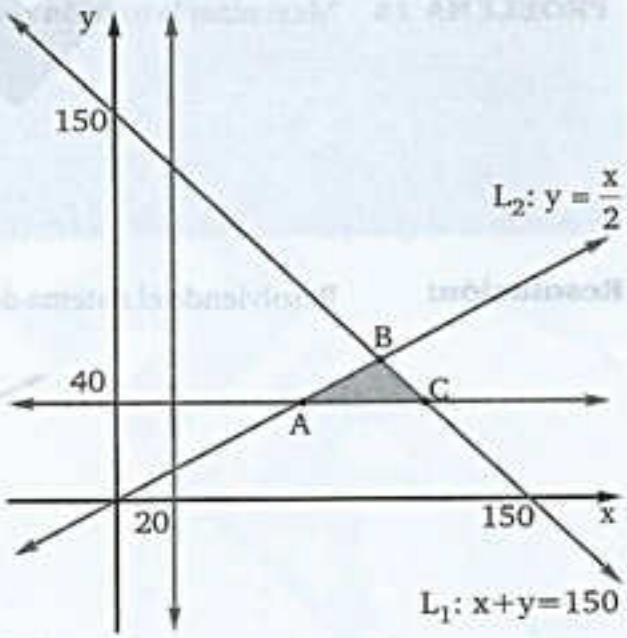
PROBLEMA 15 Maximizar: $z = F(x;y) = x + y$
Sabiendo que:
$$x + y \le 150$$
$$y \le \frac{x}{2}$$
$$x \ge 20$$
$$y \ge 40$$

Resolución: Observa que $x = 20$ es una recta vertical, asimismo que $y = 40$ es una recta horizontal. Ahora en el plano cartesiano se tendrá:

Las coordenadas de A:
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow A = (80;40)$$

Las coordenadas de B:
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow B = (100;50)$$

Las coordenadas de C:
$$\begin{cases} x + y = 150 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow C = (110;40)$$



La función objetivo es:
$F(x;y) = x + y$
En el punto A tenemos:
$F(80;40) = 80 + 40 = 120$
En el punto B tenemos:
$F(100;50) = 100 + 50 = 150$
En el punto C tenemos:
$F(110;40) = 110 + 40 = 150$
$\therefore\ z = F(x;y)_{máx} = 150$

OBSERVACIÓN

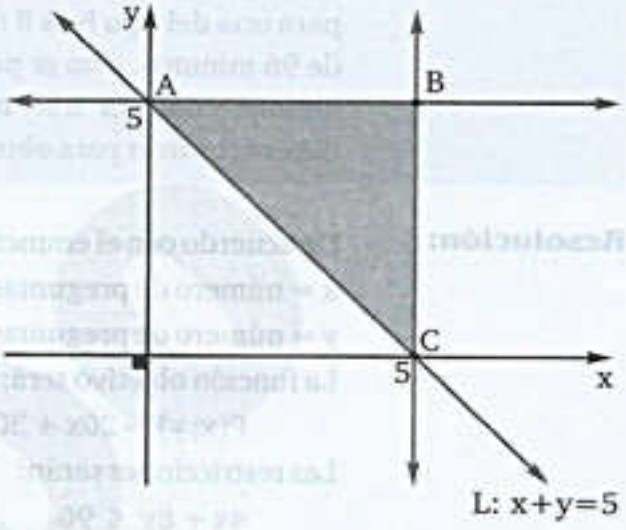
La función objetivo del problema anterior alcanza su valor máximo en dos punto (B y C) vértices de la región factible, luego de acuerdo con el teorema 6.B dicha función también alcanza su máximo valor con cualquier punto que pertenece al segmento $\overline{BC}$.

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 16 Minimizar la función: $z = F(x; y) = 2x + 5y$

Sabiendo que:
$$x + y \geq 5$$
$$x \leq 5$$
$$y \leq 5$$

Resolución: Resolviendo el sistema de inecuaciones tenemos:



La función objetivo es:

$$F(x; y) = 2x+5y$$

En el punto A = (0; 5) tenemos:

$$F(0; 5) = 0 + 25 = 25$$

En el punto B = (5; 5) tenemos;

$$F(5; 5) = 10 + 25 = 35$$

En el punto C = (5; 0) tenemos:

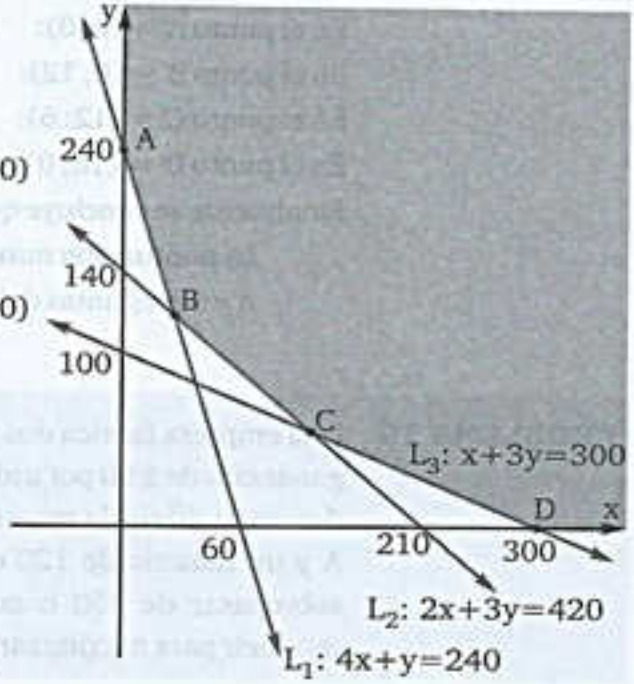
$$F(5; 0) = 10 + 0 = 10$$

$$\therefore\ z = F(x; y)_{mín} = 10$$

PROBLEMA 17 Minimizar $z = F(x; y) = 6x + 8y$, sometida a las siguientes restricciones:

$$40x + 10y \geq 2400$$
$$10x + 15y \geq 2100$$
$$5x + 15y \geq 1500$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolución: Resolviendo el sistema de inecuaciones tenemos:



Coordenadas de A: A = (0; 240)

Coordenadas de B:

$$\begin{cases} 4x + y = 240 \\ 2x + 3y = 420 \end{cases} \Rightarrow B = (30; 120)$$

Coordenadas de C:

$$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ 2x + 3y = 420 \end{cases} \Rightarrow C = (120; 60)$$

Coordenadas de D: D = (300; 0)

La función objetivo es:

$$F(x; y) = 6x + 8y$$

En el punto A tenemos:

$$F(0; 240) = 0 + 1920 = 1920$$

En el punto B tenemos:

$$F(30; 120) = 180 + 960 = 1140$$

En el punto C tenemos: $F(120; 60) = 720 + 480 = 1200$
En el punto D tenemos: $F(300; 0) = 1800 + 0 = 1800$
$\therefore\ z = F(x; y)_{min} = 1140$

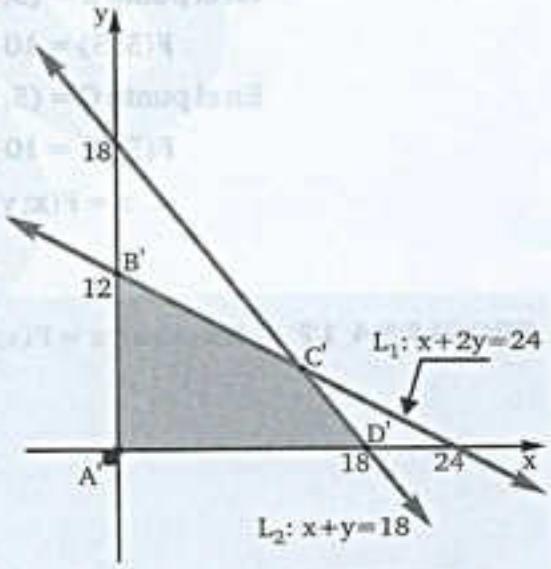
PROBLEMA 18 En cierta prueba existen preguntas de tipo A que valen 20 puntos y de tipo B que valen 30 puntos. El tiempo para contestar una pregunta del tipo A es 4 minutos y para una del tipo B es 8 minutos. El tiempo máximo permitido para la solución es de 96 minutos, y no se puede contestar más de 18 preguntas. Suponiendo que un alumno contesta sólo respuestas correctas. ¿Cuántas preguntas de cada tipo deberá resolver para obtener la calificación máxima?

Resolución: De acuerdo con el enunciado procedemos a plantear el problema, sean:
x = número de preguntas del tipo A.
y = número de preguntas del tipo B.
La función objetivo será:

$$F(x; y) = 20x + 30y$$

Las restricciones serán:

$$4x + 8y \le 96$$
$$x + y \le 18$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$



Resolviendo el sistema de inecuaciones:
Hallemos las coordenadas del punto C':

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = 24 \\ x + y = 18 \end{matrix}\right\} \ x = 12 \ \wedge \ y = 6$$

Evaluando los vértices en la función objetivo tenemos:

$$F(x; y) = 20x + 30y$$

En el punto A' = (0; 0): $F(0; 0) = 0 + 0 = 0$
En el punto B' = (0; 12): $F(0; 12) = 0 + 360 = 360$
En el punto C' = (12; 6): $F(12; 6) = 240 + 180 = 420$
En el punto D' = (18; 0): $F(18; 0) = 360 + 0 = 360$
Finalmente se concluye que:

La puntuación máxima es 420 y se consigue al resolver 12 preguntas del tipo A y 6 preguntas del tipo B.

PROBLEMA 19 Una empresa fabrica dos modelos de cámaras fotográficas; A y B. El modelo A deja ganancias de $ 50 por unidad y el modelo B de $ 40 por unidad. Para cumplir con la demanda diaria, la empresa debe producir un mínimo de 200 cámaras del modelo A y un mínimo de 120 cámaras del modelo B. Si la producción diaria no debe sobrepasar de 450 cámaras fotográficas. ¿Cuántas de cada modelo se deben producir para maximizar las ganancias?

team CALAPENSHKO

Resolución:

Sean:

x = número de cámaras producidas por día del modelo A.

y = número de cámaras producidas por día del modelo B.

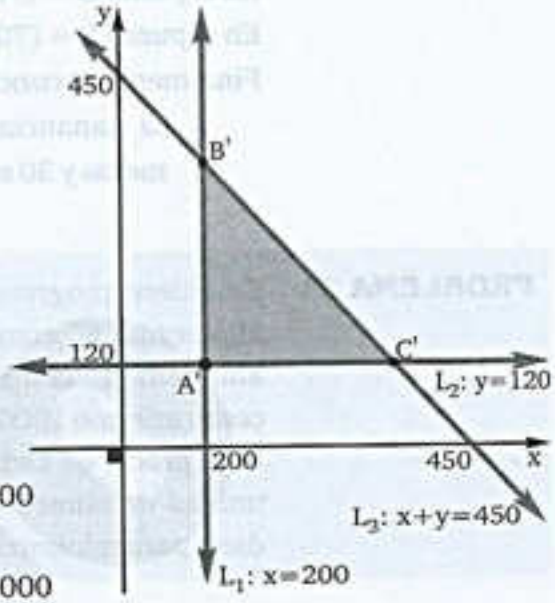
La función objetivo será:

$$F(x; y) = 50x + 40y$$

Las restricciones serán:

$$x \geq 200$$
$$y \geq 120$$
$$x + y \leq 450$$

Resolviendo el sistema de inecuaciones:



Evaluando los vértices en la función objetivo tenemos:

$$F(x; y) = 50x + 40y$$

En el punto A' = (200; 120):

$$F(200; 120) = 10000 + 4800 = 14800$$

En el punto B' = (200; 250):

$$F(200; 250) = 10000 + 10000 = 20000$$

En el punto C' = (330; 120):

$$F(330; 120) = 16500 + 4800 = 21300$$

Finalmente se concluye que:

La ganancia máxima es $ 21300 y se obtiene con 330 cámaras del modelo A y 120 cámaras del modelo B.

PROBLEMA 20 Un carpintero fabrica mesas y sillas. Mensualmente puede fabricar como mínimo 20 mesas y como máximo 70 mesas, se sabe también que el número de sillas fabricadas al mes no es mayor de 60. Si la ganancia por mesa es de S/. 15 y por silla S/. 10, y mensualmente puede fabricar a lo más 100 unidades combinadas. ¿Cuántas unidades de cada tipo debe fabricar para maximizar sus ganancias?

Resolución:

Sean:

x = número de mesas fabricadas al mes.

y = número de sillas fabricadas al mes.

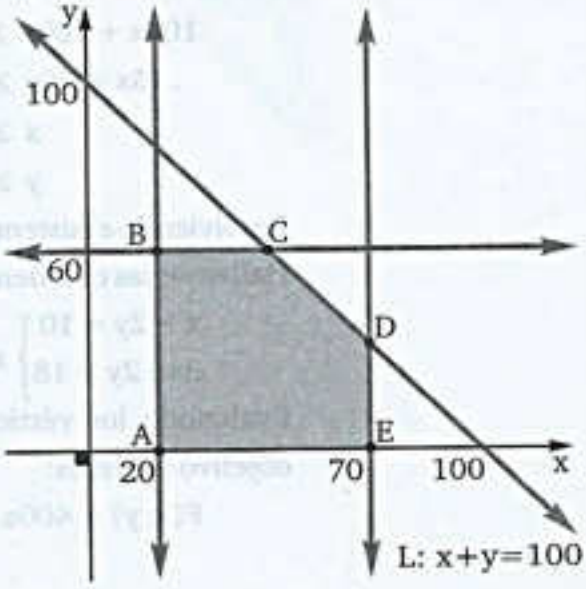
La función objetivo será:

$$F(x; y) = 15x + 10y$$

Las restricciones serán:

$$20 \leq x \leq 70$$
$$0 \leq y \leq 60$$
$$x + y \leq 100$$

Resolviendo el sistema de inecuaciones:



Evaluando los vértices en la función objetivo tenemos: $F(x; y) = 15x + 10y$

team CALAPENSHKO

En el punto A = (20; 0): F(20; 0) = 300 + 0 = 300
En el punto B = (20; 60): F(20; 60) = 300 + 600 = 900
En el punto C = (40; 60): F(40; 60) = 600 + 600 = 1200
En el punto D = (70; 30): F(70; 30) = 1050 + 300 = 1350
En el punto E = (70; 0): F(70; 0) = 1050 + 0 = 1050

Finalmente se concluye que:

La ganancia máxima en un mes es de S/. 1350 y se obtiene al fabricar 70 mesas y 30 sillas

PROBLEMA 21 Se quiere programar una dieta con dos alimentos "S" y "T". Cada unidad de alimentos "S" contiene 100 calorías y 15 gramos de proteínas. La unidad del alimento "T" contiene 200 calorías y 10 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 1000 calorías y 90 gramos de proteínas diarias.
Si el precio de cada unidad de alimento "S" es 400 soles y 300 soles el de cada unidad de alimento "T". ¿Cuántas unidades de cada alimento debe contener la dieta para minimizar el costo?

Resolución:

Sean:
x = cantidad de unidades del alimento "S".
y = cantidad de unidades del alimento "T".
Veamos los datos en un cuadro:

	S	T	Mínimo
Número de calorías	100	200	1000
Número de gramos de proteínas	15	10	90
Costo	400	300	

La función objetivo sera:

$$F(x; y) = 400x + 300y$$

Las restricciones serán:

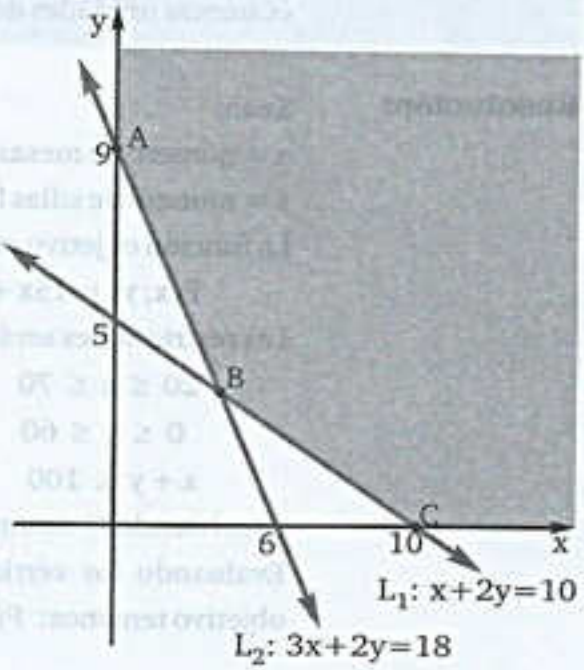
$$100x + 200y \geq 1000$$
$$15x + 10y \geq 90$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolviendo el sistema de inecuaciones:
Hallemos las coordenadas del punto B:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = 10 \\ 3x + 2y = 18 \end{matrix}\right\} x = 4 \wedge y = 3$$

Evaluando los vértices en la función objetivo tenemos:

$$F(x; y) = 400x + 300y$$



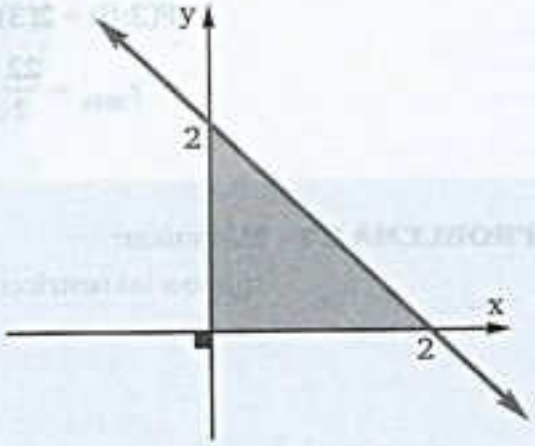
team CALAPENSHKO

En el punto A = (0; 9): $F(0;9) = 0 + 2700 = 2700$
En el punto B = (4; 3): $F(4;3) = 1600 + 900 = 2500$
En el punto C = (10; 0): $F(10;0) = 4000 + 0 = 4000$
Finalmente se concluye que:

El costo es mínimo si la dieta contiene 4 unidades del alimento "S" y 3 unidades del alimento "T"

PROBLEMA 22 Maximizar: $z = F(x;y) = 5x + 3y$
sujeto a las restricciones: $x + y \leq 2$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Resolución:
La función objetivo es:
$F(x;y) = 5x + 3y$
Las restricciones dadas son:
$x + y \leq 2$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Graficando tenemos:



En A = (0; 2):
$F(0;2) = 5(0) + 3(2) = 6$
En B = (2; 0):
$F(2;0) = 5(2) + 3(0) = 10$

Notese que en el vértice B la función se optimiza.
$\therefore\ z_{máx} = 10$

PROBLEMA 23 Maximizar: $z = F(x;y) = 2x + 3y$
sujeto a las restricciones: $x + 2y \leq 4$
$2x + y \leq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Resolución:
La función objetivo es:
$F(x;y) = 2x + 3y$
Las restricciones dadas son:
$x + 2y \leq 4$
$2x + 2y \leq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

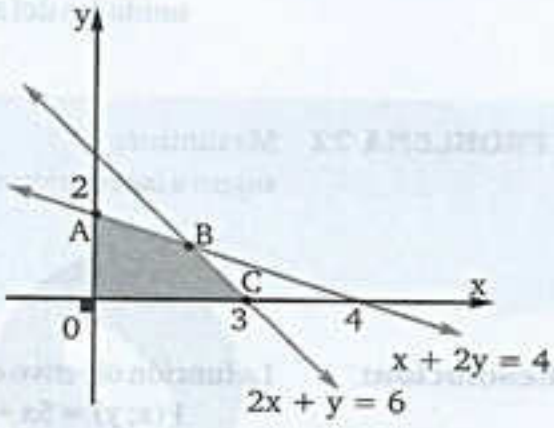
team CALAPENSHKO

Observa que las coordenadas del punto B corresponden a la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

es decir: $x = \frac{8}{3} \wedge y = \frac{2}{3}$

Graficando tenemos:



En A = (0;2):

$$F(0;2) = 2(0) + 3(2) = 6$$

En $B = \left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$:

$$F\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3} + \frac{6}{3}$$

$$F\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3}$$

En C = (3;0):

$$F(3;0) = 2(3) + 3(0) = 6$$

$$\therefore z_{máx} = \frac{22}{3}$$

twitter.com/calapenshko

PROBLEMA 24 Minimizar: $z = F(x;y) = 3x + 4y$

sujeto a las restricciones:

$$3x + y \geq 3$$
$$x + y \geq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolución:

La función objetivo es:

$$F(x;y) = 3x + 4y$$

Las restricciones dadas son:

$$3x + y \geq 3$$
$$x + y \geq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

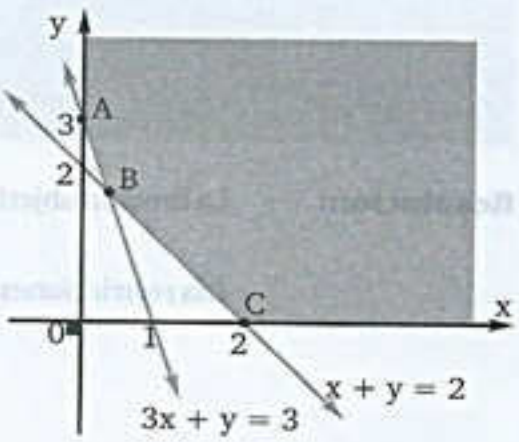
Hallemos las coordenadas del punto B, para lo cual es necesario resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

es decir:

$$x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{3}{2}$$

Graficando tenemos:



team CALAPENSHKO

En $A = (0;3)$: $F(0;3) = 3(0) + 4(3) = 12$

En $B = \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$: $F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{12}{2}$ $F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}$

En $C = (2;0)$: $F(2;0) = 3(2) + 4(0) = 6$

Es evidente que z es mínimo en el vértice C:

$$\therefore z_{mín} = 6$$

PROBLEMA 25 Un fabricante desea producir bicicletas de paseo y de montaña, para lo cual cuenta con 80 kg. de acero y 120 kg. de aluminio. En la producción de cada bicicleta de paseo empleará 1 kg. de acero y 3 kg. de aluminio, y en las de montaña 2 kg. de cada metal. Él se propone ganar S/. 270 por cada bicicleta de paseo y S/. 450 por cada bicicleta de montaña vendida. ¿Cuántas bicicletas deberá fabricar de modo que obtenga la ganancia máxima?

Resolución: Supongamos que se fabrican **x** bicicletas de paseo e **y** bicicletas de montaña, ahora organizando la información en una tabla tenemos:

	Acero (kg.)	Aluminio (kg.)
Bicicleta de paseo	x	3x
Bicicleta de montaña	2y	2y

Como el total de acero es 80 kg.: $x + 2y \leq 80$
Como el total de aluminio es 120 kg.: $3x + 2y \leq 120$
Así mismo resulta evidente que: $x \geq 0$, $y \geq 0$ } Restricciones

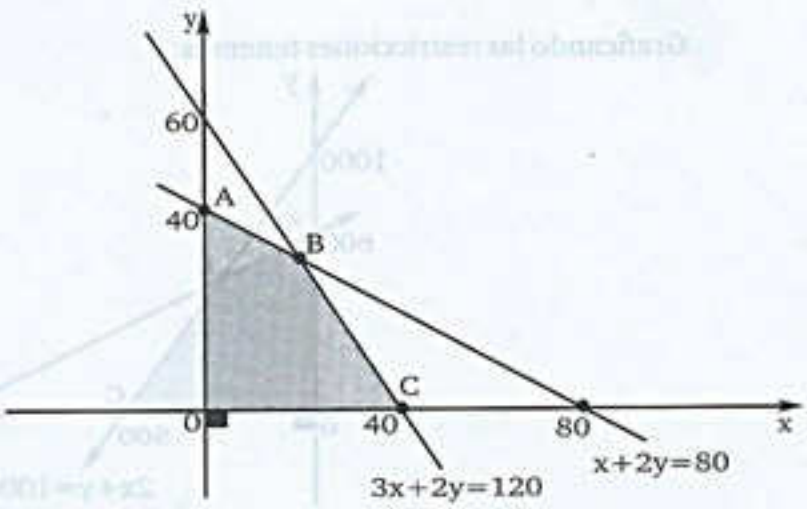
Ahora debemos determinar la función objetivo, para nuestro caso la función ganancia.

Si por cada bicicleta de paseo se debe ganar S/. 270, en total se gana 270x

Si por cada bicicleta de montaña se debe ganar S/. 450, en total se gana 450y

De donde la función ganancia será: $z = F(x;y) = 270x + 450y$

Graficando las restricciones:



team CALAPENSHKO

Hallemos las coordenadas del vértice B, para lo cual debemos resolver el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases}$

Es decir: $x = 20 \wedge y = 30$

En A = (0;40): $F(0;40) = 270(0) + 450(40) = 18000$

En B = (20;30): $F(20;30) = 270(20) + 450(30) = 5400 + 13500$

$F(20;30) = 18900$

En C = (40;0): $F(40;0) = 270(40) + 450(0) = 10800$

Observa que en el vértice B la función se optimiza, es decir si $x = 20 \wedge y = 30$ la ganancia es máxima.

∴ Deberá fabricar 20 bicicletas de paseo y 30 de montaña

PROBLEMA 26 Un laboratorio de farmacia fabrica dos complejos vitamínicos constituidos ambos por vitamina A y vitamina B. El primero está compuesto por 2 unidades de vitamina A y 2 unidades de vitamina B; y el segundo por 1 unidad de vitamina A y 3 unidades de vitamina B. Sabiendo que solo se dispone de 1000 unidades de vitamina A y 1800 unidades de vitamina B y que el beneficio del primer complejo es de 400 dólares y el del segundo 300 dólares. Hallar el número de complejos vitamínicos de cada tipo que deben fabricarse para obtener un beneficio máximo ¿Cuál será dicho beneficio máximo?

Resolución:

C_1 = Primer complejo vitamínico, cantidad total x

C_2 = Segundo complejo vitamínico, cantidad total y

Del texto podemos apreciar que la función objetivo, en este caso la función ganancia viene dada por: $z = F(x;y) = 400x + 300y$

	Vitamina A	Vitamina B
Primer complejo	2x	2x
Segundo complejo	y	3y

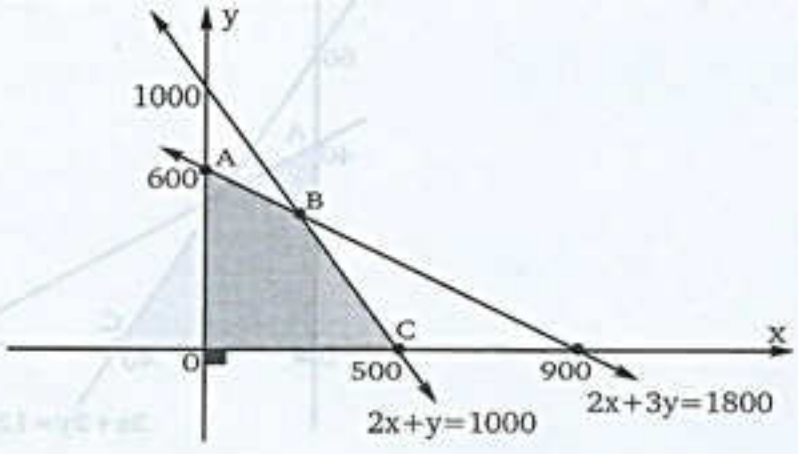
Como el total de vitamina A es 1000 unidades: $2x + y \leq 1000$

Como el total de vitamina B es 1800 unidades: $2x + 3y \leq 1800$

Así mismo resulta evidente que: $x \geq 0$, $y \geq 0$

} Restricciones

Graficando las restricciones tenemos:



A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

Hallemos las coordenadas del vértice B, para lo cual debemos resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 1800 \\ 2x + y = 1000 \end{cases}$

Es decir: $x = 300 \wedge y = 400$

En A = (0;600): $F(0;600) = 400(0) + 300(600) = 180000$

En B = (300;400): $F(300;400) = 400(300) + 300(400)$

$F(300;400) = 120000 + 120000$

$F(300;400) = 240000$

En C = (500;0): $F(500;0) = 400(500) + 300(0) = 200000$

Finalmente notamos que para obtener un beneficio máximo debe fabricar 300 de C_1 y 400 de C_2.

$$\therefore Z_{máx} = 240000$$

PROBLEMA 27 Una persona necesita 10; 12 y 12 unidades de sustancias químicas A, B y C respectivamente para su jardín. Un líquido contiene 5; 2 y 1 unidades de A, B y C respectivamente por botella; y otro producto en seco contiene 1; 2 y 4 unidades de A, B y C respectivamente, por paquete. Si el producto líquido se vende a razón de 3 dólares la botella y el producto seco se vende a razón de 2 dólares el paquete. ¿Cuántas de cada uno se deben comprar para minimizar el costo y llenar los requisitos?

Resolución: Sea x el número de botellas que se han comprado e y el número de paquetes, de acuerdo con el enunciado se busca minimizar a la función: $z = F(x;y) = 3x + 2y$

Organizando los datos en una tabla tenemos:

	Unidades por botella	Unidades por paquete	Unidades necesarias
Sustancia A	5	1	10
Sustancia B	2	2	12
Sustancia C	1	4	12
Costo	$ 3	$ 2	

Ahora las restricciones son:

$5x + y \geq 10$

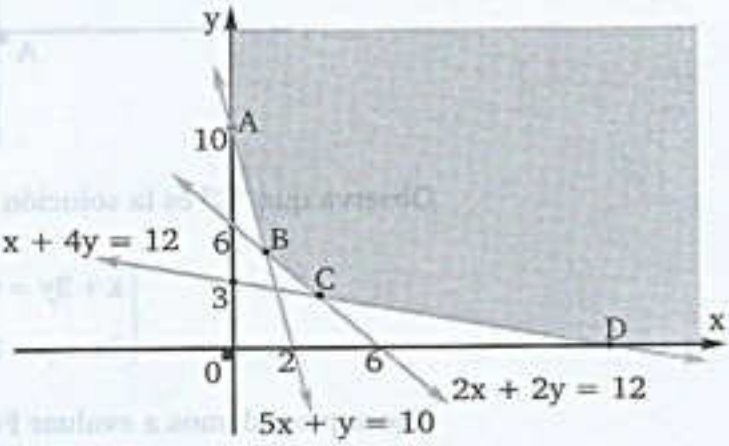
$2x + 2y \geq 12$

$x + 4y \geq 12$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Graficando las restricciones:



team CALAPENSHKO

Las coordenadas de B: $\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$ Es decir: $x = 1 \ \wedge \ y = 5$

Las coordenadas de C: $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$ Es decir: $x = 4 \ \wedge \ y = 2$

En A = (0; 10): $F(0; 10) = 3(0) + 2(10) = 20$

En B = (1; 5): $F(1; 5) = 3(1) + 2(5) = 3 + 10$

$F(1; 5) = 13$

En C = (4; 2): $F(4; 2) = 3(4) + 2(2) = 12 + 4$

$F(4; 2) = 16$

En D = (12; 0): $F(12; 0) = 3(12) + 2(0) = 36$

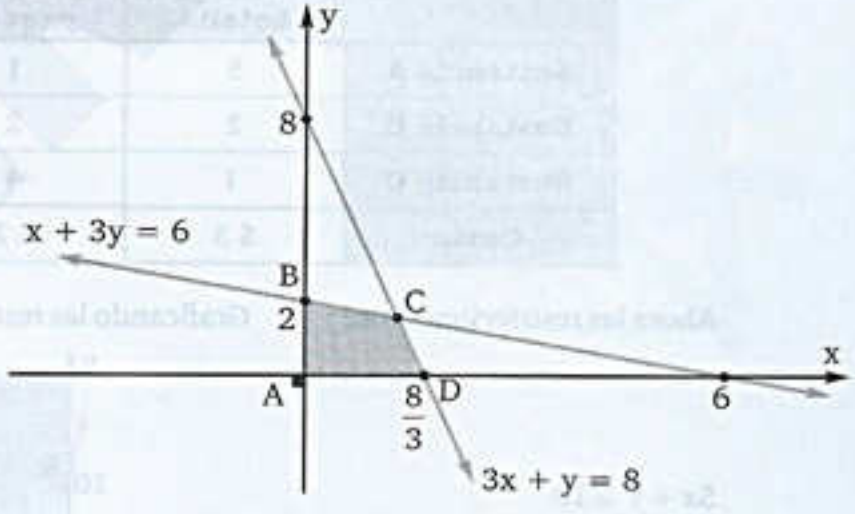
Observa que el valor mínimo es 13 y ocurre en B = (1;5)

$\therefore$ La persona ha de comprar 1 botella y 5 paquetes

PROBLEMA 28 Maximizar la función $F(x; y) = 4x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \le 6 \\ 3x + y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Resolución: En el plano cartesiano se tendrá:



Observa que "C" es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{cases}, \text{ es decir } C = \left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}\right)$$

Ahora procedemos a evaluar $F(x; y) = 4x + 6y$ en los puntos: A, B, C y D.

team CALAPENSHKO

En $A = (0;0)$:

$$F(0;0) = 0 + 0 = 0$$

En $B = (0;2)$:

$$F(0;2) = 0 + 12 = 12$$

En $C = \left(\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)$:

$$F\left(\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right) = 9 + \frac{15}{2} = \frac{33}{2} = 16,5$$

En $D = \left(\frac{8}{3};0\right)$:

$$F\left(\frac{8}{3};0\right) = \frac{32}{2} + 0 = \frac{32}{2} = 10,6$$

$$\therefore F_{(máx)} = 16,5$$

PROBLEMA 29 A una persona le toca 10 millones de soles en una lotería y le aconsejan que las invierta en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo pero producen un beneficio del 10%. Las del tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% anual. Después de varias deliberaciones decide invertir como máximo 6 millones en la compra de acciones A y por lo menos 2 millones en la compra de acciones B. Además decide que lo invertido en A sea por lo menos igual a lo invertido en B. ¿Cómo deberá invertir 10 millones para que el beneficio anual sea máximo?

Resolución: Supongamos que:

x = Cantidad invertida en acciones A.

y = Cantidad invertida en acciones B.

La función objetivo es:

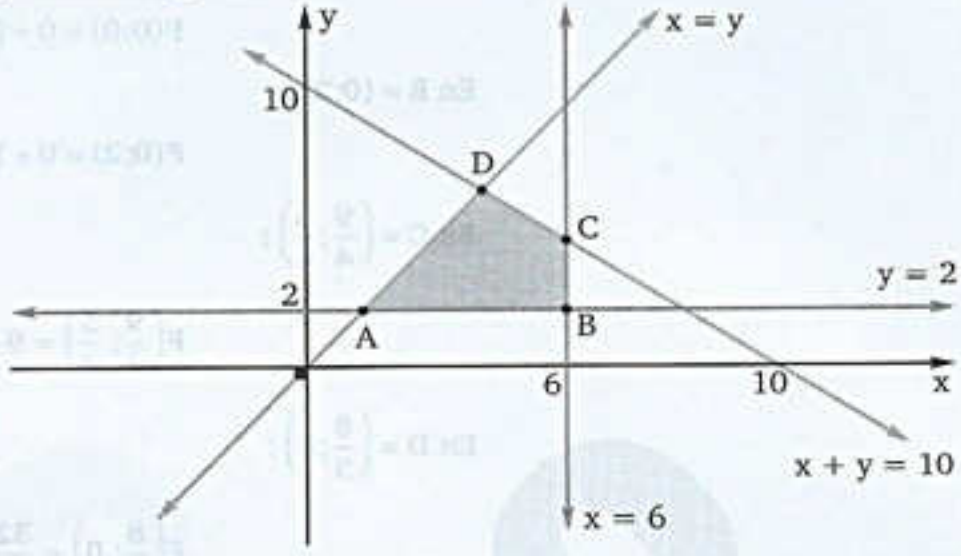
$$F(x;y) = \frac{10x}{100} + \frac{7y}{100}$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq y \end{cases}$$

team CALAPENSHKO

Su representación gráfica será:



Resolviendo los sistemas correspondientes:

$$\text{I) Para A}: \begin{cases} x = y \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (2; 2)$$

$$\text{II) Para B}: \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (6; 2)$$

$$\text{III) Para C}: \begin{cases} x + y = 10 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow C = (6; 4)$$

$$\text{IV) Para D}: \begin{cases} x = y \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow D = (5;5)$$

Evaluando a la función objetivo: $F(x;y) = \frac{10x}{100} + \frac{7y}{100}$

En A = (2; 2):

$$F(2; 2) = \frac{20}{100} + \frac{14}{100} = \frac{34}{100} = 0{,}34$$

En B = (6; 2):

$$F(6; 2) = \frac{60}{100} + \frac{14}{100} = \frac{74}{100} = 0{,}74$$

En C = (6; 4):

$$F(6; 4) = \frac{60}{100} + \frac{28}{100} = \frac{88}{100} = 0{,}88 \quad \text{¡Máximo!}$$

En D = (5; 5):

$$F(5; 5) = \frac{50}{100} + \frac{35}{100} = \frac{85}{100} = 0{,}85$$

$\therefore$ Se debe invertir 6 millones en A y 4 millones en B

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 30 Una fábrica de productos alimenticios tiene dos tipos de camiones. Los camiones tipo A tienen 20 m^3 de espacio refrigerado y 40 m^3 no refrigerado y los camiones de tipo B tienen 30 m^3 de espacio refrigerado y 30 m^3 no refrigerado. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe emplear la fábrica para transportar 900 m^3 de productos refrigerados y 1200 m^3 de productos no refrigerados? **ADMISIÓN UNMSM 2017-II**

Resolución:

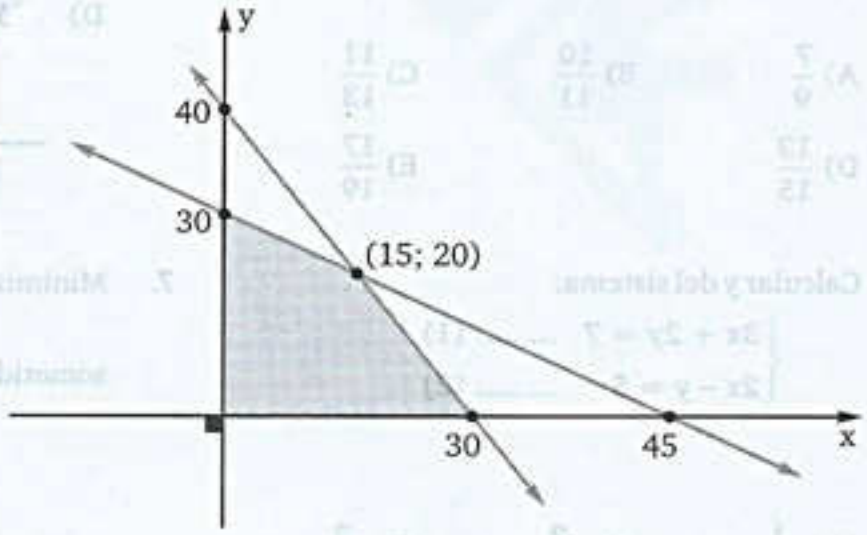
	Tipo	Refrigerados	No Refrigerados
x	A	20 m^3	40 m^3
y	B	30 m^3	30 m^3
		900 m^3	1200 m^3

Las restricciones del problema son:

$$20x + 30y \leq 900$$
$$40x + 30y \leq 1200$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Para hallar A se resuelve:

$$\begin{cases} 20x + 30y = 900 \\ 40x + 30y = 1200 \end{cases} \rightarrow x = 15 \wedge y = 20$$



$\therefore$ Se necesitan 15 camiones del tipo A y 20 camiones del tipo B.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En que punto se intersecan las rectas L_1 y L_2, donde:

$L_1: 2x + 5y - 3 = 0$

$L_2: 3x - y - 1 = 0$

A) $\left(\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$ B) $\left(\frac{8}{17};\frac{7}{17}\right)$ C) $\left(\frac{9}{17};\frac{8}{17}\right)$

D) $\left(\frac{5}{17};\frac{2}{17}\right)$ E) $\left(\frac{13}{17};\frac{11}{17}\right)$

2. Las pendientes de las rectas

$L_1: 7x + 4y + 2 = 0$ y $L_2: 5x - y + 4 = 0$

suman:

A) $\frac{19}{4}$ B) $\frac{11}{4}$ C) $\frac{7}{4}$

D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

3. Calcular x del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 & \ldots\ldots (1) \\ 2x - 4y = 2 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) $\frac{7}{9}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{11}{13}$

D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{17}{19}$

4. Calcular y del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & \ldots\ldots (1) \\ 2x - y = 5 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

A) $-\frac{1}{7}$ B) $-\frac{2}{7}$ C) $-\frac{3}{7}$

D) $-\frac{4}{7}$ E) $-\frac{5}{7}$

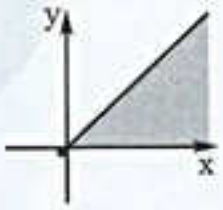
5. Determine el área de la región triangular en el primer cuadrante del plano cartesiano formado por los ejes coordenados y la recta $L: x + y = 6$

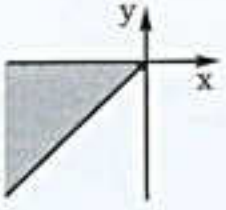
A) $12\,u^2$ B) $16\,u^2$ C) $24\,u^2$

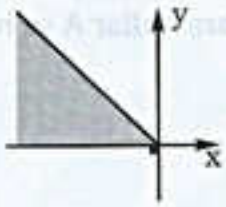
D) $18\,u^2$ E) $36\,u^2$

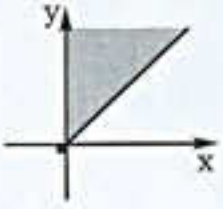
6. Resolver

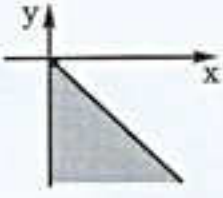
$$\begin{cases} y \le x \ldots\ldots (1) \\ x \ge 0 \ldots\ldots (2) \\ y \ge 0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

7. Minimizar la siguiente función:

$F(x; y) = 2x + 5y$

sometida a las restricciones:

$x + y \ge 5$

$x \le 5$

$y \le 5$

A) 10 B) 5 C) 15

D) 20 E) 25

team CALAPENSHKO

8. Determine el máximo valor de la siguiente función: $F(x; y) = 4x + 3y$, sometida a las restricciones:

$$x + 2y \le 20$$
$$x \ge 4$$
$$y \ge 2$$

A) 50 B) 60 C) 70
D) 80 E) 90

9. Minimizar la función: $F(x; y) = 6x + 3y$ según las restricciones:

$$\begin{cases} y \le 2x + 3 \\ x + y \le 7 \\ x \ge 0 \\ y \ge 2 \end{cases}$$

A) 9 B) 6 C) 25
D) 0 E) 36

10. Resolver el problema de programación lineal. Maximizar: $z(x;y) = 3x + 2y$
Sujeto a las restricciones.

$$\begin{cases} x + y \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

A) -2 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

11. Maximizar: $f(x;y) = 4x + 6y$, sujeto a:

$$x + 3y \le 6$$
$$3x + y \le 8$$
$$x \ge 0\ ;\ y \ge 0$$

A) 9,8 B) 10,7 C) 12
D) 16,5 E) 18

12. Maximizar la función: $Z = f(x;y) = 4x + 3y$ sujeto a las restricciones:

$$30x + 20y \le 1800$$
$$x + y \le 80$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

A) 220 B) 240 C) 250
D) 260 E) 280

13. Maximizar: $f(x; y) = x + y$ si:

$$x + y \le 150$$
$$y \le \frac{x}{2}$$
$$x \ge 20$$
$$y \ge 40, \qquad x, y \in \mathbb{Z}^+$$

A) 120 B) 130 C) 140
D) 150 E) 160

14. Minimizar: $C(x; y) = 6x + 8y$, sujeta a las restricciones:

$$40x + 10y \ge 2400$$
$$10x + 15y \ge 2100$$
$$5x + 15y \ge 1500$$
$$x \ge 0\ ;\ y \ge 0$$

A) 1100 B) 1140 C) 1200
D) 1800 E) 1920

15. Un sastre tiene a su disposición 16 m^2 de algodón, 11 m^2 de seda y 15 m^2 de lana. Un traje requiere lo siguiente: 2 m^2 de algodón, 1 m^2 de seda, 1 m^2 de lana. Una túnica requiere lo siguiente: 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de seda, 3 m^2 de lana. Si el traje se vende por \$30 y una túnica por \$50, ¿Cuántas piezas de cada confección debe hacer el sastre para obtener la máxima cantidad de dinero?

A) 8 trajes, 0 túnicas
B) 4 trajes, 3 túnicas
C) 7 trajes, 2 túnicas
D) 3 trajes, 4 túnicas
E) 0 Trajes, 5 túnicas

16. Un granjero tiene 480 hectáreas en la que puede sembrar trigo o maíz. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación crucial del verano. dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales que se adjunta.

Maíz	
Utilidad :	$ 40 por hectárea
Trabajo :	2 horas por hectárea
Trigo	
Utilidad :	$ 30 por hectárea
Trabajo :	1 hora por hectárea

¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad?, ¿Cuál es la utilidad máxima?

A) 12560 B) 14500 C) 17600
D) 18210 E) 20200

17. Una empresa fabricante de computadoras produce un modelo H que deja ganancias de $ 25 por unidad, y un modelo k con ganancias de $ 50 por unidad. Para cumplir con la demanda diaria la empresa necesita producir un mínimo de 200 computadoras modelo H y un mínimo de 80 modelo K. Si la producción diaria no excede a 400 computadoras. ¿Cuántas de cada modelo se deben producir para maximizar las ganancias?

A) 100 H y 150 K B) 150 H y 200 K
C) 200 H y 100 K
D) 200 H y 200 K E) 220 H y 180 K

18. En una evaluación hay preguntas de letras (L) que valen 10 puntos cada una y preguntas de números (N) que valen 15 puntos cada uno.

Si Percy tarda 3 minutos en contestar correctamente una pregunta de letras y 6 minutos en contestar una de números y el tiempo máximo permitido para la resolución es de 60 minutos y no puede contestar más de 16 preguntas. ¿Cuántas deberá contestar correctamente para obtener la puntuación máxima?

A) 13L y 5N B) 13L y 3N C) 12L y 4N
D) 11L y 5N E) 10L y 6N

19. En una urbanización del distrito de Surco, se van a construir casas de dos tipos: económicas y super económicas. La empresa constructora dispone de $ 1800000, siendo el costo de cada tipo de casa $ 30000 y de $ 20000 respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no deben ser superior a 80. Sabiendo que el beneficio por la venta de una casa económica es de $ 4000 y por la super económica $ 3000, ¿cuántas casas super económicas deben construirse para obtener el máximo beneficio?

A) 20 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

20. Una compañía produce dos tipos de artículos, mecánicos y eléctricos mensualmente. Cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquinas A, B y C. En la tabla adjunta se muestra la información relacionada con la fabricación de estos dos tipos de artículos.

	A	**B**	**C**	Utilidad/ Unidad
Mecánico	2h	1h	1h	$ 4
Eléctrico	1h	2h	1h	$ 6
Máximo de horas Disponibles	180h	160h	100h	

Se sabe que la compañía vende todos los artículos que produce. Determine la utilidad máxima mensual (en dólares).

A) $ 360 B) $ 400 C) $ 440
D) $ 480 E) $ 520

team CALAPENSHKO

21. Un pequeño negocio se especializa en vender dos tipos de artículos A y B. Si "x" representa la cantidad de artículos producidos del tipo A , "y" representa la cantidad de artículos producidos del tipo B, sujetos a: $2x + y \leq 8$

$2x + 3y \leq 12$

Determine la utilidad máxima P, si esta dada por: $P(x;y) = 100(3x + y)$ ... en dólares

A) \$ 4000 B) \$ 8000 C) \$ 10000
D) \$ 11000 E) \$ 12000

22. Dada las siguientes proposiciones respecto a la programación lineal:

I. Las restricciones de desigualdad son polinomios de primer y segundo grado.
II. El punto óptimo se encuentra en la región admisible.
III. La región admisible contiene puntos, los cuales tienen en alguna de sus coordenadas valor negativo.

Es (son) correcta (s):

A) Sólo I B) Sólo III C) Sólo II
D) I y II E) II y II

23. Considere el problema a maximizar:

$$Z = 30X_1 + 20X_2$$

sujeto a las restricciones:

$$X_1 \leq 60$$
$$X_2 \leq 75$$
$$10X_1 + 8X_2 \leq 800$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Dadas las proposiciones referidas al problema:

I. No existe región admisible.
II. El óptimo se da en el punto (60; 0)
III. Una solución factible es el punto (0; 75)

son correctas:

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

ENUNCIADO:

Un sastre tiene 80 metros cuadrados de tela de algodón, 120 metros cuadrados de lana. Un traje requiere 1 metro cuadrado de algodón y 3 metros cuadrados de lana, y un vestido de mujer requiere dos metros cuadrados de cada una de las telas. ¿Qué cantidad de cada confección debe hacer el sastre para maximizar su ingreso si:

24. Tanto los trajes como los vestidos de mujer se venden cada uno a \$ 30?

A) 10 trajes, 40 vestidos.
B) 20 trajes, 30 vestidos.
C) 30 trajes, 20 vestidos.
D) 25 trajes, 25 vestidos.
E) 16 trajes, 34 vestidos.

25. Un traje se vende por \$ 40 y un vestido de mujer se vende a \$ 20?

A) 50 trajes, 60 vestidos.
B) 20 trajes, 20 vestidos.
C) 30 trajes, 10 vestidos.
D) 15 trajes, 0 vestidos.
E) 40 trajes, 0 vestidos.

26. Un traje se vende por \$ 30 y un vestido de mujer por \$ 20?

A) 20 trajes, 30 vestidos.
B) 20 trajes, 20 vestidos.
C) 20 trajes, 10 vestidos.
D) 10 trajes, 10 vestidos.
E) 30 trajes, 20 vestidos.

27. Un artesano teje mantos de alpaca y de algodón mensualmente, puede tejer desde 10 hasta 60 mantas de alpaca y un máximo de 120 mantas de algodón. Si la ganancia por cada manta de alpaca es de S/.134 y por cada manta de algodón S/.20. ¿Cuántas mantas de cada tipo debe tejer al mes para que maximice sus ganancias?, se sabe por experiencia propia que el artesano puede tejer mensualmente a lo más 160 mantas combinadas.

A) 50 de alpaca y 110 de algodón
B) 70 de alpaca y 90 de algodón
C) 60 de alpaca y 100 de algodón
D) 80 de alpaca y 80 de algodón
E) 90 de alpaca y 70 de algodón

28. Una editorial planea utilizar una sección de planta para producir 2 revistas. La utilidad unitaria es de \$2 para la revista "A" y de \$3 para la revista "B". La revista "A" requiere 4h para su impresión y 6h para su encuadernación. La revista "B" requiere 5h para imprimirse y 3h para su encuadernado. Si se dispone de 200h para imprimir y de 210h para encuadernar, determine la máxima utilidad que se puede obtener.

A) \$70 B) \$110 C) \$120
D) \$140 E) \$160

29. Determine el mínimo valor de la función: $F(x;y)=2x+8y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ 5y \leq x + 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

A) $\frac{104}{9}$ B) $\frac{104}{7}$ C) $\frac{91}{3}$
D) 13 E) 26

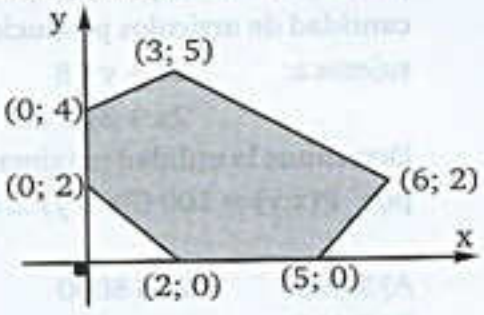
30. Determine el máximo valor de la función: $F(x;y) = x + y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq 2 \\ 2x + y \geq 10 \\ 2x + y \leq 22 \end{cases}$$

A) 6 B) 2 C) 12
D) 16 E) 8

31. Calcule el valor máximo y el valor mínimo de la función objetivo: $C = 3x + 2y + 5$ en la región de la figura. Dar como respuesta la suma de tales valores.

A) 24
B) 28
C) 32
D) 36
E) 39



32. Calcule el máximo valor de $Z = 5x + 4y$, tal que se cumpla:

$$\begin{cases} 6x + 4y \leq 24 \\ x + 2y \leq 6 \\ -x + y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A) 0 B) 5 C) 10
D) 15 E) 21

33. Trace la región S definida por las restricciones dadas y marque sus vértices. Calcule el valor máximo de $C = 3x + y$ en S.

$$(S)\begin{cases} 3x - 4y \geq -12 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ 3x - y \leq 15 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

A) 9 B) 15 C) 12
D) 18 E) 21

34. Maximizar la función: $F(x;y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y$

sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 8x + 7y \leq 56 \\ 8x + 3y \geq 24 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{11}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

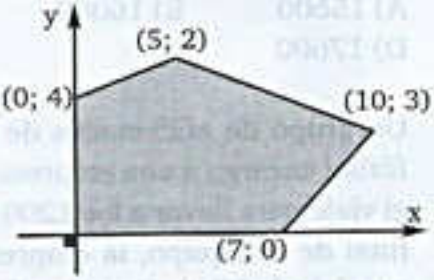
team CALAPENSHKO

35. Maximizar la función: $F(x; y) = 2x + y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} y \le x + 2 \\ x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

A) 6 B) 14 C) 15
D) 20 E) 30

36. Si la función objetivo $Z = ax + 3y$, $a > 0$, toma un valor máximo de 39 en la región admisible mostrada, el valor de "a" es:



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

37. Maximizar: $F(x; y) = 4x + 6y$, sujeta a:

$$x + 3y \le 6$$
$$3x + y \le 8$$
$$x \ge 0 \ ; \ y \ge 0$$

A) 9,8 B) 10,7 C) 12
D) 16,5 E) 18

38. Maximizar la función: $F(x; y) = 4x + 3y$, sujeta a las restricciones

$$30x + 20y \le 1800$$
$$x + y \le 80$$
$$x \ge 0 \ ; \ y \ge 0$$

A) 220 B) 240 C) 250
D) 260 E) 280

39. Minimizar: $C(x; y) = 6x + 8y$, sujeta a las restricciones:

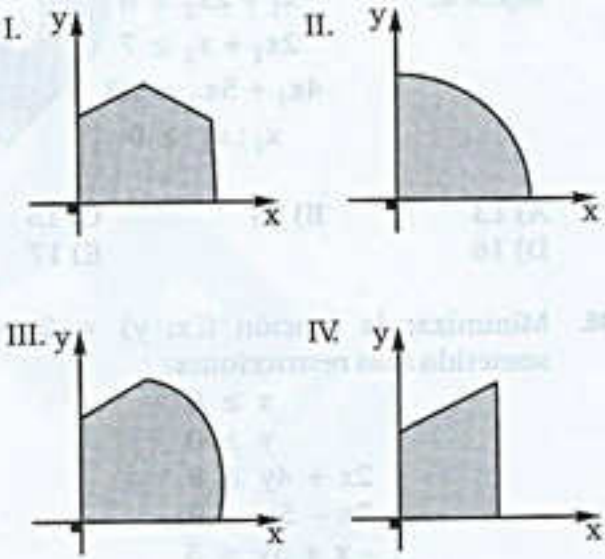
$$40x + 10y > 2400$$
$$10x + 15y > 2100$$
$$5x + 15y > 1500$$
$$x > 0 \ ; \ y > 0$$

A) 1100 B) 1400 C) 1200
D) 1800 E) 1920

40. En un examen hay preguntas del tipo "A" que valen 20 puntos y del tipo "B" que valen 30 puntos. El tiempo para contestar una pregunta del tipo "A" es 4 minutos y para una del tipo "B" es 8 minutos. El tiempo máximo permitido para la resolución es de 96 minutos, y no se puede contestar más de 18 preguntas, suponiendo que un alumno contesta sólo respuestas correctas. ¿Cuántas preguntas de cada tipo deberá resolver para obtener la calificación máxima?

A) 11A y 7B B) 10A y 8B C) 12A y 6B
D) 13A y 5B E) 14A y 4B

41. A continuación se muestran 4 regiones en el plano xy, indique cuál(es) de ellas representa la región factible de un problema de programación lineal bidimensional.



A) I – IV B) I – II C) II – III
D) II – IV E) II – IV

42. Determine el máximo valor que asume:

$$f(x; y) = 2x + y$$

sujeto a:

$$y \le x + 2$$
$$y \le -x + 3$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

A) 6 B) 14 C) 15
D) 20 E) 30

team CALAPENSHKO

43. Encontrar el máximo valor de la expresión:

$$z = 4x + 3y$$

Si $(x; y) \in \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 30x + 20y \leq 1800$
$x + y \leq 80$
$x \geq 0, y \geq 0\}$

A) 220 B) 240 C) 250
D) 260 E) 280

44. Determine: $\text{Máx}(2x_1 + 3x_2)$
sujeto a: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
$5x_1 + 3x_2 \leq 15$
$x_1; x_2 \geq 0$

A) 8 B) 9 C) $\frac{69}{7}$
D) 10 E) 11

45. Minimice: $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a: $x_1 + 2x_2 \geq 8$
$2x_1 + x_2 \geq 7$
$4x_1 + 5x_2 \leq 29$
$x_1; x_2 \geq 0$

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

46. Minimizar la función $f(x; y) = 2x + 8y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

A) $\frac{104}{9}$ B) $\frac{104}{7}$ C) $\frac{91}{3}$
D) $\frac{91}{7}$ E) 26

47. Halle el máximo valor de $z = 3x + 6y$, tal que:

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ 2x + \frac{y}{2} \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A) 200 B) 300 C) 400
D) 480 E) 600

48. Un granjero tiene 480 hectáreas en la que puede sembrar cebada o maíz. El calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación crucial del verano. Dados los márgenes de utilidad y requerimientos siguientes:

Maíz: Utilidad: \$ 40 por hectárea.
Trabajo: \$ 2 hrs. por hectárea.
Cebada: Utilidad: \$ 30 por hectárea.
Trabajo: \$ 1 hr. por hectárea.

¿Cuántas hectáreas de cada cereal debe plantar para maximizar su utilidad?

A) 15600 B) 16000 C) 16400
D) 17600 E) 18200

49. Un grupo de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transporte el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo, la empresa dispone de autobús de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio del viaje en cada autobús es de 252 dólares y el del viaje en microbús de 180 dólares. Sabiendo que la empresa dispone de 28 conductores. ¿Cuál es el costo máximo del viaje?

A) 6048 B) 6056 C) 6336
D) 70556 E) 7080

50. Dados a, b $\in \mathbb{R}$ y los problemas de programación lineal.

Mín ax + by ...(1) sujeto a $(x, y) \in D$.
Máx ax + by ...(2) sujeto a $(x, y) \in D$.
Sea (x_o, y_o) solución del problema (1).
Señale la alternativa correcta después de determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

I. $(-x_o, -y_o)$ es la solución del problema (2).
II. Si $D \neq \varnothing$ entonces las soluciones de los problemas (1) y (2) son distintos.
III. Si las soluciones de los problemas (1) y (2) coincide entonces $D = \{(x_o, y_o)\}$

ADMISIÓN UNI 2017 - I

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FFV E) FFF

team CALAPENSHKO

Capítulo 26

Números Complejos

CAPACIDADES:

- Identificar expresiones imaginarias
- Efectuar operaciones con expresiones imaginarias.
- Aplicar teoremas y propiedades en las distintas formas que adoptan los complejos imaginarios.

$$Z = x + yi \quad | \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad i = \sqrt{-1}$$

GEROLAMO CARDANO

LOS NÚMEROS COMPLEJOS fueron introducidos por primera vez por los matemáticos italianos del siglo XVI que arribaron a la conclusión de que sin ellos no se podrían resolver ciertas ecuaciones.

Gerolamo Cardano fue uno de los primeros en operar con raíces cuadradas de números negativos; trataba de resolver el siguiente problema que se discutía en esa época: "Dividir el número 10 en dos partes de tal forma que una de las partes multiplicada por la otra dé 40".

Cardano escribió "esto es claramente imposible, pero probemos" y encontró los dos números: $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$ cuya suma es 10 y cuyo producto es 40: pero también concluyó que trabajar con estas cantidades sería "tan alambicado como inútil".

Los números complejos evidentemente no pertenecían al sistema de los números reales si bien se les utilizó como algo conveniente se consideró que eran espurios o irreales y se les denominó imaginarios.

En efecto el gran matemático del siglo XVII René Descartes era tan escéptico en cuanto a la realidad de estos números que los rechazó en forma total.

Hoy en día nos percatamos de que no existe un sistema numérico único sino que hay muchos sistemas, todos son igualmente genuinos, si bien difieren entre sí.

team CALAPENSHKO

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN

Es el conjunto numérico denotado por $\mathbb{C}$ y definido de la manera siguiente:

$$\mathbb{C} = \{(x; y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

Donde se rigen dos operaciones de composición interna: adición (+) y multiplicación (.) más una relación de igualdad (=)

EXPRESIÓN IMAGINARIA

Se denomina así al resultado de extraer signo radical de índice par a números negativos, veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt{-4}$
- $\sqrt{-9}$
- $\sqrt[4]{-2}$
- $\sqrt[6]{-3}$
- $\sqrt[10]{-1}$

UNIDAD IMAGINARIA (i)

Convencionalmente se denomina así al resultado de extraer raíz cuadrada al número –1

$$i = \sqrt{-1} \,/\, i^2 = -1$$

Ahora con algunos ejemplos dados anteriormente tenemos:

- $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \,.\, -1} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{-1} = 2i$
- $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \,.\, -1} = \sqrt{9} \,.\, \sqrt{-1} = 3i$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Considerando exponentes enteros, en particular naturales, cada potencia de la unidad imaginaria se repetirá periódicamente cada cuatro resultados, veamos una tabla:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$
$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

- $i^3 = i^2 \,.\, i = -1 \,.\, i = -i$
- $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = -1 \,.\, -1 = 1$
- $i^5 = i^4 \,.\, i = 1 \,.\, i = i$
- $i^6 = i^4 \,.\, i^2 = 1 \,.\, -1 = -1$
- $i^7 = i^6 \,.\, i = -1 \,.\, i = -i$
- $i^8 = i^4 \,.\, i^4 = 1 \,.\, 1 = 1$
- $i^9 = i^8 \,.\, i = 1 \,.\, i = i$

team CALAPENSHKO

TEOREMAS

1) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

- $i^3 + i^4 + i^5 + i^6 = 0$

2) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$i^{4k} = 1$$

- $i^{24} = i^{4k} = 1$

twitter.com/calapenshko

3) $\forall\, k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Q}$

$$i^{4k+m} = i^m$$

- $i^{46} = i^{44+2} = i^{4k+2} = i^2 = -1$

PROPIEDADES

1) $$\frac{1+i}{1-i} = i \quad \wedge \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

2) $$(1+i)^2 = 2i \quad \wedge \quad (1-i)^2 = -2i$$

NÚMERO COMPLEJO

Es un par ordenado de componentes reales que consensuadamente se denota por z

$$z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}$$

Donde: x = parte real del complejo $z = Re(z)$
y = parte imaginaria del complejo $z = Im(z)$

- $Z = (2; -5)$ ↗ $Re(Z) = 2$; ↘ $Im(Z) = -5$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dado el complejo $Z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}$:

I. Si: $y = 0$, entonces Z es un complejo real.

II. Si: $x = 0 \wedge y \neq 0$, entonces Z es un número imaginario puro.

III. Si: $x = 0 \wedge y = 0$, entonces Z es un complejo nulo.

IV. Si: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, entonces Z es un número imaginario

team CALAPENSHKO

FORMA RECTANGULAR, CARTESIANA O BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

$$z = (x; y) = x + yi \,/\, x, y \in \mathbb{R} \,;\, i = \sqrt{-1}$$

- $Z = 8 - 3i$ → $\text{Re}(Z) = 8$, $\text{Im}(Z) = -3$
- $Z = -2 + i$ → $\text{Re}(Z) = -2$, $\text{Im}(Z) = 1$

NÚMEROS COMPLEJOS ESPECIALES

Dado el complejo $Z = x + yi \,/\, x \wedge y \in \mathbb{R}$, se define:

I. Conjugado de Z ($\bar{Z}$)

$$\bar{Z} = x - yi$$

II. Opuesto de Z (Zop = Z*)

$$Z^* = -Z = -x - yi$$

- $Z = 5 - 2i$ → $\bar{Z} = 5 + 2i$, $\text{Zop} = -5 + 2i$
- $Z = 3i$ → $\bar{Z} = -3i$, $\text{Zop} = -3i$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Dados los complejos: $Z_1 = x + yi \;\wedge\; Z_2 = a + bi$, tenemos:

I. ADICIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \;\wedge\; Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 + Z_2) \in \mathbb{C}$$
$$Z_1 + Z_2 = x + yi + a + bi$$
$$\therefore\; Z_1 + Z_2 = (x + a) + (y + b)i$$

II. MULTIPLICACIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \;\wedge\; Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 \,.\, Z_2) \in \mathbb{C}$$
$$Z_1 \,.\, Z_2 = (x + yi) \,.\, (a + bi)$$
$$\therefore\; Z_1 \,.\, Z_2 = (ax - by) + (bx + ay)i$$

Ejemplo: Si $Z_1 = 4 + 3i \;\wedge\; Z_2 = 2 + i$
Encontrar $Z_1 + Z_2 \;\wedge\; Z_1 \,.\, Z_2$

Resolución: I. $Z_1 + Z_2 = 4 + 3i + 2 + i$
$\therefore\; Z_1 + Z_2 = 6 + 4i$

team CALAPENSHKO

También para $Z_1 - Z_2$ tenemos:

$$Z_1 - Z_2 = 4 + 3i - (2 + i)$$
$$Z_1 - Z_2 = 4 + 3i - 2 - i$$
$$\therefore \quad Z_1 - Z_2 = 2 + 2i$$

II. $$Z_1 \cdot Z_2 = (4 + 3i)(2 + i)$$
$$Z_1 \cdot Z_2 = 8 + 4i + 6i - 3$$
$$\therefore \quad Z_1 \cdot Z_2 = 5 + 10i$$

OBSERVACIÓN

Para efectuar una división entre números complejos donde el denominador es imaginario, se debe multiplicar a cada término por el conjugado del denominador, veamos un ejemplo:

Sea: $$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \rightarrow Z = \frac{4 + 3i}{2 + i} \; ; \; i = \sqrt{-1}$$

$$Z = \frac{(4 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{8 - 4i + 6i + 3}{(2)^2 - i^2}$$

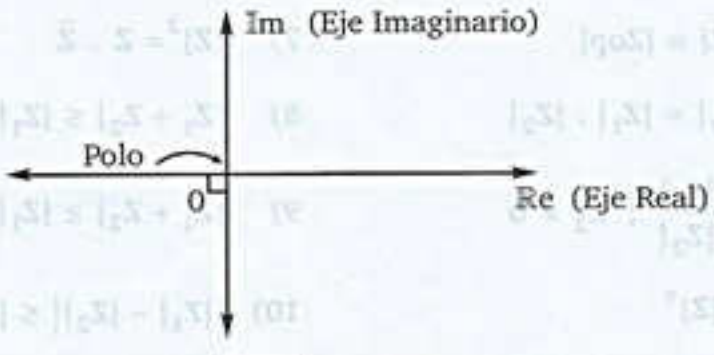
$$Z = \frac{11 + 2i}{5} \qquad \therefore Z = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$$

Teoremas: $\forall \; Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$

1) $\overline{(\overline{Z})} = Z$
2) $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
3) $\overline{(Z_1 - Z_2)} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$
4) $\overline{(Z_1 \cdot Z_2)} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
5) $\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \; ; \; Z_2 \neq 0$

PLANO COMPLEJO

También llamado plano de Gauss o Diagrama de Argan'd.



team CALAPENSHKO

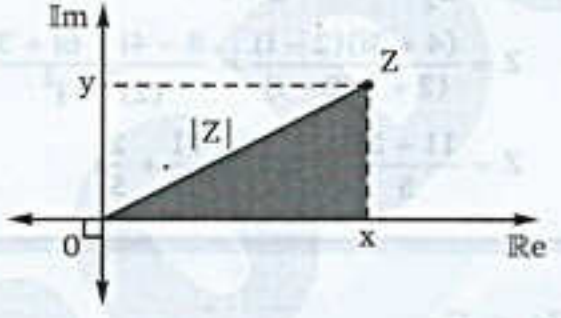
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

Dado el complejo $Z = x + yi \,/\, x \wedge y \in \mathbb{R}$ su representación gráfica en el plano complejo será un punto al cual llamaremos afijo, veamos:

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

Es la distancia que existe desde el polo hasta el afijo de Z, veamos:

$$Z = x + yi \,/\, x \wedge y \in \mathbb{R}$$



En el triángulo sombreada podemos aplicar el teorema de Pitágoras: $|Z|^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore \quad \boxed{|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- $Z = \sqrt{3} + i \rightarrow |Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$
  $|Z| = \sqrt{4} \qquad \therefore |Z| = 2$

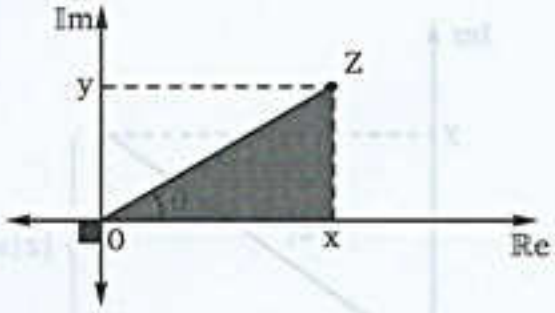
PROPIEDADES $\forall\ Z, Z_1 \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

1) $|Z| \geq 0$
2) $|Z| = |\bar{Z}| = |Zop|$
3) $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$
4) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}\ ;\ Z_2 \neq 0$
5) $|Z^n| = |Z|^n$
6) $\left|\sqrt[n]{Z}\right| = \sqrt[n]{|Z|}$
7) $|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}$
8) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
9) $|Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$
10) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 - Z_2|$

team CALAPENSHKO

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

Es la dirección del segmento de recta que contiene al módulo de Z medido en sentido antihorario y denotado por Arg (Z)



La forma general del argumento de Z es:

$$Arg(Z) = 2k\pi + \theta \ ; \ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Si $k = 0$ entonces $Arg\ (Z) = \theta$, al cual se le da el nombre de argumento principal de Z y debe verificar lo siguiente:

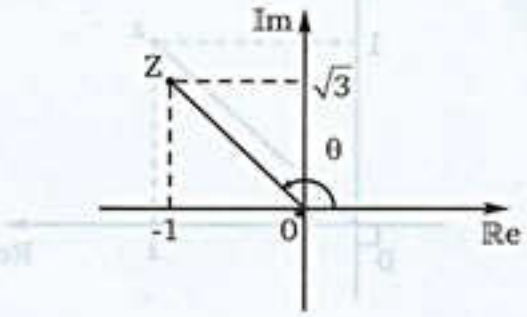
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Del triángulo sombreada tenemos:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \ \therefore \theta = Arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo: ¿Cuál es el argumento principal de Z, donde $Z = -1 + \sqrt{3}\,i$?

Resolución: Ubicamos a Z en el plano complejo:



θ = ángulo del segundo cuadrante

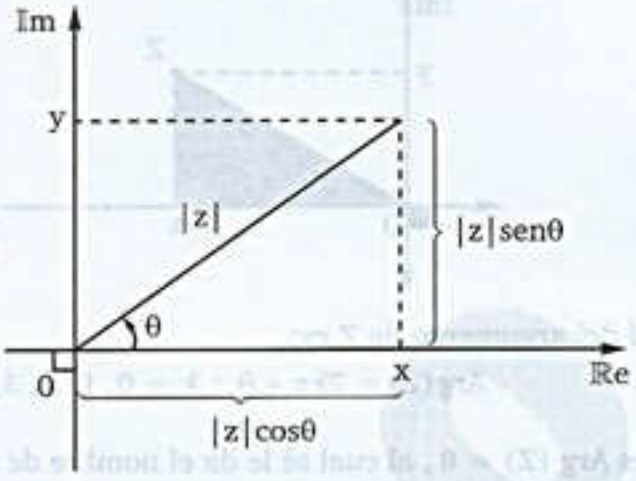
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \ \rightarrow \ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

OBSERVACIÓN

El argumento de un número complejo se puede expresar en radianes o en grados sexagesimales.

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el complejo $z = x + yi \mid x; y \in \mathbb{R}$



De la gráfica tenemos: $x = |z|\cos\theta \ ; \ y = |z|\,\text{sen}\theta$

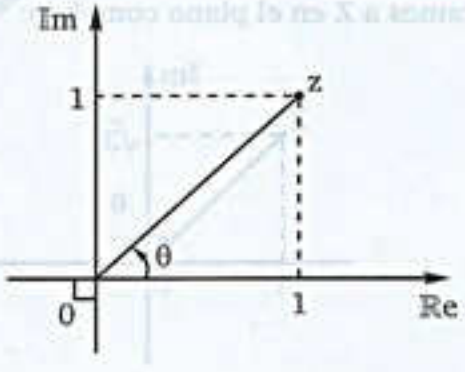
Ahora el complejo será: $z = |z|\cos\theta + |z|\,\text{sen}\theta\, i$

Cuya forma polar es: $\boxed{z = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)}$

Siendo su forma abreviada: $z = |z|\,\text{cis}\,\theta$

Ejemplo: Expresar en forma polar al siguiente complejo $z = 1 + i$

Resolución: Ubicando a z en el plano complejo



θ se ubica en el primer cuadrante:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Observar que: $|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\therefore \quad z = |z|\,\text{cis}\,\theta = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

team CALAPENSHKO

OPERACIONES EN FORMA POLAR

Dado los complejos $z_1 = |z_1|\,\text{cis}\theta_1$; $z_2 = |z_2|\,\text{cis}\theta_2$; $z = |z|\,\text{cis}\theta$ y el número natural "n"

1. MULTIPLICACIÓN

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

2. DIVISIÓN

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)\ ;\ z_2 \neq 0$$

3. POTENCIA (Fórmula de De Moivre)

$$z^n = (|z|\,\text{cis}\theta)^n = |z|^n \cdot \text{cis}(n\theta)$$

Esta relación también se verifica cuando n es un entero negativo, siendo $z \neq 0$.

4. RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\,\text{cis}\theta} = \sqrt[n]{|z|}\,\text{cis}\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)$$

Donde $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots.;\ (n-1)$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

Consideremos al complejo : $z = 1 = 1 + 0i$, observar que $|z| = 1$

Cuya forma polar es : $z = \cos(0°) + \text{sen}(0°)$

$z = |z|\,\text{cis}(0°) = \text{cis}(0°)$

Extrayendo raíz cúbica : $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\text{cis}(0°)} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi + 0}{3}\right)$

$$\sqrt[3]{z} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Si k = 0, tenemos : $\sqrt[3]{z} = \text{cis}(0°) = \cos(0°) + i\,\text{sen}(0°)$

$\sqrt[3]{z} = 1$

Si k = 1, tenemos : $\sqrt[3]{z} = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\sqrt[3]{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Si k = 2, tenemos : $\sqrt[3]{z} = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$$\sqrt[3]{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Consensuadamente cuando $k = 1$, $\sqrt[3]{z} = w$ y cuando $k = 2$, $\sqrt[3]{z} = w^2$

En resumen :

$$\sqrt[3]{1} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 \end{cases}$$

PROPIEDADES

1) Las tres raíces cúbicas de la unidad suman cero:

$$\boxed{1 + w + w^2 = 0}$$

2) $\forall k \in \mathbb{Z} \mid 3k =$ Múltiplo de tres

$$\boxed{w^{3k} = 1}$$

- $w^{108} = w^{3.36} = w^{3k} = 1$

3) $\forall k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{w^{3k+m} = w^m}$$

- $w^{50} = w^{48+2} = w^{3k+2} = w^2$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el complejo $z = x + yi \mid x ; y \in \mathbb{R}$, su forma exponencial se define de la manera siguiente:

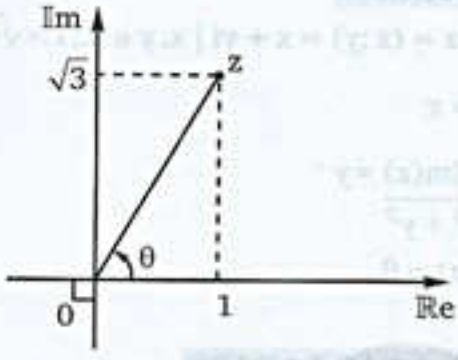
$$\boxed{z = |z|\, e^{\theta i}}$$

Donde θ es el argumento principal de z y e es el número de Napier cuyo valor aproximado es 2,7182

team CALAPENSHKO

Ejemplo: Representar en forma exponencial al siguiente número complejo $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

Resolución: Ubicando a z en el plano complejo



θ se ubica en el primer cuadrante:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Observar que: $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\therefore \quad z = |z|\,e^{\theta i} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

RELACIÓN ENTRE LA FORMA EXPONENCIAL Y LA FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el complejo $z = x + yi \mid x; y \in \mathbb{R}$

En forma polar tenemos: $z = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$

En forma exponencial tenemos: $z = |z|\,e^{\theta i}$

Por tratarse del mismo complejo podemos plantear lo siguiente:

$$|z|\,e^{\theta i} = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$$

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta}$$

Relación matemática conocida como **la fórmula de Euler**, también:

$$\boxed{e^{-\theta i} = (\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}$$

TEOREMAS ADICIONALES

1) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{cis}(\theta_1) = \text{cis}(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

2) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$e^{\theta_1 i} = e^{\theta_2 i} \quad \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. DEFINICIONES PREVIAS

Dado el complejo: $z = (x;y) = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Parte real de $z = \mathbb{R}e(z) = x$

Parte imaginaria de $z = \mathbb{I}m(z) = y$

Módulo de $z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argumento de $z = Arg\,(z) = \theta$

2. GRÁFICA RELATIVA A LAS PARTES

2.A. La gráfica de $\mathbb{R}e(z) = x$ es una recta vertical.

2.B. La gráfica de $\mathbb{I}m(z) = y$ es una recta horizontal.

2.C. Las gráficas de: $\mathbb{R}e(z) > x;\ \mathbb{R}e(z) < x;\ x_1 < \mathbb{R}e(z) < x_2$

$\mathbb{I}m(z) > y;\ \mathbb{I}m(z) < y;\ y_1 < \mathbb{I}m(z) < y_2$

son semiplanos.

3. GRÁFICA RELATIVO AL ARGUMENTO

3.A. El gráfico $Arg(z) = \theta$ es el conjunto de números complejos que tienen por argumento θ.

3.B. El gráfico de $\theta_1 < Arg(z) < \theta_2$ es un semiplano comprendido entre los argumentos θ_1 y θ_2 cuyo vértice del ángulo es el origen de coordenadas.

3.C. El gráfico de $\theta_1 < Arg(z - z_0) < \theta_2$ es similar al caso anterior con vértice en z_0.

4. GRÁFICA RELATIVA AL MÓDULO

4.A. La gráfica de: $|z - z_0| = r$, es una circunferencia de centro en z_0 y radio r.

4.B. La gráfica de: $|z - z_0| < r$, es un círculo que no incluye a la circunferencia.

4.C. La gráfica de: $|z - z_0| > r$, es el semiplano fuera de la circunferencia; no incluye a la circunferencia.

4.D. La gráfica de: $r_1 < |z - z_0| < r_2$, es una corona circular.

NOTA

Si en cualquier caso citado anteriormente se sustituye un signo de relación simple por su correspondiente signo doble ($>$ por $\geq$ o $<$ por $\leq$) se deberá incluir como solución la frontera que origina la línea.

team CALAPENSHKO

Ejemplo 1: Graficar el conjunto:

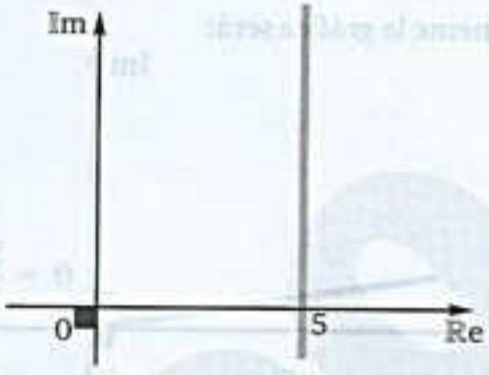
$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 5\}$$

Resolución:

Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $x = 5$

La cual nos indica una recta vertical, en el plano complejo:



$x=5$ es el lugar geométrico de todos los $z = x + yi$ tal que $\mathrm{Re}(z) = 5$

Ejemplo 2: Graficar el conjunto:

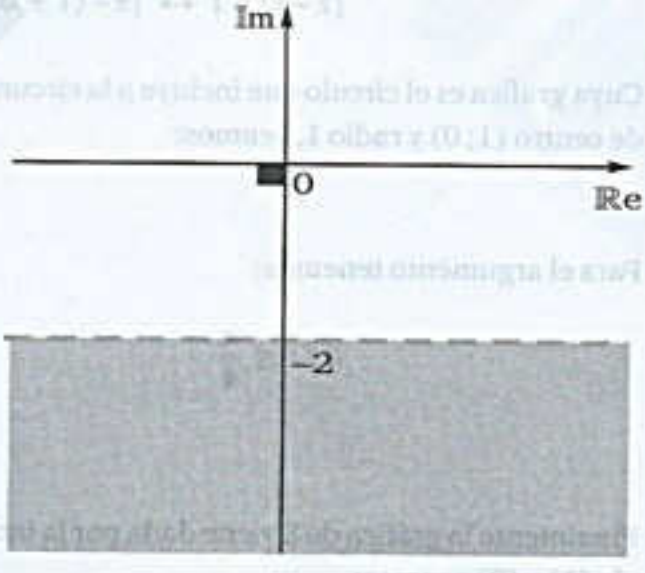
$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) < -2\}$$

Resolución:

Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $y < -2$

La desigualdad corresponde a un semiplano ubicado por debajo de la recta $y = -2$, sin incluir a esta.



El semiplano sombreado es el lugar geométrico de todos los $z = x + yi$ tal que $\mathrm{Im}(z) < -2$

team CALAPENSHKO

Ejemplo 3: Graficar el conjunto:

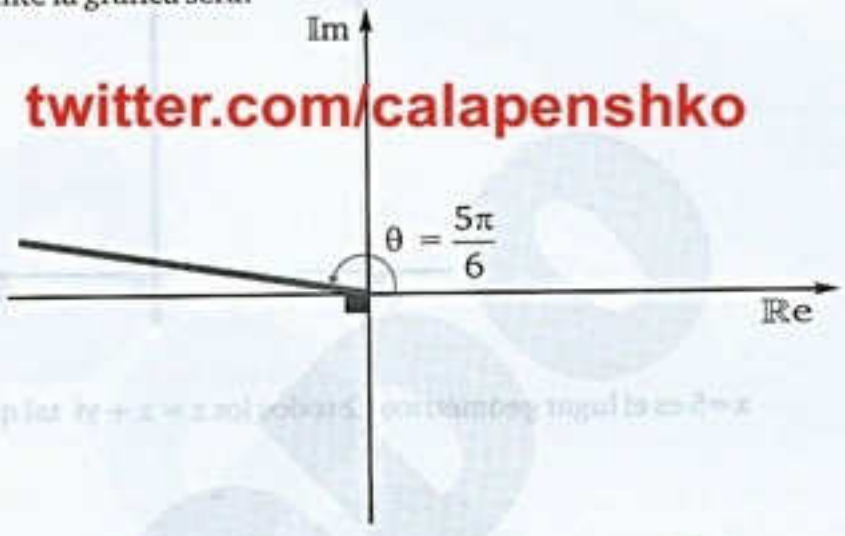
$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Resolución:

Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6}$

Finalmente la gráfica será:



twitter.com/calapenshko

Ejemplo 4: Graficar:

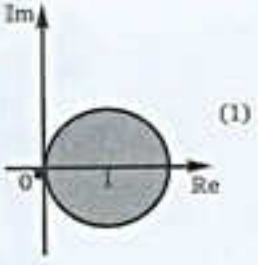
$$S = \{ z = re^{\theta i} \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \}$$

Resolución:

Por condición tenemos:

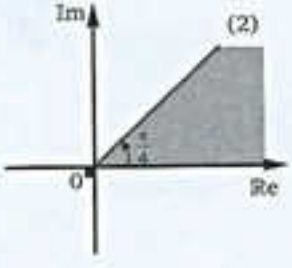
$$|z-1| \leq 1 \leftrightarrow |z-(1+0i)| \leq 1$$

Cuya gráfica es el círculo que incluye a la circunferencia de centro (1; 0) y radio 1, veamos:

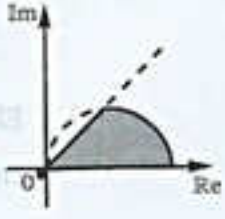


Para el argumento tenemos:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

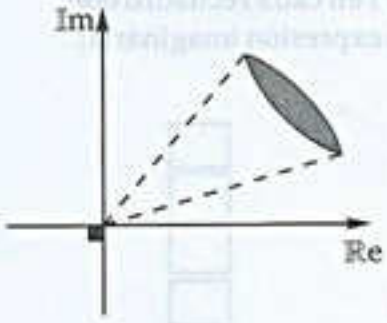


Finalmente la gráfica de S viene dada por la intersección de (1) y (2) veamos:



team CALAPENSHKO

Ejemplo 5: A continuación se muestra la gráfica de todos los complejos $z/z = x + yi$, luego la gráfica de $\bar{z}$ será:

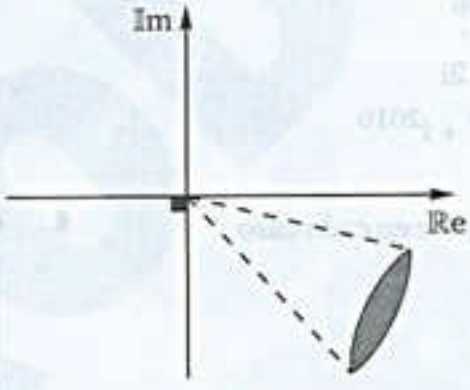


Resolución: En el problema se da "z" y se pide "$\bar{z}$", como:

$$z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Como z pertenece al primer cuadrante, se deduce que: $x > 0 \ \wedge \ y > 0$; luego $\bar{z}$ pertenece al cuarto cuadrante.

Finalmente la gráfica de todos los $\bar{z}$ viene dado por:



OBSERVACIONES

I. Las gráficas de $z \wedge \bar{z}$ son simétricas con respecto al eje Real.

II. Las gráficas de $z \wedge zop$ son simétricas con respecto al polo.

team CALAPENSHKO

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Coloca un visto (√) en cada recuadro que corresponde a una expresión imaginaria:

A) $\sqrt[3]{-2}+\sqrt[5]{-8}$ ☐
B) $\sqrt{4}+\sqrt{3}$ ☐
C) $\sqrt{-2}+\sqrt{-1}$ ☐
D) $\sqrt[4]{-10}+\sqrt[6]{-6}$ ☐
E) $\sqrt{-2^2}+\sqrt[4]{-4^4}$ ☐

2. Reducir en cada caso siendo $i=\sqrt{-1}$

A) $i^2+i^4+i^6$
B) $i-i^3+i^5$
C) $i^{24}+i^{48}+i^{36}$
D) $i^{243}+i^{183}+2i$
E) $i^{2008}+i^{2009}+i^{2010}$

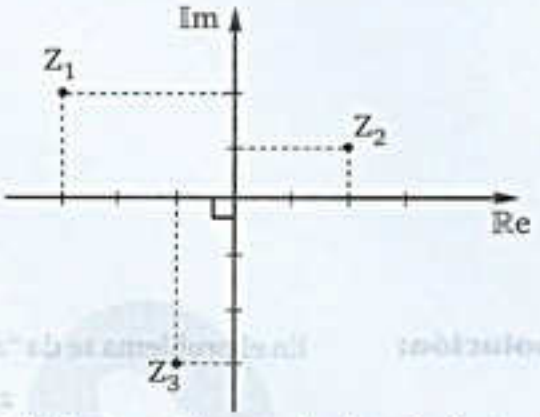
3. Mostrar el equivalente en cada caso

A) $i^{2^{3^4}}$
B) $i^{3^{5^7}}$
C) $\frac{1+i}{1-i}-i$
D) $\frac{\sqrt{2i}}{1+i}-1$
E) $\frac{\sqrt[9]{i}}{i}+1$

4. Efectuar las operaciones indicadas:

A) $(2i+1).(2-i)$
B) $(3-2i).(1+i)$
C) $(5+i).(2-i)+i$
D) $(3-5i).(1-i)-i$
E) $(3+2i).(2-3i)+1$

5. Extrayendo la información necesaria del diagrama adjunto.



Efectuar cada una de las siguientes operaciones:

A) $Z_1+Z_2-Z_3$ B) $Z_1.Z_2+Z_2.Z_3$
C) $Z_1.Z_3+Z_2$
D) $\frac{Z_1}{Z_2}+\frac{Z_2}{Z_3}$ E) $\frac{Z_3}{Z_1}+\frac{Z_1}{Z_3}$

6. Completa las filas de la tabla adjunta:

EXPRESIÓN Z	Re(Z)	Im(Z)	|Z|
$(2+3i).(1-i)+i$			
$(5-2i).(2+i)-i$			
$\frac{3+4i}{2-i}$			
$\frac{5+2i}{3-2i}$			
$\frac{7-2i}{2-7i}$			

7. Graficar cada uno de los conjuntos:

A) $S=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=-8\}$
B) $S=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)\leq 2\}$
C) $S=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}\}$
D) $S=\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{\pi}{3}<\mathrm{Arg}(z)\leq\frac{\pi}{2}\}$
E) $S=\{z\in\mathbb{C}\mid |z+1+i|\geq 4\}$

team CALAPENSHKO

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 El equivalente de:

$$K=\frac{i^4+i^6+i^8+i^{10}+\ldots+i^{102}}{i^7+i^{14}+i^{21}+i^{28}+\ldots+i^{343}}$$

Resolución: Observar que en el numerador los términos alternadamente son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} i^{4m}=1 \\ i^{4m+2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad i^{4m}+i^{4m+2}=0;\ \forall\ m\in\mathbb{Z}$$

$$K=\frac{0+0+\ldots+0}{i^7+i^{14}+i^{21}+i^{28}+\ldots+i^{343}}$$

$$K=\frac{0}{i^7+i^{14}+i^{21}+i^{28}+\ldots+i^{343}}$$

$$\therefore\quad K=0$$

PROBLEMA 2 Siendo a y b reales que verifican:

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i+1}\right)\left(1+\frac{1}{i+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{i+99}\right)=a+bi$$

Calcular: "a – b"

Resolución: Efectuando cada paréntesis:

$$\left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{i+2}{i+1}\right)\left(\frac{i+3}{i+2}\right)\ldots\left(\frac{i+100}{i+99}\right)=a+bi$$

Simplificando en el primer miembro, se tendrá

$$\frac{i+100}{i}=a+bi$$

$$\frac{i}{i}+\frac{1}{i}.100=a+bi$$

$$1-100i=a+bi \quad \begin{array}{l}\nearrow\ a=1 \\ \searrow\ b=-100\end{array}$$

$$\therefore\quad a-b=101$$

PROBLEMA 3 Calcular: $\frac{a}{b}$, a partir de:

$$\frac{1}{a+bi}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=1+i\ ;\quad a,b\in\mathbb{R}^*$$

Resolución: Observar que: $\frac{1+i}{1-i}=i$, luego:

$$\frac{1}{a+bi}+(i)^2=1+i$$

$$\frac{1}{a+bi}-1=1+i$$

$$\frac{1}{a+bi}=2+i \Leftrightarrow a+bi=\frac{1}{2+i}$$

$$a+bi=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{5}$$

$$a+bi=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \quad \begin{cases} a=\frac{2}{5} \\ b=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\therefore \ \frac{a}{b}=-2$$

PROBLEMA 4 Determine una forma más simple de la expresión:

$$N=\sqrt{2\,.\,\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

Resolución: Observar que $i \diamond i^5$, luego:

$$N=\sqrt{2\,.\,\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i^5}}}}$$

$$N=\sqrt{2\,.\,\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$$

$$N=\sqrt{2\,.\,\sqrt{i-\sqrt{(1+i)^2}}}$$

$$N=\sqrt{2\,.\,\sqrt{i-1-i}}=\sqrt{2\,.\,\sqrt{-1}}$$

$$N=\sqrt{2i}=\sqrt{(1+i)^2}$$

$$\therefore \ N=1+i$$

PROBLEMA 5 Para qué valor real de "m" el complejo:

$$\frac{m+3i}{2-5i}$$

será imaginario puro.

Resolución: Por condición se plantea:

$$\frac{m+3i}{2-5i}=ki \ ; \ k \in \mathbb{R}^*$$

$$m+3i=5k+2ki \ ;$$

de donde: $2k=3 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

$$m=5k \Leftrightarrow m=5\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \ m=\frac{15}{2}$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

29 de agosto del 2020

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 6 Si $\{z, w\} \subset \mathbb{C}$ mostrar el equivalente de la expresión:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right)$$

Resolución: Sea K el equivalente, luego

$$K=\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

sean: $z = a + bi \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = a$

$w = x + yi \Rightarrow \operatorname{Re}(w) = x$

sumando z y w: $z + w = (a + x) + (b + y)\,i$

de donde tenemos: $\operatorname{Re}(z + w) = a + x$

$$\boxed{\operatorname{Re}(z+w)=\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(w)}$$

Ahora en la relación (1) se tendrá:

$$K=\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}+\frac{w}{z+w}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z+w}{z+w}\right)$$

$$K=\operatorname{Re}(1)$$

$$\therefore \quad K=1$$

PROBLEMA 7 Sabiendo que: $\sqrt{a+bi}=x+yi$; donde a, b, x, y son reales. Calcular el valor de:

$$\frac{b^2}{ay^2+y^4}$$

Resolución: Elevando ambos miembros de la igualdad mostrada al cuadrado se tendrá:

$$a+bi=(x^2-y^2)+(2xy)i\ ;$$

de donde: $a = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = a + y^2 \quad \ldots\ldots (1)$

$b = 2xy \Rightarrow b^2 = 4x^2y^2 \quad \ldots\ldots (2)$

(1) en (2): $b^2 = 4(a + y^2)y^2 \Leftrightarrow b^2 = 4(ay^2 + y^4)$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{ay^2+y^4}=4$$

PROBLEMA 8 Representar en forma binómica al complejo Z, donde:

$$z=\frac{(\cos 17^\circ+i\operatorname{sen}17^\circ)^3[\sqrt{2}(\cos 28^\circ+i\operatorname{sen}28^\circ)]^2}{(\cos 7^\circ+i\operatorname{sen}7^\circ)^{11}}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Teniendo en cuenta la fórmula de De Moivre, z será:

$$z = \frac{(\cos 51° + i\,\text{sen}\,51°)[2(\cos 56° + i\,\text{sen}\,56°)]}{\cos 77° + i\,\text{sen}\,77°}$$

$$z = \frac{2(\cos 51° + i\,\text{sen}\,51°)(\cos 56° + i\,\text{sen}\,56°)}{\cos 77° + i\,\text{sen}\,77°}$$

Ahora considerando la multiplicación y la división en forma polar:

$$z = \frac{2(\cos 107° + i\,\text{sen}\,107°)}{\cos 77° + i\,\text{sen}\,77°} = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,.\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad z = \sqrt{3} + i$$

PROBLEMA 9 Reducir: $K = e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Resolución: Teniendo en cuenta la fórmula de Euler y su relación consecuente

$$K = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$K = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad K = 1$$

PROBLEMA 10 Sabiendo que 1; w; w^2 son las tres raíces cúbicas de la unidad real. Calcular:

$$R = (\ldots((w^w)^{w^2})^{w^3}\ldots.)^{w^{50}}$$

Resolución: La expresión dada es:

$$R = (w)^{w\,.\,w^2\,.\,w^3\,.\,\ldots\,.\,w^{50}}$$

$$R = (w)^{w^{1+2+3+\ldots+50}}$$

Debemos tener en cuenta que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{50.51}{2} = 25\,.\,51 = 3k$$

$$R = (w)^{w^{3k}} = w^1 = w$$

$$\therefore \quad R = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 11 Determine un complejo cuyo argumento sea 60°. Sabiendo además que el producto de dicho complejo por el complejo que se obtiene al permutar sus partes es 16i.

Resolución:

Consideremos al siguiente complejo:

$$z = x + yi \,/\, x, y \in \mathbb{R}$$

Por condición: $\frac{y}{x} = \tan 60° \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x$

Como Arg(z) = 60°, z se ubica en el primer cuadrante razón por la cual x ∧ y son positivos.

Por condición: $(x + yi).(y + xi) = 16i$

$$(x + \sqrt{3}xi)(\sqrt{3}x + xi) = 16i$$

$$x^2.(1 + \sqrt{3}i).(\sqrt{3} + i) = 16i$$

$$x^2.(\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}) = 16i$$

$$x^2.(4i) = 16i \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$x = 2$$

Se sabe que: $y = \sqrt{3}x \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad z = 2 + 2\sqrt{3}i$$

PROBLEMA 12 Mostrar el equivalente de:

$$\frac{2}{i}\ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

Resolución:

Sea k el equivalente, luego: $K = \frac{2}{i}\ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

Debemos tener en cuenta que: $\frac{1+i}{1-i} = i$

Ahora en forma exponencial: $\frac{1+i}{1-i} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

Finalmente en k tenemos: $K = \frac{2}{i}\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

$$K = \frac{2}{i}.\frac{\pi}{2}i.\ln e$$

$$K = \pi.1$$

$$\therefore \quad K = \pi$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 13 Determine el menor entero positivo "n" de 4 cifras que verifica la condición:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = -i$$

Resolución: La condición dada es : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n = -i$

En forma exponencial : $e^{\frac{n\pi}{6}i} = e^{\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)i}$; $k \in \mathbb{N}$

Donde se cumple : $\frac{n\pi}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

$$n = 12k + 9$$

Por condición se plantea : $1000 \leq n < 10000$

$$1000 \leq 12k + 9 < 10000$$

$$82{,}5 \leq k \leq 832{,}5$$

Como n es mínimo, k debe ser mínimo en consecuencia $k = 83$

Finalmente tenemos : $n = 12k + 9 = 12 \,.\, 83 + 9$

$$\therefore \quad n = 1005$$

PROBLEMA 14 ¿Cuál es el menor valor de "n" que verifica:

$$(1+i)^n = 32i$$

Resolución: Nuestra estrategia consistirá en dar forma de una potencia de (1 + i) al segundo miembro, veamos:

$$32i - 2^5 i = 2^5 i^5 = (2i)^5$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría, podemos sustituir:

$$2i \text{ por } (1+i)^2$$

En consecuencia es válido plantear:

$$32i = [(1+i)^2]^5 = (1+i)^{10}$$

Así pues la igualdad dada se podrá escribir así:

$$(1+i)^n = (1+i)^{10}$$

Finalmente por comparación podemos reconocer que:

$$\therefore \quad n = 10$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 15 Si $z \subset C / |z+9| = 3|z+1|$; calcular: $|z|$

Resolución: Consideremos el complejo:

$$z = x + yi$$

Donde su módulo estará dado por:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad .....(1)$$

En la igualdad dada:

$$|z + 9| = 3|z + 1|$$

Reemplazando z por (x+yi):

$$|x + yi + 9| = 3|x + yi + 1|$$

Agrupando las partes reales:

$$|(x + 9) + yi| = 3|(x + 1) + yi|$$

Por definición de módulo:

$$\sqrt{(x+9)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado se tendrá:

$$(x+9)^2 + y^2 = 9[(x+1)^2 + y^2]$$

Efectuando y simplificando obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad .....(2)$$

Finalmente de (2) en (1):

$$\therefore \ |z| = 3$$

PROBLEMA 16 Si: $F(a + bi) = \dfrac{a + i}{1 - bi}$;

halle un equivalente de: $F(\sqrt{i})$

Resolución: Nuestra estrategia consistirá en hallar alguna relación de:

$$F(\sqrt{i}) \text{ con } F(a + bi);$$

para ello seguiremos el siguiente proceso:

Dada la siguiente igualdad: $i = 0 + i$; la expresamos en su forma exponencial:

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad .....\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

Extrayendo a ambos miembros signo radical de índice 2:

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}} \Rightarrow \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Utilicemos la fórmula de Euler en el 2do miembro:

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

team CALAPENSHKO

Reemplazando los valores trigonométricos, tendremos:

$$\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad .....(*)$$

De (*) se puede afirmar que: $F(\sqrt{i})=F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ .....(**)

Para poder aplicar el dato: $F(a+bi)=\frac{a+i}{1-bi}$

en(**),debemos reconocer que: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

luego: $$F(\sqrt{i})=F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{\sqrt{2}+2i}{2-\sqrt{2}i}$$

Para efectuar la división, multiplicamos al numerador y denominador por $2+\sqrt{2}i$:

$$F(\sqrt{i})=\frac{(\sqrt{2}+2i)(2+\sqrt{2}i)}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

$$F(\sqrt{i})=\frac{6i}{2^2-(\sqrt{2}i)^2}=\frac{6i}{6}$$

Después de efectuar, nos queda:

$$\therefore \quad F(\sqrt{i})=i$$

PROBLEMA 17 Entre los números complejos z que satisfacen la condición:

$$|z-5|=3.$$

Hallar el número complejo que tiene argumento positivo mínimo.

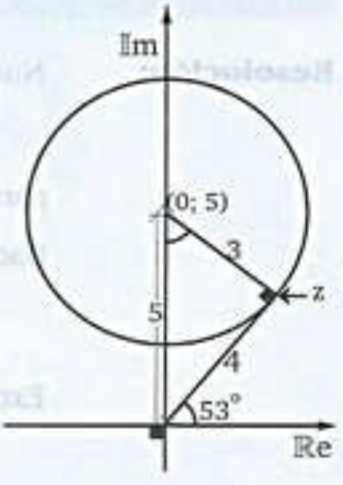
Resolución: Consideremos al número complejo: $z=x+yi / \{x;y\}\subset\mathbb{R}$,

ahora reemplazando esta expresión en la condición dada se tendrá:

$$|x+(y-5)i|=3$$

Aplicando la propiedad de módulo y elevando al cuadrado a ambos miembros obtenemos:

$$x^2+(y-5)^2=3^2$$



Debemos reconocer que la ecuación obtenida corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro en: (0; 5) y radio: 3. Este resultado se interpreta así:

"Todos los números complejos $z / |z-5i|=3$; se encuentran en una circunferencia de radio 3 y centro en (0; 5) ubicados en el plano complejo."

team CALAPENSHKO

Observar que el afijo del número complejo de menor argumento positivo queda determinado por la intersección de la tangente trazada a la circunferencia y la perpendicular desde el centro: (0; 5) finalmente con la ayuda del gráfico podemos deducir que: $|z| = 4 \wedge \text{Arg}(z) = 53^\circ$

con lo cuál el número complejo z se podrá expresar en forma polar así:

$$z = 4(\cos 53^\circ + i \operatorname{sen} 53^\circ) = 4\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$$

En consecuencia el número complejo pedido será:

$$\therefore z = \frac{12}{5} + \frac{16}{5}i$$

PROBLEMA 18 Halle el módulo máximo de aquel número complejo z que satisface:

$$|z - z^{-1}| = 2$$

Resolución: A partir de la condición tendremos que:

$$\left|\frac{z^2-1}{z}\right| = 2 \qquad \frac{|z^2-1|}{|z|} = 2$$

Multiplicamos ambos miembros por $|z|$:

$$|z^2 - 1| = 2|z| \qquad \text{.....(1)}$$

Utilizando la expresión polar de z:

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

La relación (1) nos sugiere elevar al cuadrado a ambos miembros, obteniendose:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \qquad \text{.....(2)}$$

Luego reemplazando (2) en (1), se tendrá:

$$||z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) - 1| = 2|z|$$

Efectuando la multiplicación indicada:

$$|(|z|^2 \cos 2\theta - 1) + i\,|z|^2 \operatorname{sen} 2\theta| = 2|z|$$

Utilizando la definición de módulo de un complejo, el 1er miembro quedará así:

$$\sqrt{(|z|^2 \cos 2\theta - 1)^2 + (|z|^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2} = 2|z|$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, efectuando y reduciendo, se obtiene:

$$|z|^4 - 2|z|^2(\cos 2\theta + 2) + 1 = 0$$

Utilizando la forma general para resolver una ecuación cuadrática tendremos:

$$|z|^2 = \frac{2(\cos 2\theta + 2) \pm \sqrt{4(\cos 2\theta + 2)^2 - 4}}{2}$$

Efectuando y simplificando, obtenemos:

$$|z|^2 = (\cos 2\theta + 2) \pm \sqrt{(\cos 2\theta + 2)^2 - 1}$$

Como se pide $|z|$ máximo solo se considera la raíz positiva:

$$|z|^2 = (\cos 2\theta + 2) + \sqrt{(\cos 2\theta + 2)^2 - 1}$$

Observar que: $|z|^2$ es máximo si y solo si cos 2θ es también máximo, por lo tanto cos 2θ = 1. Luego: $|z|^2_{máx} = 3 + \sqrt{8}$

Extrayendo raíz cuadrada, así se tendrá:

$$|z|_{máx} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

Finalmente aplicando transformaciones de radicales dobles a simples, se concluye:

$$\therefore\ |z|_{máx} = \sqrt{2} + 1$$

PROBLEMA 19 Determinar "y" en:

$$\sqrt[4]{i} = x + yi\ ;\quad \{x; y\} \subset \mathbb{R}$$

Resolución: Elevando al exponente 4 a ambos miembros de la igualdad mostrada tenemos:

$$i = (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 + 4xy(x^2 - y^2)i$$

Luego se cumple:

* $(x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 = 0 \rightarrow (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy) = 0$

  De donde: $x^2 - y^2 = -2xy \ \vee\ x^2 - y^2 = 2xy$

* $4xy(x^2 - y^2) = 1$

  Si: $x^2 - y^2 = -2xy \rightarrow x^2y^2 = -\frac{1}{8}$ ¡No es Real!

En consecuencia debemos resolver únicamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2xy \quad \text{.....(1)} \\ 4xy(x^2 - y^2) = 1 \text{.....(2)} \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (2) conseguimos:

$$xy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ \vee\ xy = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{.....(3)}$$

Reemplazando (3) en (1) conseguimos:

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee\ x^2 - y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{.....(4)}$$

Observar que de (3) y (4) se forman los nuevos sistemas:

$$\text{(I)} \begin{cases} xy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} xy = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x^2 - y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

team CALAPENSHKO

Resolviendo ambos sistemas conseguimos:

$$\text{(I) } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(II) } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\therefore\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm 1}{2\sqrt{2}}}$$

NOTA

Se deja al lector la tarea de resolver el problema anterior teniendo en cuenta la aplicación de la radicación para números complejos en la forma polar.

PROBLEMA 20 Si: $z = \dfrac{a+bi}{x+yi}$; $x,y,a,b \in \mathbb{R}$ es un número real:

Calcular: $\dfrac{ay}{bx}$

Resolución: Efectuando la división indicada tenemos:

$$z = \frac{a+bi}{x+yi} = \frac{(a+bi)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}$$

$$z = \frac{(ax+by)+(bx-ay)i}{x^2+y^2} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right)i$$

Como "z" es un número real, se cumple:

$$\frac{bx-ay}{x^2+y^2} = 0 \ \rightarrow\ bx - ay = 0$$

$$bx = ay$$

$$\therefore\ \frac{ay}{bx} = 1$$

PROBLEMA 21 Encontrar el complejo "z" que debe sumarse a: $(1-\sqrt{3}\,i)^4$ para que el resultado sea un complejo cuyo módulo sea cuatro y su argumento: 120°

Resolución: Tener en cuenta que:

$$1-\sqrt{3}\,i = -2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2\text{cis}(120^\circ)$$

twitter.com/calapenshko

$$1-\sqrt{3}\,i=-2\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\ \rightarrow\ 1-\sqrt{3}\,i=-2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$(1-\sqrt{3}\,i)^4=\left(-2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^4=16e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

Por condición se plantea:

$$16e^{\frac{8\pi}{3}i}+z=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$16e^{\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)i}+z=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$16e^{\frac{2\pi}{3}i}+z=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z=-12e^{\frac{2\pi}{3}i}=-12\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z=-12\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore\ z=6-6\sqrt{3}\,i$$

PROBLEMA 22 Si: $1, w \wedge w^2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad. Calcular:

$$N=(1+w-w^2)(1+w^2-w^4)(1+w^4-w^8)(1+w^8-w^{16})\ldots\text{ "6n" factores}$$

Resolución: Tener en cuenta que: $w^{3k}=1\ \wedge\ w^{3k+n}=W^n$

Luego en "N" se tendrá:

$$N=\underbrace{(1+w-w^2)(1+w^2-w)(1+w-w^2)(1+w^2-w)\ldots\ldots}_{\text{"6n" factores}}$$

Notar que:

$$N=\underbrace{(1+w-w^2)(1+w-w^2)\ldots\ldots}_{\text{"3n" factores}}\underbrace{(1+w^2-w)(1+w^2-w)\ldots\ldots}_{\text{"3n" factores}}$$

$$N=(1+w-w^2)^{3n}(1+w^2-w)^{3n}$$

Como: $1+w+w^2=0$ $\begin{cases}1+w=-w^2\\ 1+w^2=-w\end{cases}$

$$N=(-w^2-w^2)^{3n}(-w-w)^{3n}$$

$$N=(-2w^2)^{3n}(-2w)^{3n}=\left[(-2w^2)(-2w)\right]^{3n}$$

$$N=(4w^3)^{3n}=(4.1)^{3n}=4^{3n}$$

$$\therefore\ N=64^n$$

team CALAPENSHKO

PROBLEMA 23 Si: $\frac{x+19i}{yi-5}$ es el complejo conjugado de:

$\left(\frac{3-2i}{39+26i}\right)^{-0,5}$ Calcular "x + y" siendo: $y > 0$

Resolución: Efectuando la operación indicada

$$\left(\frac{3-2i}{39+26i}\right)^{-0,5} = \sqrt{\frac{13(3+2i)}{3-2i}} = \sqrt{\frac{13(3+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}}$$

$$\left(\frac{3-2i}{39+26i}\right)^{-0,5} = \sqrt{\frac{13(3+2i)^2}{13}} = \pm(3+2i)$$

Como: $\pm(3+2i)$ es el conjugado: $\frac{x+19i}{yi-5}$

Se plantea:

$$\frac{x+19i}{yi-5} = \pm(3-2i)$$

I) $\frac{x+19i}{yi-5} = 3-2i \rightarrow x+19i = 2y-15+(3y+10)i$

$$x = 2y-15$$

$$19 = 3y+10 \rightarrow y = 3 \wedge x = -9$$

II) $\frac{x+19i}{yi-5} = -3+2i \rightarrow x+19i = 15-2y-(3y+10)i$

$$x = 15-2y$$

$$19 = -(3y+10) \rightarrow y = -\frac{29}{3}$$

Por condición:

$$y > 0 \rightarrow y = 3 \wedge x = -9$$

$$\therefore x+y = -6$$

PROBLEMA 24 Hallar todas las soluciones de:

$$(1+z)^5 = (1-z)^5 \; ; \; z \subset C$$

Resolución: De la igualdad mostrada, tenemos:

$$\frac{(1+z)^5}{(1-z)^5} = 1 \rightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = e^{2k\pi i}; \; k \in Z$$

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \; ; \; k = 0; 1; 2; 3; 4$$

Aplicando propiedad de proporciones:

$$\frac{1}{z}=\frac{e^{\frac{2k\pi i}{5}}+1}{e^{\frac{2k\pi i}{5}}-1};\ k=0;1;2;3;4$$

$$\therefore\ z=\frac{e^{\frac{2k\pi i}{5}}-1}{e^{\frac{2k\pi i}{5}}+1};\ k=0;1;2;3;4$$

PROBLEMA 25 Si $z\subset\mathbb{C}$. Resolver:

$$e^z=1+i$$

Resolución: Sea: $z=x+yi/\{x;y\}\subset\mathbb{R}$. luego:

$$e^z=e^{x+yi}=e^x.e^{yi}=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)$$

$$e^z=e^x\cos y+ie^x\,\text{sen}\,y$$

Por condición: $e^z=1+i$, entonces:

$$1+i=e^x\cos y+ie^x\,\text{sen}\,y$$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l}e^x\cos y=1\\ e^x\,\text{sen}\,y=1\end{array}\right\}$$ Al dividir convenientemente tenemos: $\tan(y)=1$

$$\Rightarrow y=2k\pi+\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbb{Z}\quad\ldots\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}*\ e^x\cos y=1\ \rightarrow\ e^{2x}\cos^2 y=1\\ *\ e^x\,\text{sen}\,y=1\rightarrow\ e^{2x}\text{sen}^2 y=1\end{array}\right\}$$ Sumando $e^{2x}=2$

Tomando logaritmo natural: $\ln e^{2x}=\ln 2$

$$2x=\ln 2\ \rightarrow\ x=\frac{\ln 2}{2}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Finalmente de (1) y (2) tenemos:

$$\therefore\ z=\frac{\ln 2}{2}+\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)i;\ k\in\mathbb{Z}$$

PROBLEMA 26 Graficar el conjunto:

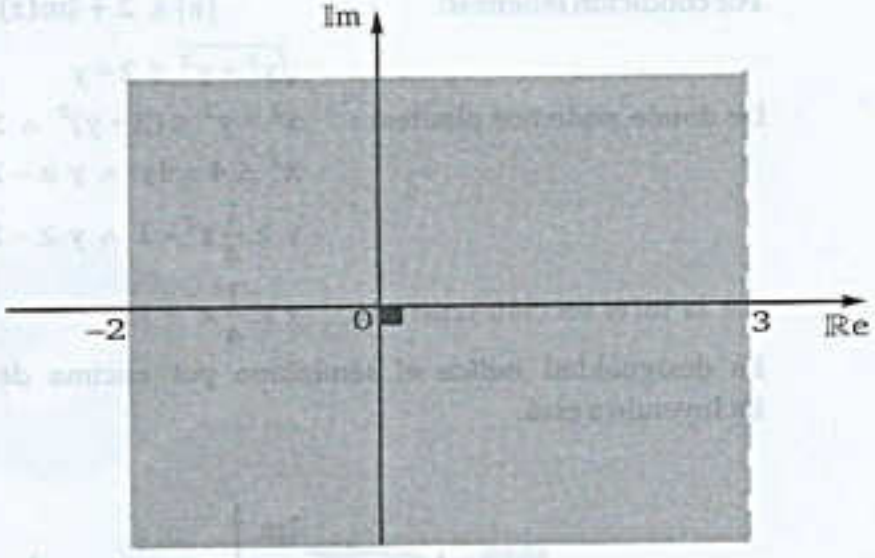
$$S=\{z\in\mathbb{C}\mid -2\le\mathbb{R}e(z)<3\}$$

team CALAPENSHKO

Resolución: Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $-2 \leq x < 3$

La desigualdad corresponde a un semiplano limitado por las rectas $x = -2$ (incluye a está) y $x = 3$ (no incluye a está), veamos la gráfica.



PROBLEMA 27 Graficar el conjunto:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

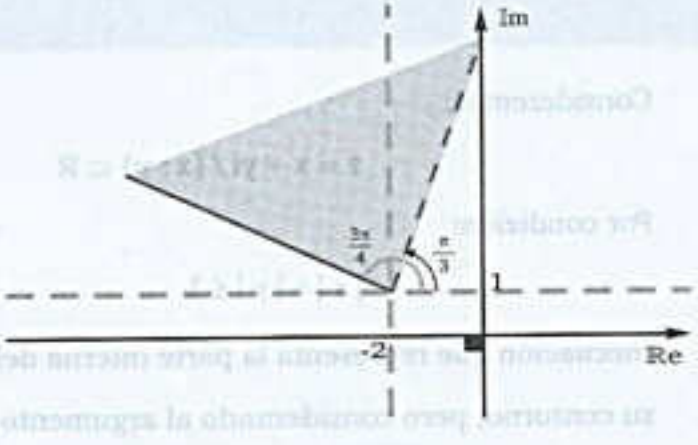
Resolución: Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos:

$$\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{3} < [\text{Arg}(z - (-2 + i)] \leq \frac{3\pi}{4}$$

Finalmente podemos apreciar que: $(-2\,;1) = -2 + i$ es el vértice, ahora en el plano tenemos:



team CALAPENSHKO

PROBLEMA 28 Graficar el conjunto:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 + \mathrm{Im}(z)\}$$

Resolución:

Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $|z| \leq 2 + \mathrm{Im}(z)$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 + y$$

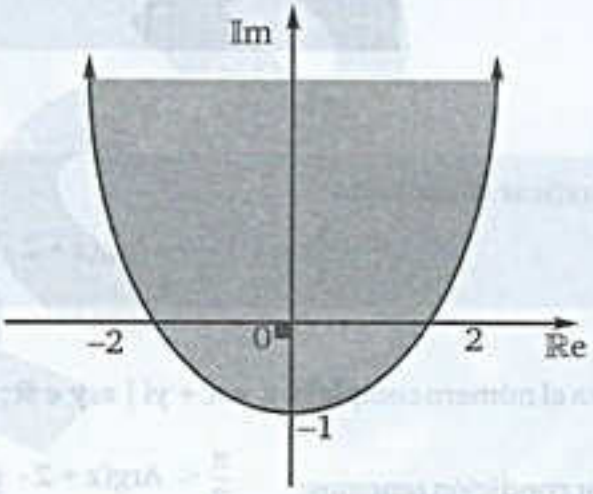
De donde podemos plantear: $x^2 + y^2 \leq (2+y)^2 \wedge 2 + y \geq 0$

$$x^2 \leq 4 + 4y \wedge y \geq -2$$

$$y \geq \frac{1}{4}x^2 - 1 \wedge y \geq -2$$

Por la intersección tenemos: $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 1$

La desigualdad indica el semiplano por encima de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ incluyendo a está.



PROBLEMA 29 Graficar:

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} / |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1; 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Resolución:

Consideremos:

$$z = x + yi / \{x; y\} \subset \mathbb{R}$$

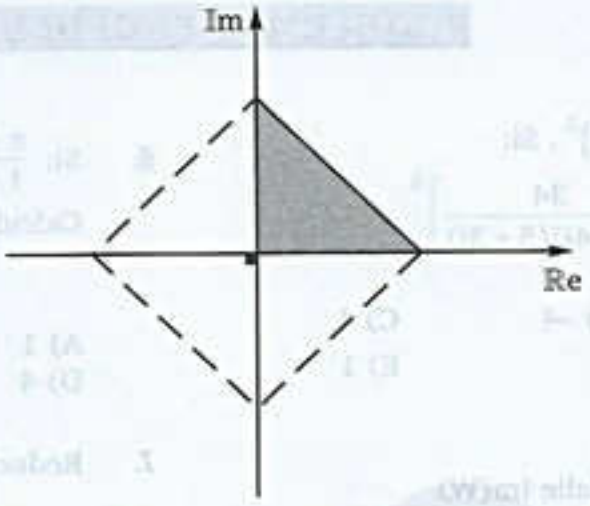
Por condición:

$$|x| + |y| \leq 1$$

Inecuación que representa la parte interna del cuadrado de lado $\sqrt{2}$ incluyendo su contorno, pero considerando al argumento tenemos:

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO



PROBLEMA 30 Graficar:

$$L = \{z \in C / |z-1| \leq 2|z+1|\}$$

Resolución: Consideremos

$$z = x + yi / \{x; y\} \subset \mathbb{R}$$

Por condición:

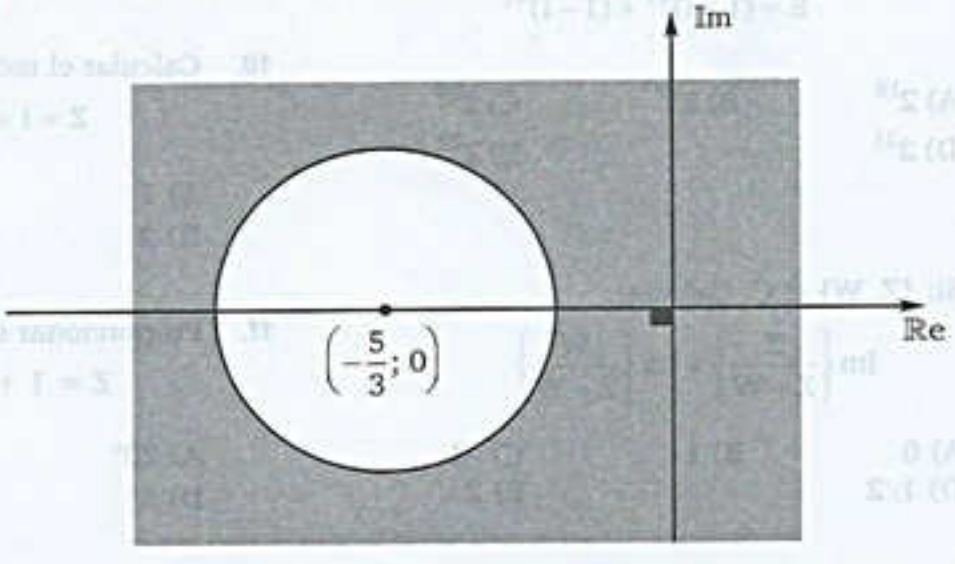
$$|(x-1)+yi| \leq 2|(x+1)+yi|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

De donde obtenemos:

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Inecuación que le corresponde a una circunferencia de centro en: $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ y radio: $\frac{4}{3}$ incluyendo su parte externa, veamos:



team CALAPENSHKO

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular: $\{Im\{Z\}\}^2$. Si:

$$Z=\left[\frac{34}{(1-4i)(5+3i)}\right]^2$$

A) 2 B) –4 C) 4
D) –1 E) 1

2. Si: Z = 2 + 3i. Halle Im(W)

$$W=\frac{Z-\bar{Z}}{3Z+Z^2}$$

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{221}$
D) $\frac{2}{221}$ E) $\frac{1}{21}$

3. A partir de:

$$(1+i)^2+(1+i)^4+(1+i)^6+(1+i)^8=x+yi$$

Calcular el valor de:

$$\frac{x+y}{x-y}$$

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/3

4. Reducir:

$$E=(1+i)^{41}+(1-i)^{41}$$

A) 2^{18} B) 2^{19} C) 2^{20}
D) 2^{21} E) 2^{22}

5. Si: {Z, W} ⊂ ℂ. Calcular:

$$Im\left\{\frac{Z}{Z+W}\right\}+Im\left\{\frac{W}{Z+W}\right\}$$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 1/2 E) 2

6. Si: $\frac{a+bi}{1+ci}$ es imaginario y $\frac{c-ai}{b+i}$ es real.
Calcular:

$$b^2+a^{-2}\,.\,c^2$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. Reducir:

$$E=\frac{2}{i}+\frac{3}{i^2}+\frac{4}{i^3}+.....+\frac{1001}{i^{1000}}$$

A) 500(1 + i) B) 500 C) 250i
D) 250(i – 1) E) 250

8. Calcular:

$$E=\sqrt{Z}^{\,n}+\sqrt{2n}^{\,2Z}$$

Si "Z" es un número real donde:

$$Z=\frac{3+ni}{6+4i}$$

A) 3/2 B) 5/2 C) 1/2
D) 2 E) 1

9. Calcular "n + k" a partir de:

$$i+2i^2+3i^3+.....+10i^{10}=n+ki$$

A) 1 B) –2 C) 0
D) –1 E) 2

10. Calcular el módulo del complejo:

$$Z=1+\cos 74°+i\,\text{sen}\,74°$$

A) 1 B) 1,2 C) 1,6
D) 2 E) 2,4

11. Proporcionar el argumento principal de:

$$Z=1+\cos 20°+i\,\text{sen}\,20°$$

A) 20° B) 80° C) 40°
D) 5° E) 10°

team CALAPENSHKO

12. Proporcionar el argumento del siguiente complejo:

$$Z=\frac{(3-4i)^2(-3+3\sqrt{3}i)}{(-\sqrt{5}-\sqrt{5}i)}$$

A) 37° B) 53° C) 59°
D) 60° E) 67°

13. Si: $Z \subset C/Z = x + yi,\ y \neq 0,\ 1+Z^2 \neq 0$

Entonces para que el número:

$$W=\frac{Z}{1+Z^2}$$

sea real el módulo de "Z" debe ser igual a:

A) 1 B) –1 C) 0
D) 2 E) 3

14. Calcular: Arg(z) si:

$$\left|\frac{z+1}{z-3}\right|=1 \ \wedge\ |z+2+3i|=5;\ \text{Im}\{z\}>0$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

15. Calcular el valor mínimo de: (n!)! a partir de:

$$i^{(n+1)!}+i^{n!}=0$$

A) 1 B) 2 C) 720
D) 5040 E) 420

16. Simplifíquese:

$$\frac{(1+2i)^{12}+4(1+2i)^8+4(i+2)^4}{(2-i)^8+4(2-i)^4+4}$$

A) 7 – 24i B) 7 + 24i C) –7 – 24i
D) –7 + 24i E) 24 + 7i

17. Calcular el resto de la siguiente división:

$$\frac{(\cos\theta+x\text{sen}\theta)^n-\cos\theta-x\text{sen}\theta}{x^2-1}$$

A) 1 B) 0 C) 2
D) i E) i + 2

18. ¿Cuál es el número complejo que multiplicado por "i" da otro complejo cuyo módulo es "k", que su componente real sea "t" (t < 0) y que esté en el tercer cuadrante? ($k^2 > t^2$)

A) $t+\sqrt{k^2-t^2}\,i$ B) $\sqrt{k^2-t^2}\,i$
C) $-t+\sqrt{k^2-t^2}\,i$
D) $-\sqrt{k^2-t^2}-ti$ E) $-\sqrt{k^2-t^2}+ti$

19. Para cuántos valores de "n" de dos cifras la expresión:

$$iC_2^n+i^2C_2^n+i^3C_3^n+.....+i^nC_n^n$$

se reduce a:

$$\sqrt{2}^{n-1}-1-i\sqrt{2}^{n-1}$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

20. Encontrar los números complejos "Z" tales que:

$$Z^7 \wedge \frac{1}{Z^2}$$

sean conjugados. Luego determinar los valores numéricos del polinomio:

$$P(Z)=Z^4+Z^3+Z^2+Z$$

para cada uno de los valores de Z obtenidos.

A) –1, 1, 4, 0 B) Sólo 1 C) Sólo 0
D) Sólo –1 E) Sólo 4

21. Resolver en $\mathbb{C}$:

a. $Z^2+2iZ=5$

b. $(1+i)^2+2+60i=(7+13i)Z$

Indicar cuál no es raíz de las ecuaciones anteriores:

A) i – 2 B) 3 + 5i C) 7 – 2i
D) –i – 2 E) –i + 2

22. Halle "Z" de:

$$\left|\frac{Z-12}{Z-8i}\right| = \frac{5}{3} \wedge \left|\frac{Z-4}{Z-8}\right| = 1$$

A) $6 + 17i$ B) $4 + 9i$ C) $6 + 10i$
D) $6 + 8i$ E) $A \vee D$

23. Un número real "x", que satisface la ecuación:

$$(\text{senx} + i\cos x)^4 = \text{senx} - i\cos x$$

es:

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $-\pi$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{5}$ E) π

24. Si: α, β, δ son las raíces del polinomio complejo:

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$$

Entonces: $(\alpha + \beta + \delta)$ es:

A) -1 B) 0 C) 1
D) i E) $-i$

25. Si:

$$|zi| = 4,\ \text{Arg}[z(1+i)] = \frac{\pi}{2}$$

entonces el número complejo "z" forma polar es:

A) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ B) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
C) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
D) $-\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ E) $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

26. ¿Qué valor debe asumir "n" $(n \le 0)$, tal que exista un único complejo "z", que verifique:

$$|z|^2 - 2iz + 2n(1 + i) = 0?$$

A) $\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$ B) $-\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-2$
D) $-\sqrt{2}-1$ E) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

27. Sea: $w_1 = -\text{sen}20° - i\cos 20°$, hallar:

$$\text{Arg}\,(w_1)$$

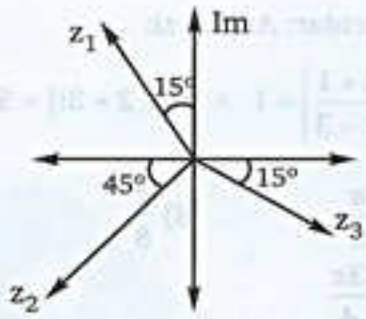
A) 190° B) 250° C) 240°
D) 340° E) 200°

28. Hallar el módulo de "Z" que verifica:

$$e^z = \sqrt[4]{\frac{e^\pi}{4}}(1+i)$$

A) $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\pi}{2}$

29. Dados los complejos: z_1; z_2; z_3 en el plano Gusseano:



Indique verdadero (V) o falso (F)

I. $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = 340°$
II. $\text{Re}(z_1) + \text{Im}(z_2) > 0$
III. $\text{Arg}(z_3) - \text{Arg}(z_1) = 240°$

A) FVV B) FVF C) VVV
D) FFF E) FFV

30. ¿Cuántos valores de dos cifras adopta "n", para que se verifique la igualdad:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = i$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

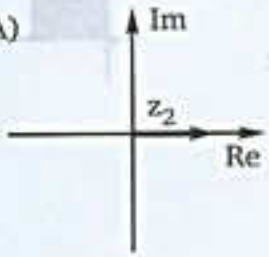
team CALAPENSHKO

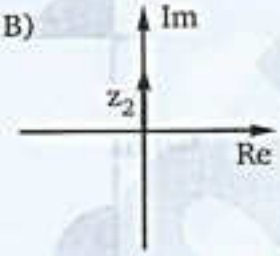
31. Si: $\phi_0; \phi_1; \phi_2; \phi_3; \phi_4; \phi_5$; son las raíces de orden 6 de la unidad. ¿Qué clase de número es:

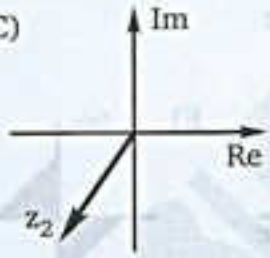
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 ?$$

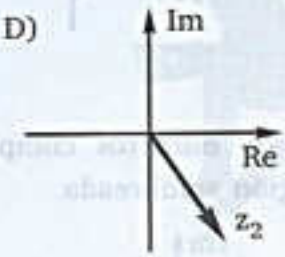
A) Nulo
B) Real
C) Imaginario Puro
D) Su módulo es 1
E) Más de una es correcta

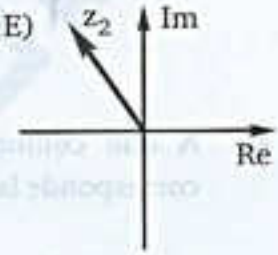
32. Dado el complejo: $z = e^{3+\alpha i}$, donde: $a \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8} \right\rangle$, indique el complejo: $z_2 = ze^{\beta i - 3}$, donde: $\beta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8} \right\rangle$.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

33. ¿Cuál será el módulo de aquel complejo "z" de argumento máximo y que verifique:

$$|z - 2\sqrt{3}| \leq 2 ; \text{ si: } 0 < \text{Arg}(z) > \pi ?$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. Si: $|z-1| = 1$. Hallar:

$$A = \frac{\text{Arg}(z^3 - z^2)}{\text{Arg}(z^2 - z)}$$

A) 4 B) $\frac{4}{3}$ C) 3
D) 1 E) $\frac{5}{4}$

35. Sea $A = \{z \in \mathbb{C}: 4(z-3)(\bar{z}-3) = |z|^2 + 15\}$.

Halle $z_0 \in A$ tal que $|z_0|$ sea mínimo.

ADMISIÓN UNI 2017 - I

A) -1 B) 1 C) i
D) $-7i$ E) 7

36. Si: $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \wedge |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1$

Entonces: Z_1, Z_2 y Z_3 son los vértices de un triángulo:

A) Equilátero B) Rectángulo
C) Escaleno
D) Obtusángulo E) N.A.

37. Halle el menor valor de "K"

$$\left\{\frac{Z - W}{1 - \bar{Z}W}\right\} \leq K$$

$\forall \{Z, W\} \subset \mathbb{C}$

A) 4 B) 2 C) 1/9
D) 1 E) 1/2

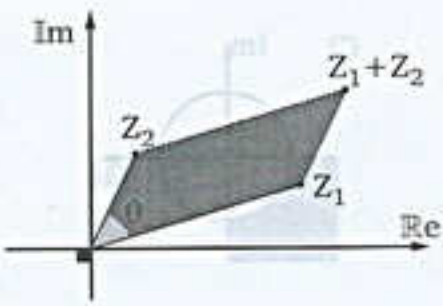
38. En el siguiente gráfico se cumple:

$\text{Re}(Z_1) = \text{Im}(Z_2)$; $Z_1 . Z_2 = 4i$;

$\text{Arg}(Z_1) = 15°$

Determinar el área sombreada

A) $\sqrt{3}\ \mu^2$
B) $\sqrt{2}\ \mu^2$
C) $3\sqrt{2}\ \mu^2$
D) $2\sqrt{3}\ \mu^2$
E) $3\sqrt{3}\ \mu^2$

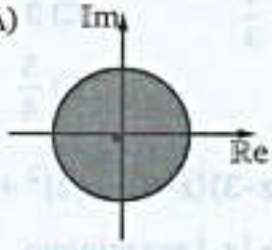


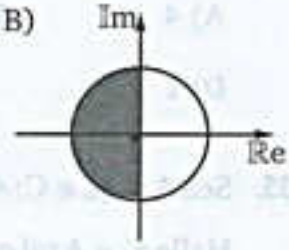
team CALAPENSHKO

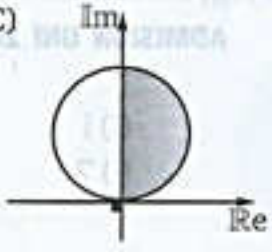
39. La gráfica que mejor representa al conjunto:

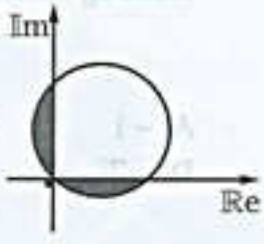
$$A=\left\{z\in\mathbb{C}/|z-1+i|\leq\sqrt{2}\ \text{y}\ \frac{\pi}{2}\leq Arg(z)\leq 2\pi\right\}$$

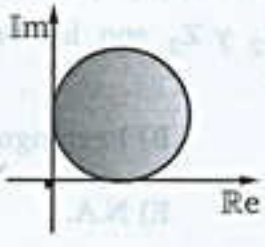
es:

A) 

B) 

C) 

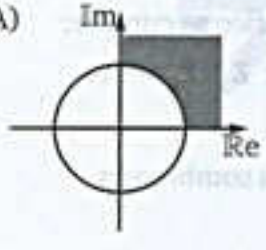
D) 

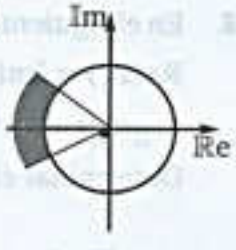
E) 

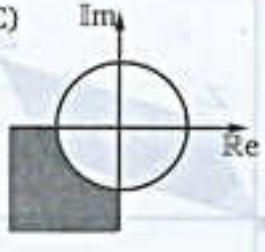
40. La gráfica que mejor representa al conjunto:

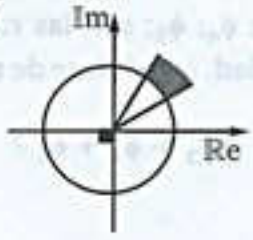
$$S=\left\{z\in\mathbb{C}/|z|=\frac{w^3}{-i};|w|\leq 1;\frac{\pi}{6}\leq Arg(w)\leq\frac{\pi}{3}\right\}$$

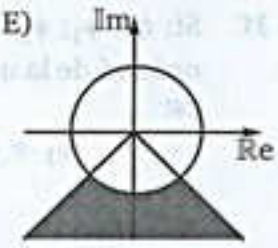
es:

A) 

B) 

C) 

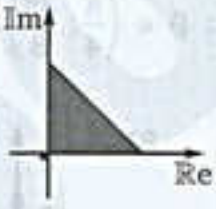
D) 

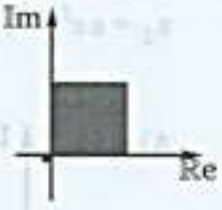
E) 

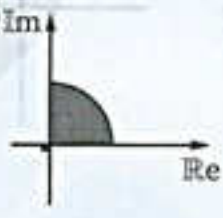
41. La gráfica que mejor representa al conjunto:

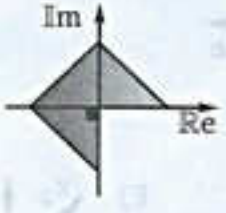
$$R=\left\{z\in\mathbb{C}/|Re(z)|+|Im(z)|\leq 3;0\leq Arg(z)\leq\frac{3\pi}{2}\right\}$$

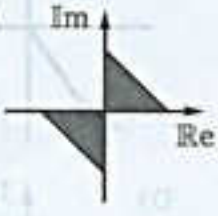
es:

A) 

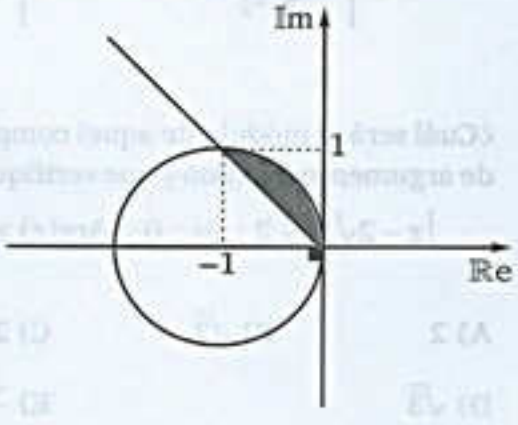
B) 

C) 

D) 

E) 

42. A qué conjunto de números complejos corresponde la región sombreada.



team CALAPENSHKO

A) $\left\{z=|z|e^{\theta} / |z+i| \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{z=|z|e^{\theta i} / |z| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{z=|z|e^{\theta i} / |z+i| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$

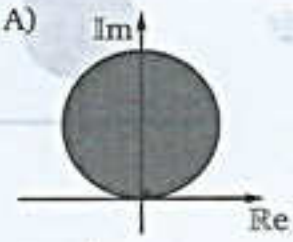
D) $\left\{z=|z|e^{\theta i} / |z+1| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right\}$

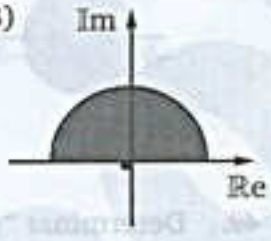
E) $\left\{z=|z|e^{\theta i} / |z-1| \leq 1; \frac{p}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$

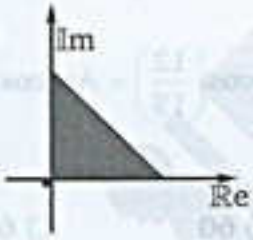
43. Si el conjunto:

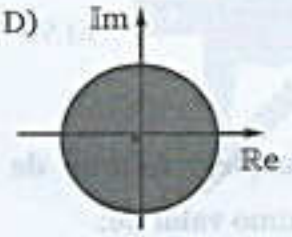
$A = \{\overline{Z} + 1 / |Z+1| \leq 1; Z \in \mathbb{C}\};$

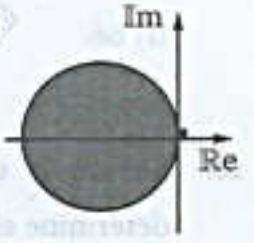
entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:

A)


B)


C)


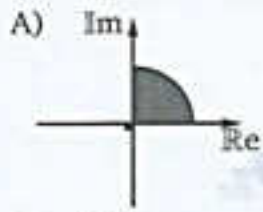
D)


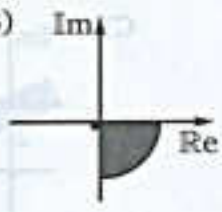
E)


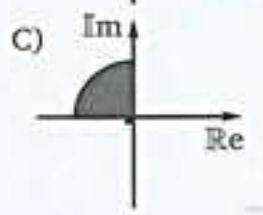
44. Si el conjunto:

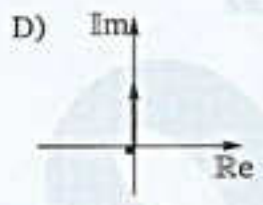
$$T=\left\{z \in \mathbb{C} \mid z=\frac{a+bi}{b-ai}=\frac{a-bi}{b+ai}, \text{con } a \neq b \neq 0\right\}$$

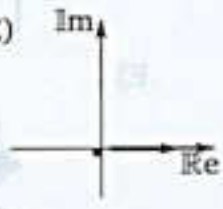
entonces la gráfica que mejor representa al conjunto T es:

A)


B)


C)


D)


E)


45. Entre los números complejos Z que satisfacen la condición:

$$4(Z-3)(\overline{Z}-3)=|Z|^2+15.$$

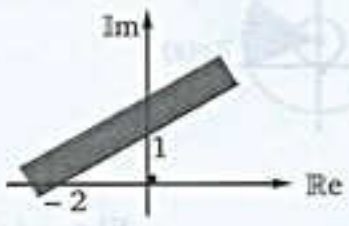
Determinar el complejo que tenga el mayor argumento principal e indicar su módulo, tal que Z se encuentre en el primer cuadrante.

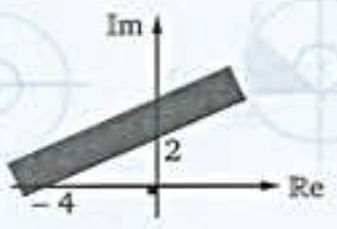
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) 7

46. Si el conjunto:

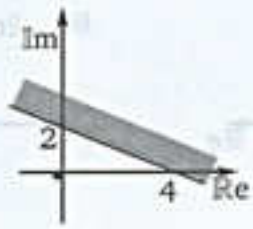
$A = \{\overline{Z} + i / Re(Z) - 2\,Im(Z) \leq 2\};$

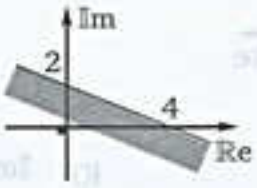
entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:

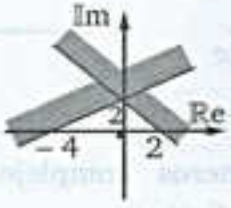
A)


B)


team CALAPENSHKO

C)


D)


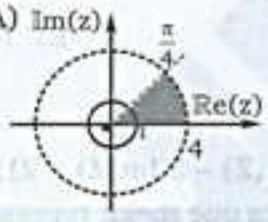
E)


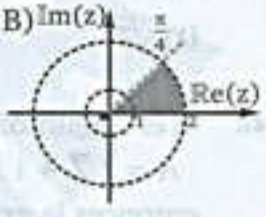
twitter.com/calapenshko

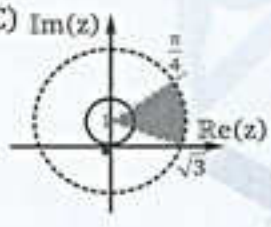
47. Si el conjunto:

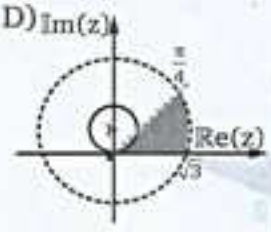
$$A=\left\{z\in\mathbb{C}/|z-i|<2 \text{ y } 0<\text{Arg}(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$$

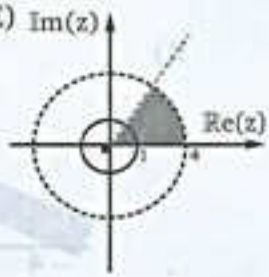
entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:

A)


B)


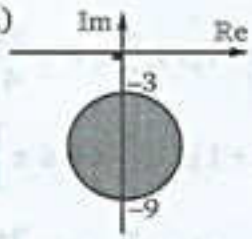
C)


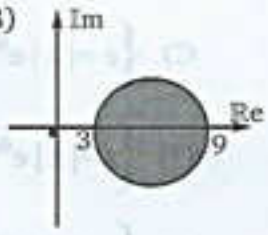
D)


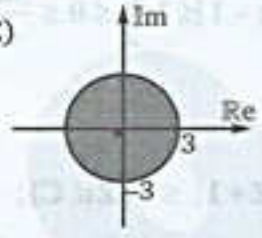
E)


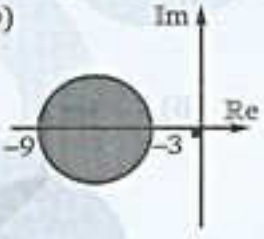
48. Graficar el conjunto A representado por:

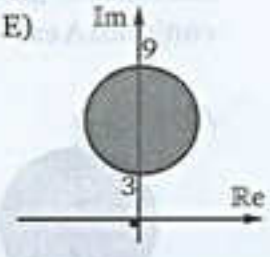
$$A=\{z^{*}-i/\ |z-5i|\le 3\};\ z^{*}=\text{op}(z)$$

A)


B)


C)


D)


E)


49. Determinar "n" en:

$$\text{Arc}\cos\left(\frac{4}{5}\right)+\text{Arc}\cos\left(\frac{12}{13}\right)=\text{Arc}\cos\left(\frac{33}{n}\right)$$

A) 33 B) 60 C) 65

D) 66 E) 99

50. Siendo Z un complejo distinto de cero determine el máximo valor de:

$$\frac{2}{\text{Arg}(Z)}\cdot\left|\frac{Z}{|Z|}-1\right|$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

team CALAPENSHKO

BIBLIOGRAFÍA

1. **MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO**
   Louis Leïthold Happer Row Latinoamericano (HARLA)

2. **MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEA**
   Jack R. Britton Ignacio Bello HARLA S.A. México

3. **ÁLGEBRA CURSO SUPERIOR**
   G.M. BRUÑO Ediciones BRUÑO Madrid

4. **EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ÁLGEBRA**
   Manuel García Ardura Editorial HERNANDO Madrid

5. **ÁLGEBRA CON APLICACIONES**
   Elizabeth Philips Thomas UVT Editorial HARLA S.A. de C.V. México

6. **CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR**
   A. 5. KUROSCH Editorial MIR Moscú

7. **ELEMENTOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR**
   Pablo Miguel y Merino Editorial Cultural Cuba

8. **ÁLGEBRA Y ANÁLISIS DE FUNCIONES ELEMENTALES**
   Potapov Alexandrov Pasichenko Editorial MIR Moscú

9. **ÁLGEBRA**
   Armando O. Rojo Editorial LITODAR Buenos Aires

10. **ÁLGEBRA MODERNA**
    E. Nichols E. Heimer H. Garland Editorial Continental

11. **ÁLGEBRA SUPERIOR**
    Hall y Knight. Editorial Hispano América

12. **MATEMÁTICAS FINITAS**
    Seymour Lipschutz. Compendio Schaun

CLAVES

CAPITULO 1

1	B	26	B
2	A	27	A
3	A	28	C
4	A	29	A
5	A	30	A
6	B	31	A
7	A	32	B
8	C	33	B
9	B	34	C
10	E	35	C
11	A	36	C
12	C	37	B
13	C	38	A
14	A	39	B
15	A	40	C
16	B	41	E
17	A	42	D
18	C	43	D
19	A	44	A
20	C	45	D
21	D	46	A
22	A	47	E
23	C	48	D
24	B	49	E
25	B	50	A

CAPITULO 2

1	E	26	D
2	B	27	E
3	E	28	A
4	E	29	B
5	A	30	D
6	B	31	A
7	C	32	B
8	D	33	B
9	C	34	D
10	D	35	C
11	A	36	C
12	C	37	C
13	B	38	E
14	D	39	B
15	D	40	A
16	A	41	A
17	B	42	C
18	D	43	E
19	A	44	B
20	C	45	B
21	C	46	B
22	B	47	E
23	D	48	E
24	E	49	C
25	C	50	C

CAPITULO 3

1	B	26	C
2	C	27	D
3	C	28	B
4	C	29	A
5	E	30	B
6	B	31	B
7	A	32	B
8	D	33	D
9	E	34	E
10	B	35	E
11	A	36	A
12	D	37	E
13	A	38	D
14	E	39	B
15	D	40	A
16	A	41	D
17	C	42	B
18	E	43	C
19	D	44	D
20	B	45	E
21	B	46	D
22	A	47	D
23	E	48	D
24	E	49	E
25	B	50	E

CAPITULO 4

1	C	26	B
2	C	27	C
3	D	28	C
4	E	29	A
5	B	30	C
6	A	31	D
7	C	32	A
8	B	33	B
9	A	34	C
10	D	35	A
11	E	36	A
12	C	37	A
13	A	38	C
14	D	39	C
15	D	40	E
16	C	41	B
17	E	42	E
18	C	43	E
19	A	44	B
20	B	45	C
21	A	46	E
22	E	47	D
23	D	48	C
24	C	49	D
25	B	50	B

CAPITULO 5

1	A	26	B
2	B	27	C
3	C	28	C
4	D	29	E
5	E	30	C
6	D	31	D
7	B	32	E
8	C	33	A
9	C	34	B
10	E	35	B
11	E	36	A
12	E	37	D
13	E	38	B
14	C	39	C
15	D	40	B
16	B	41	C
17	A	42	B
18	B	43	C
19	E	44	B
20	B	45	D
21	C	46	D
22	A	47	B
23	D	48	B
24	D	49	D
25	E	50	E

CAPITULO 6

1	E	26	B
2	E	27	A
3	C	28	D
4	D	29	C
5	D	30	B
6	D	31	B
7	B	32	E
8	B	33	A
9	B	34	D
10	B	35	D
11	D	36	C
12	D	37	B
13	B	38	B
14	C	39	B
15	D	40	C
16	E	41	C
17	A	42	B
18	D	43	A
19	C	44	B
20	C	45	A
21	B	46	E
22	C	47	C
23	A	48	A
24	E	49	D
25	D	50	D

CAPITULO 7

1	E	26	D
2	A	27	A
3	E	28	C
4	E	29	A
5	B	30	D
6	E	31	B
7	B	32	D
8	D	33	D
9	B	34	A
10	C	35	A
11	B	36	D
12	C	37	B
13	E	38	A
14	D	39	B
15	B	40	B
16	A	41	D
17	A	42	C
18	D	43	E
19	D	44	C
20	A	45	B
21	C	46	C
22	A	47	C
23	A	48	A
24	E	49	C
25	E	50	A

team CALAPENSHKO

CAPITULO 8

1	C	26	D
2	C	27	A
3	C	28	A
4	D	29	A
5	C	30	E
6	C	31	A
7	D	32	B
8	C	33	E
9	C	34	A
10	D	35	E
11	C	36	E
12	B	37	D
13	C	38	B
14	B	39	A
15	B	40	B
16	A	41	D
17	D	42	B
18	E	43	D
19	A	44	B
20	D	45	B
21	E	46	B
22	D	47	E
23	A	48	B
24	A	49	C
25	D	50	B

CAPITULO 9

1	A	26	C
2	A	27	C
3	A	28	A
4	E	29	A
5	A	30	C
6	C	31	D
7	C	32	D
8	E	33	E
9	D	34	A
10	C	35	C
11	C	36	B
12	C	37	C
13	D	38	B
14	C	39	A
15	C	40	B
16	E	41	C
17	B	42	B
18	D	43	C
19	E	44	A
20	A	45	C
21	B	46	D
22	A	47	C
23	D	48	B
24	E	49	B
25	A	50	C

CAPITULO 10

1	B	26	E
2	B	27	E
3	B	28	C
4	D	29	E
5	B	30	B
6	A	31	B
7	C	32	A
8	B	33	D
9	C	34	A
10	C	35	C
11	A	36	D
12	B	37	D
13	D	38	B
14	B	39	A
15	C	40	C
16	C	41	D
17	A	42	B
18	C	43	C
19	C	44	E
20	C	45	C
21	C	46	B
22	A	47	D
23	D	48	C
24	D	49	C
25	B	50	C

CAPITULO 11

1	C	26	B
2	B	27	A
3	C	28	B
4	C	29	D
5	B	30	B
6	B	31	E
7	C	32	E
8	A	33	C
9	D	34	D
10	B	35	C
11	C	36	C
12	E	37	B
13	E	38	C
14	C	39	A
15	D	40	C
16	D	41	E
17	C	42	C
18	D	43	C
19	C	44	A
20	D	45	C
21	C	46	C
22	E	47	D
23	A	48	E
24	D	49	C
25	C	50	D

CAPITULO 12

1	D	26	D
2	E	27	C
3	B	28	A
4	B	29	B
5	A	30	A
6	B	31	E
7	D	32	E
8	D	33	C
9	E	34	E
10	B	35	B
11	C	36	D
12	C	37	E
13	B	38	C
14	A	39	B
15	B	40	B
16	E	41	C
17	E	42	D
18	D	43	D
19	D	44	A
20	C	45	D
21	C	46	C
22	E	47	E
23	D	48	A
24	D	49	C
25	C	50	C

CAPITULO 13

1	A	26	C
2	C	27	C
3	A	28	B
4	D	29	C
5	B	30	B
6	B	31	D
7	C	32	C
8	B	33	C
9	D	34	B
10	C	35	D
11	A	36	C
12	A	37	A
13	C	38	D
14	C	39	C
15	D	40	A
16	E	41	D
17	D	42	C
18	B	43	D
19	A	44	A
20	B	45	B
21	D	46	A
22	A	47	A
23	D	48	A
24	C	49	C
25	A	50	A

CAPITULO 14

1	D	26	E
2	C	27	C
3	B	28	A
4	B	29	D
5	D	30	D
6	B	31	C
7	D	32	D
8	C	33	C
9	B	34	C
10	D	35	C
11	E	36	A
12	B	37	E
13	D	38	D
14	C	39	B
15	C	40	E
16	B	41	B
17	A	42	E
18	D	43	D
19	E	44	C
20	A	45	D
21	B	46	D
22	D	47	C
23	C	48	C
24	C	49	D
25	A	50	E

CAPITULO 15

1	E	26	B
2	B	27	B
3	D	28	C
4	E	29	B
5	E	30	C
6	C	31	A
7	E	32	C
8	D	33	A
9	D	34	B
10	D	35	B
11	D	36	E
12	A	37	B
13	C	38	D
14	B	39	A
15	D	40	B
16	C	41	A
17	E	42	A
18	B	43	E
19	A	44	C
20	D	45	C
21	D	46	D
22	C	47	C
23	C	48	C
24	A	49	D
25	B	50	A

CAPITULO 16

1	D	26	A
2	D	27	A
3	E	28	D
4	C	29	B
5	C	30	D
6	E	31	C
7	D	32	E
8	D	33	D
9	C	34	E
10	B	35	A
11	E	36	C
12	B	37	D
13	C	38	D
14	C	39	E
15	A	40	D
16	B	41	E
17	C	42	D
18	D	43	A
19	D	44	C
20	E	45	C
21	B	46	D
22	B	47	E
23	D	48	E
24	B	49	C
25	B	50	A

CAPITULO 17

1	D	26	A
2	B	27	D
3	E	28	E
4	A	29	B
5	D	30	A
6	B	31	A
7	A	32	B
8	C	33	A
9	E	34	B
10	C	35	D
11	C	36	A
12	E	37	A
13	B	38	B
14	A	39	A
15	E	40	B
16	C	41	C
17	B	42	C
18	E	43	A
19	D	44	C
20	D	45	A
21	D	46	E
22	D	47	D
23	A	48	C
24	A	49	A
25	A	50	A

CAPITULO 18

1	C	26	B
2	C	27	D
3	C	28	A
4	C	29	E
5	A	30	D
6	A	31	A
7	C	32	C
8	B	33	A
9	C	34	B
10	C	35	D
11	A	36	C
12	A	37	A
13	A	38	D
14	E	39	C
15	C	40	A
16	B	41	C
17	D	42	D
18	B	43	B
19	A	44	C
20	B	45	E
21	A	46	A
22	B	47	A
23	C	48	A
24	B	49	C
25	D	50	E

CAPITULO 19

1	D	26	D
2	B	27	D
3	A	28	B
4	C	29	B
5	D	30	C
6	D	31	B
7	D	32	A
8	A	33	A
9	C	34	D
10	A	35	C
11	C	36	E
12	D	37	A
13	D	38	C
14	A	39	D
15	D	40	A
16	B	41	C
17	D	42	D
18	A	43	D
19	D	44	A
20	B	45	D
21	A	46	A
22	D	47	C
23	A	48	C
24	B	49	A
25	D	50	C

CAPITULO 20

1	C	26	B
2	D	27	E
3	C	28	E
4	C	29	D
5	A	30	C
6	E	31	C
7	E	32	D
8	C	33	D
9	D	34	D
10	A	35	B
11	D	36	D
12	C	37	D
13	D	38	D
14	A	39	B
15	A	40	B
16	B	41	D
17	B	42	E
18	D	43	A
19	C	44	C
20	D	45	B
21	C	46	D
22	E	47	E
23	A	48	D
24	D	49	A
25	B	50	D

CAPITULO 21

1	C	26	B
2	C	27	C
3	C	28	C
4	D	29	B
5	D	30	A
6	A	31	C
7	C	32	B
8	C	33	D
9	C	34	E
10	D	35	D
11	D	36	B
12	A	37	D
13	A	38	C
14	E	39	D
15	E	40	E
16	D	41	C
17	E	42	D
18	D	43	A
19	B	44	D
20	E	45	B
21	B	46	A
22	B	47	B
23	D	48	D
24	C	49	C
25	B	50	D

CAPITULO 22

1	D	26	C
2	B	27	B
3	C	28	B
4	B	29	B
5	B	30	B
6	A	31	B
7	E	32	B
8	B	33	C
9	D	34	D
10	B	35	D
11	D	36	B
12	A	37	D
13	B	38	A
14	C	39	A
15	D	40	B
16	B	41	B
17	D	42	B
18	B	43	C
19	C	44	E
20	A	45	B
21	A	46	A
22	A	47	C
23	C	48	D
24	B	49	C
25	E	50	C

CAPITULO 23

1	E	26	C
2	B	27	A
3	C	28	E
4	D	29	E
5	A	30	C
6	B	31	C
7	B	32	B
8	E	33	A
9	E	34	B
10	E	35	E
11	C	36	D
12	C	37	A
13	B	38	C
14	C	39	C
15	C	40	A
16	D	41	E
17	D	42	D
18	D	43	B
19	A	44	B
20	B	45	B
21	C	46	B
22	C	47	C
23	A	48	B
24	D	49	B
25	A	50	E

CAPITULO 24

1	D	26	B
2	B	27	E
3	B	28	E
4	B	29	C
5	B	30	E
6	E	31	B
7	D	32	C
8	C	33	C
9	B	34	C
10	B	35	E
11	C	36	A
12	C	37	D
13	B	38	B
14	A	39	C
15	D	40	B
16	C	41	C
17	D	42	A
18	A	43	E
19	B	44	E
20	A	45	D
21	A	46	E
22	C	47	C
23	C	48	D
24	B	49	E
25	C	50	A

CAPITULO 25

1	B	26	A
2	C	27	C
3	C	28	C
4	A	29	A
5	D	30	D
6	A	31	D
7	A	32	E
8	C	33	E
9	B	34	B
10	D	35	A
11	D	36	C
12	D	37	D
13	D	38	D
14	B	39	B
15	C	40	C
16	C	41	A
17	D	42	A
18	C	43	D
19	D	44	C
20	E	45	A
21	E	46	A
22	E	47	D
23	C	48	D
24	B	49	C
25	E	50	D

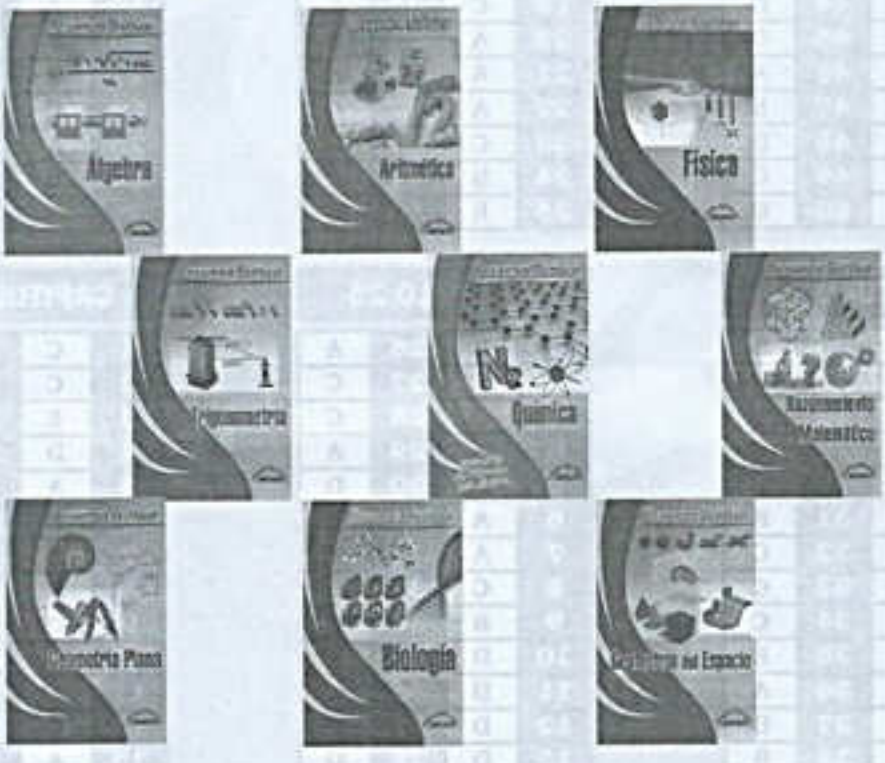
CAPITULO 26

1	C	26	D
2	C	27	B
3	E	28	A
4	D	29	E
5	A	30	A
6	B	31	E
7	A	32	E
8	B	33	C
9	D	34	B
10	C	35	B
11	E	36	A
12	C	37	D
13	A	38	D
14	E	39	D
15	D	40	C
16	C	41	C
17	B	42	C
18	B	43	D
19	B	44	E
20	D	45	D
21	A	46	D
22	E	47	D
23	C	48	A
24	C	49	D
25	A	50	C

team CALAPENSHKO

LIBROS

RESÚMENES TEÓRICOS

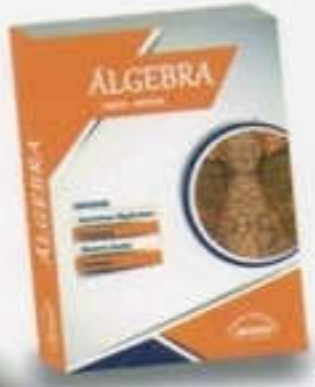


twitter.com/calapenshko

TEMAS SELECTOS

team CALAPENSHKO

CALAPENSHKO



NUESTRAS PUBLICACIONES

LIBROS

- ARITMÉTICA
- ÁLGEBRA
- GEOMETRÍA
- TRIGONOMETRÍA
- RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
- FÍSICA
- QUÍMICA
- BIOLOGÍA Y ANATOMÍA
- GEOGRAFÍA
- LENGUAJE
- LITERATURA
- HISTORIA DEL PERÚ
- HISTORIA UNIVERSAL
- PSIC. FIL. Y LOG.
- RAZONAMIENTO VERBAL

- Formato: 16 x 21.5 cm
- 848 Páginas
- 26 Capítulos
- 780 Problemas Resueltos
- 1300 Problemas Propuestos

twitter.com/calapenshko

Biblias

424-6350
992-796104

editorialrodo@gmail.com

/ Editorial RODO - Oficial